YEREL JEOİD YÜZEYİNİN BELİRLENMESİNDE KULLANILAN ENTERPOLASYON YÖNTEMLERİ

Kamil TEKE, Mualla YALÇINKAYA

Karadeniz Teknik Üniversitesi,

Jeodezi ve Fotogrametri Mühendisliği Bölümü, 61080, TRABZON

Özet

Günümüzde GPS ile jeodezik kontrol noktalarına ait elipsoid yükseklikleri yüksek duyarlıkta belirlenebilmektedir. Pratik jeodezide kullanılan yükseklikler ise jeoid yüzeyinden başlayıp fiziksel yeryüzüne kadar çekül eğrisi boyunca olan ortometrik yüksekliklerdir. Elipsoid yüzeyinden jeoid ondülasyonları kadar farklı olan jeoid yüzeyi analitik bir yüzey olup yerel çalışma alanlarında ikinci veya üçüncü derece yüzey fonksiyonları ile yeterli duyarlıkta temsil edilebilmektedir.

Bu çalışmada, ortogonal ve ortogonal olmayan polinomlarla, farklı bölgeler için en uygun yerel jeoidin belirlenmesi amaçlanmıştır. Yerel jeoid yüzeyi, kuadratik, kübik, bi-kuadratik ve bi-kübik yüzey fonksiyonları ile belirlenmiştir. Yerel jeoid yüzeyi ile elipsoid yüzeyi farkı olan jeoid ondülasyonlarının, GPS ile belirlenen değerlerden sapmaları irdelenerek yöntemlerin duyarlıkları araştırılmıştır.

Giriş

Yerin gravite alanı içerisinde, çekim potansiyeli ve merkezkaç potansiyelinin skaler toplamı olan gerçek gravite potansiyeli eşit noktaların birleşmesiyle eş potansiyelli yüzeyler elde edilir. Fiziksel yeryüzünde her noktadan bir eş potansiyelli yüzey geçer. Bu yüzeyler yerin dışında analitik ve kapalı yüzeylerdir. Eş potansiyelli yüzeylerden ortalama okyanus yüzeyi ile çakışanına JEOİD adı verilir. Jeodezi bilim dalında yerin gerçek şekli olan jeoid yüzeyinin global veya yerel anlamda belirlenmesi büyük önem taşır.

Elipsoid yüzeyinden elipsoid normali boyunca ölçü noktasına olan yüksekliklere elipsoid yükseklikleri (h) adı verilir. Elipsoid yükseklikleri GPS ile yüksek doğrulukta ve düşük maliyet ile pratik olarak belirlenebilmektedir. Fakat pratik jeodezide kullanılan jeoid yüzeyinden itibaren çekül eğrisi boyunca olan yükseklikler (ortometrik yükseklikler (H)) maliyeti yüksek ve zahmetli ölçümlerle belirlenmektedir.

Bölgesel haritacılık çalışmalarının çoğu için, yerel jeoid yüzeyi yardımı ile ölçülen elipsoid yüksekliklerinden ortometrik yükseklikleri yeterli duyarlıklarda elde mümkündür.

Jeoid ve elipsoid yüzeyleri arasındaki elipsoid normali boyunca olan uzaklığa jeoid ondülasyonu denir. Yerel jeoid yüzey denkleminin belirlenmesinde jeodezik dayanak noktalarına ait jeoid ondülasyonları kullanılır. Yüzey denkleminin oluşturulmasında kullanılan enterpolasyon yöntemleri iki yükseklik sistemi arasındaki dönüşümün duyarlığını etkiler. Bu çalışmada ayrı dayanak noktaları için farklı enterpolasyon yöntemleri kullanılarak elde edilen yüzey denklemlerinin ölçülen ortometrik yüksekliklere ne derece yaklaşabildiği irdelenmiştir.

Enterpolasyon Yöntemleri

Kullanılacak yüzey genellikle iki değişkenli yüksek derece polinomlarla tanımlanır.

Ortagonal Polinomun Genel İfadesi

$$N(X,Y)=\sum_{\substack{k=0\\ i=0}}^{n}\ \sum_{j=k-i}^{k} a_{ij}x^{i}y^{j}$$

Burada, a_{ij}; polinomun bilinmeyen katsayıları, n; polinomun derecesi, x,y; noktaların düzlem koordinatlarıdır. Eşitlikte n=1 seçildiğinde yüzey lineer, n=2 seçildiğinde yüzey quadratik, n=3 seçildiğinde yüzey kübik olarak adlandırılır.

6 Bilinmeyenli Kuadratik Yüzey Polinomu

$$N(x,y)=a_0+a_1y+a_2x+a_3x^2+a_4xy+a_5y^2$$

10 Bilinmeyenli Kübik Yüzey Polinomu

$$N(x,y)=a_0+a_1y+a_2x+a_3x^2+a_4xy+a_5y^2+a_6x^3+a_7x^2y+a_8xy^2+a_9y^3$$

Ortagonal Olmayan Polinomun Genel İfadesi

$$N(X,Y)=\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n} a_{ij}x^{i}y^{j}$$

Yandaki eşitlikte n=1 seçildiğinde yüzey bi-lineer, n=2 seçildiğinde yüzey bi-quadratik, n=3 seçildiğinde yüzey bi-kübik olarak adlandırılır.

9 Bilinmeyenli Bi-kuadratik Yüzey Polinomu

$$N(x,y)=a_0+a_1y+a_2x+a_3x^2+a_4xy+a_5y^2+a_6x^2y+a_7y^2x+a_8x^2y^2$$

16 Bilinmeyenli Bi-kübik Yüzey Polinomu

$$N(x,y)=a_0+a_1y+a_2x+a_3xy+a_4y^2+a_5xy^2+a_6x^2+a_7x^2y+a_8x^2y^2+a_9y^3+a_{10}xy^3+a_{11}x^2y^3+a_{12}x^3+a_{13}x^3y+a_{14}x^3y^2+a_{15}x^3y^3$$

EN KÜÇÜK KARELER YÖNTEMİ İLE YÜZEY POLİNOMLARININ KATSAYILARININ HESABI

Bilinmeyenler ile ölçüler arasındaki fonksiyonel ilişki lineer olmalıdır. Değil ise her bir bilinmeyene ilişkin kısmi türev alınarak lineerleştirilmelidir. Her bir ölçü için ayrı bir lineer denklem yazıldığında satır sayısı ölçü sayısına eşit ve sütun sayısı bilinmeyen sayısına eşit bir matris elde edilir ki buna dizayn, yapı veya katsayılar matrisi (A) denir. Kübik yüzey için dizayn matrisi,

$$A_{nx10}=\begin{bmatrix} 1 & y_1 & x_1 & x_1^2 & x_1y_1 & y_1^2 & x_1^3 & x_1^2y_1 & x_1y_1^2 & y_1^3\\ 1 & y_2 & x_2 & x_2^2 & x_2y_2 & y_2^2 & x_2^3 & x_2^2y_2 & x_2y_2^2 & y_2^3\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ 1 & y_n & x_n & x_n^2 & x_ny_n & y_n^2 & x_n^3 & x_n^2y_n & x_ny_n^2 & y_n^3 \end{bmatrix}$$

şeklinde oluşturulur. Ölçüler vektörü (l) ise,

$$l^T_{1xn}=\begin{bmatrix}N_1 & N_2 & \cdots & N_n\end{bmatrix}$$

şeklinde ifade edilir. Her bir ölçüye ilişkin ağırlıkları içeren matrise ise ağırlık matrisi (P) denir ve,

$$P_{nxn}=\begin{bmatrix} P_{N_1} & 0 & \cdots & 0\\ 0 & P_{N_2} & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & P_{N_n}\end{bmatrix}$$

şeklinde ifade edilir. Polinom katsayılarından oluşan bilinmeyenler vektörü (X),

$$X^T_{1x10}=\begin{bmatrix}a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & a_6 & a_7 & a_8 & a_9\end{bmatrix}$$

şeklinde ifade edilir. En küçük kareler çözümü sonucu,

$$X=(A^TPA)^{-1}A^TPl$$

matris eşitliği ile fonksiyonun bilinmeyen katsayıları hesaplanır.

Parametreler için anlamlılık testi

Kestirilen bir parametre xi ve m_{x_i} standart sapması olmak üzere parametrenin ümit değerinin sıfır kabul edilip edilmeyeceğine karar vermek için sıfır ve seçenek hipotezleri,

$$H_0\ :\ E(x_i)=0$$

$$H_S\ :\ E(x_i)\neq 0$$

şeklinde oluşturulur. Test büyüklüğü,

$$T=\frac{|x_i|}{m_{x_i}}$$

eşitliği ile hesaplanır. f, serbestlik derecesi ve α , yanılma olasılığı olmak üzere, test büyüklüğü $t_{f,1-\frac{\alpha}{2}}$ sınır değeri ile karşılaştırılır. $T<t_{f,1-\frac{\alpha}{2}}$ ise sıfır hipotezi kabul edilir ve ilgili parametre polinomdan çıkarılır. Seçenek hipotezinin geçerli olması durumunda ise kestirim değerinin anlamlı olduğuna karar verilir.

MULTİ-KUADRATİK ENTERPOLASYON YÖNTEMİ

Multiquadratik enterpolasyon tekniğinin uygulanmasından önce çalışma bölgesi için en uygun olduğu düşünülen n. dereceden bir polinomun bilinmeyen katsayıları dayanak noktalarının Ni değerlerine bağlı olarak en küçük karelere göre çözümlendikten sonra dayanak noktalarındaki ΔN_i artık ondülasyon değeri

$$\Delta N_i = N_i - N(x_i,y_i) = N_i - N_{fonk.} \qquad ; \qquad i=1,2,...,n$$

hesaplanır. (xo,yo) enterpolasyon noktasındaki artık ondülasyon değeri ise,

$$\Delta N_0 = N_0 - N(x_0,y_0) = N_0 - N_{fonk.}$$

eşitliğinden hesaplanır.

Yukarıdaki eşitlikte bilinmeyen hem ΔN_0 hem de N_0 değerleridir. Multuquadratik yönteme göre ΔN_0 elde edildiğinde N_0 değeride belli edilmiş olur. Multiquadratik yöntemin en genel eşitliği,

$$\Delta N_0=\sum_{i=1}^{n} C_i\theta(x_0,y_0;x_i,y_i)$$

şeklindedir. Burada N_i dayanak noktalarının jeoid ondülasyon değerleri, N_0; enterpolasyon noktasının jeoid ondülasyon değerleri, $N(x_i,y_i)$ fonksiyondan elde edilen herhangi bir i noktasına ait ondülasyon değeri, n; dayanak nokta sayısı, Ci; dayanak noktalarının bilinen ΔN_i değerlerinden hesap edilecek olan bilinmeyen katsayılarıdır. Ci katsayıları ikinci dereceden terimlerin işaretini ve eğimini belirler. $\theta(x_0,y_0;x_i,y_i)$ Kernel fonksiyonudur. Bu fonksiyon dairesel dik konilerin toplamları şeklinde ifade edilirse,

$$\theta(x_0,y_0;x_i,y_i)=\left[(x_i-x_0)^2+(y_i-y_0)^2\right]^{1/2}$$

eşitliği elde edilir. Ci, katsayılarını hesaplamak için dayanak noktalarına bağlı olarak,

$$C_1a_{11}+C_2a_{12}+...+C_na_{1n}=\Delta N_1$$

$$C_1a_{21}+C_2a_{22}+...+C_na_{2n}=\Delta N_2$$

$$\vdots$$

$$C_1a_{n1}+C_2a_{n2}+...+C_na_{nn}=\Delta N_n$$

şeklinde n tane lineer denklem oluşturulur. Herhangi bir noktanın ondülasyon değeri, A; nxn boyutlu katsayılar matrisi,

$$A_{nxn}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{bmatrix}$$

C, n elemanlı bilinmeyenler vektörünü,

$$C^T=\begin{bmatrix}C_1 & C_2 & \cdots & C_n\end{bmatrix}$$

ve, ΔN dayanak noktalarındaki artık ondülasyon değerlerini içeren n elemanlı vektörü,

$$\Delta N^T=\begin{bmatrix}\Delta N_1 & \Delta N_2 & \cdots & \Delta N_n\end{bmatrix} \qquad \text{ve} \qquad C=A^{-1}\Delta N$$

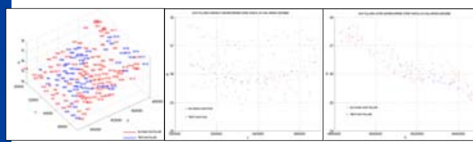
göstermek üzere,

$$N_0=N(x_0,y_0)+\sum_{i=1}^{n} C_i[(x_i-x_0)^2+(y_i-y_0)^2]^{1/2}$$

eşitliği ile hesaplanır.

Uygulama

Uygulamada, Kocaeli ilinde MERLİS (Marmara Earthquake Region Land Information System) projesi kapsamında yapılan çalışmalarda oluşturulan jeodezik kontrol noktalarının ITRF96 datumu 2002.48 ölçü epoğundaki koordinatları kullanılmıştır. DUTM projeksiyon koordinatları ve elipsoid ondülasyonları belli olan bu noktalar toplam 174 adet olup yaklaşık 80 km x 80 km bir alana dağılmıştır. Uygulamada bunlardan 109 adedi dayanak, 65 adedi ise test noktası olarak alınmıştır. Dayanak noktalarının uygun dağılımda seçimi yüzey modelinin doğruluğunu arttıracaktır. Bu nedenle noktaların seçiminde, x ve y ekseni yönlerindeki nokta dağılımlarına bakılmıştır (Şekil 1).



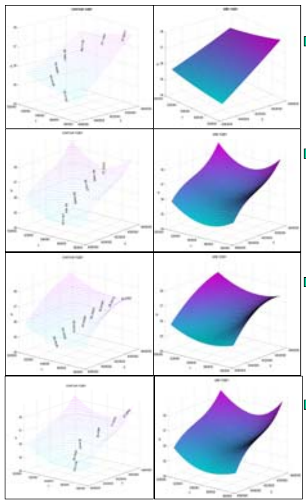
Şekil 1. Dayanak ve test noktalarının uygulama bölgesi jeoid yüzeyine dağılımı

Dayanak noktalarının seçiminin ardından kuadratik, kübik, bi-kuadratik ve bi-kübik yüzey polinomlarının katsayıları en küçük kareler kestirim yöntemine göre hesaplanmıştır. Parametrelerin anlamlılık testini geçemeyen katsayılar modele dahil edilmemiştir (Tablo 1).

Tablo 1. Yüzey polinomlarının katsayıları ve katsayıların anlamlılık testi sonuçları

Katsayılar	Yüzeyin Cinsi											
	Ortogonal Yüzey Polinomları						Ortogonal Olmayan Yüzey Polinomları					
	Quadratik			Kübik			Bi-quadratik			Bi-kübik		
	Katsayı Değeri	Test Değeri (Tablo Değ.=1,6598)	Sonuç	Katsayı Değeri	Test Değeri (Tablo Değ.=1,6604)	Sonuç	Katsayı Değeri	Test Değeri (Tablo Değ.=1,6600)	Sonuç	Katsayı Değeri	Test Değeri (Tablo Değ.=1,6606)	Sonuç
A_0	3.1664e-10	38.729	Geçerli	8.0849e-30	4.559	Geçerli	1.4479e-32	3.2137	Geçerli	**3.5897e-06**	**1.056**	**Geçersiz**
A_1	8.5329e-05	71.185	Geçerli	1.9898e-24	2.259	Geçerli	-2.7701e-25	3.2421	Geçerli	**2.1267e-04**	**0.856**	**Geçersiz**
A_2	8.205e-05	71.186	Geçerli	2.7483e-24	5.689	Geçerli	5.5068e-27	3.2794	Geçerli	**-1.5897e-03**	**0.324**	**Geçersiz**
A_3	3.1219e-11	0.83971	Geçerli	7.59e-19	5.482	Geçerli	5.5068e-27	3.3036	Geçerli	1.2517e-09	2.071	Geçerli
A_4	-2.707e-10	3.7306	Geçerli	6.9229e-19	2.753	Geçerli	2.2627e-21	3.2646	Geçerli	**6.6520e-02**	**0,025**	**Geçersiz**
A_5	5.1375e-11	1.8471	Geçerli	6.25e-19	2.536	Geçerli	5.871e-16	3.3259	Geçerli	**2.4256e-07**	**0,287**	**Geçersiz**
A_6	-	-	-	4.7322e-15	5.292	Geçerli	1.8197e-21	3.3209	Geçerli	-2.6596e-08	1,731	Geçerli
A_7	-	-	-	-1.3226e-14	1.906	Geçerli	4.9072e-16	3.3443	Geçerli	1.5509e-13	1,760	Geçerli
A_8	-	-	-	1.2555e-14	1.667	Geçerli	-1.5775e-21	3.3665	Geçerli	-3.1401e-19	1,828	Geçerli
A_9	-	-	-	-3.8248e-15	2.110	Geçerli	-	-	-	1.4815e-14	5,759	Geçerli
A_{10}	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-8.8285e-20	5,978	Geçerli
A_{11}	-	-	-	-	-	-	-	-	-	3.7996e-25	2,632	Geçerli
A_{12}	-	-	-	-	-	-	-	-	-	5.1697e-14	1,754	Geçerli
A_{13}	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-3.0179e-19	1,785	Geçerli
A_{14}	-	-	-	-	-	-	-	-	-	5.9677e-25	1,834	Geçerli
A_{15}	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-5.0205e-31	1,738	Geçerli

Yüzey polinomları ile uyuşumsuz olan noktaları belirlemek için uyuşumsuz ölçüler testlerinden t-testi tüm yüzey polinomları için uygulanmıştır. Uyuşumsuz nokta belirlenmemiştir.



Kuadratik yüzey polinomu ile oluşturulan yerel jeoid yüzeyi

Kübik yüzey polinomu ile oluşturulan yerel jeoid yüzeyi

Bi-kuadratik yüzey polinomu ile oluşturulan yerel jeoid yüzeyi

Bi-kübik yüzey polinomu ile oluşturulan yerel jeoid yüzeyi

Şekil 2. Yüzey polinomları ile oluşturulan yerel jeoid yüzeyleri

Multi-kuadratik enterpolasyon yönteminde trend yüzey olarak kuadratik yüzey seçilmiştir. Yöntemlerin ve modellerin duyarlıklarına ilişkin tablo aşağıda verilmiştir

Tablo 2. Yüzey polinomlarının katsayıları ve katsayıların anlamlılık testi sonuçları

Yöntem	Parametreler		m_0 (cm)	$\lvert \varepsilon_{max} \rvert$ (cm)
Polinom yüzeyleri	Ortagonal olan	Kuadratik	17,2	40,1
		Kübik	10,8	34,9
	Ortagonal olmayan	Bi-kuadratik	18,5	41,0
		Bi-kübik	10,3	25,8
Multikuadratik			8,7	18,9

Sonuç ve Öneriler

Trend yüzey olarak kuadratik yüzey seçilerek gerçekleştirilen multi-kuadratik enterpolasyon yöntemi Tablo 2' den de görüleceği gibi en duyarlı sonucu vermiştir. Kübik ve bi-kübik yüzey polinomlarından elde edilen ondülasyon değerlerinin duyarlıklarının da jeodezik çalışmaların çoğu için yeterli olacağı söylenebilir. Dayanak noktaları olarak seçilecek noktaların uygulama bölgesine homojen bir dağılım göstermesi ve yeterli sıklıkta seçilmesi, multi-kuadratik enterpolasyon yönteminden diğer noktaların ondülasyon değerleri ve ortometrik yüksekliklerinin hesaplanması önerilir.