

I. Ulusal Mühendislik Ölçmeleri Sempozyumu

M. YALÇINKAYA ¹, K. TEKE ¹, T. BAYRAK ²

¹ Karadeniz Teknik Üniversitesi, Mühendislik-Mimarlık Fakültesi, Jeodezi ve Fotogrametri Müh. Bölümü, 61080, Trabzon, Türkiye, mualla@ktu.edu.tr, k_teke@ktu.edu.tr

² Niğde Üniversitesi, Aksaray Mühendislik-Mimarlık Fakültesi, Jeodezi ve Fotogrametri Müh. Bölümü, Aksaray, Türkiye, temelbayrak@hotmail.com

Özet

Kentsel teknik hizmetler, kadastral çalışmalar yada deformasyonları belirleme gibi farklı kullanım amaçları ile kurulan jeodezik ağların, kendilerinden beklenen işlevleri yerine getirebilmeleri istenir. Genellikle ağların duyarlık yönünden homojen ve izotrop yapıda olmaları beklenir. Duyarlık ölçütleri ağ kalitesini yansıtır. Ancak duyarlık ölçütleri, geçerli bir dengeleme modeli ile yapılan hesaplamalar sonucunda elde edilirse gerçekçi olurlar. Bu nedenle ağın geometrik yapısı, model hatalarını ortaya çıkarabilmeli, diğer bir ifade ile ağ güvenilir olmalıdır. Bu çalışmada, Ordu İlinde sıklaştırma amacıyla kurulmuş olan bir GPS ağının, duyarlık ve güven analizi yapılmıştır. Ağa ilişkin tüm duyarlık ölçütleri koordinat bilinmeyenlerinin varyans – kovaryans matrisinden türetilmiştir. Ayrıca, ağ ölçülerinin (baz vektörlerinin) fazla ölçü sayısındaki payları (redundanz payları), ortaya çıkarılamayan hataların sınır değerleri (iç güven ölçütleri), hataların koordinatlara etkime katsayıları (dış güven ölçütleri) hesaplanarak, ağın geometrik yapısının model hatalarına karşı duyarlılığı diğer bir deyişle ağın güvenilirliği ortaya konulmuştur. GPS ağı ölçme planının hazırlanması aşamasında, ağın duyarlık ve güveninin artırılmasına yönelik, uygulanabilir çözüm önerileri sunulmuştur.

Anahtar kelimeler : GPS Ağı, Duyarlık, güvenilirlik .

Analyzing Precision and Reliability of Geodetic GPS Networks

Abstract

Geodetic networks are established for different using purposes like cadastral survey, serving urbanization or determining deformations. They are desired to ensure the objective of the establishment. In general, geodetic networks are expected to be homogeneous. Precision criteria show the quality of the network. However, precision criteria of a network will be realistic only if they are calculated from a valid adjustment model. For this reason, geometric condition of the network must be reliable. In this study, a GPS network established in Ordu province has been analyzed from the standpoint of reliability and precision. All the precision criteria are derived from the cofactor matrix of the coordinates. Redundancy numbers of the baseline components, limit values of the undetected blunders (internal reliability) and the effect of the undetected blunders on the coordinates (external reliability) have been calculated, so as to put forth the sensitivity of the network configuration to model errors for consideration, in other words the reliability of the network has been determined. In order to increase the precision and reliability of GPS networks in designing stage of survey schedules, applicable solutions have been suggested.

Keywords: GPS Network, precision, reliability.

1. Giriş

Bütün jeodezik ağlar, kuruluş amaçlarına uygun ve kendilerinden beklenen duyarlık ve güvenilirlik isteklerini yeterince karşılayabilecek yapıda olmalıdırlar. Jeodezik ağların kurulma amaçlarına yönelik duyarlık ve güven isteklerini sağlayıp sağlamadığı duyarlık ve güven ölçütleri ile denetlenir. Duyarlık ölçütleri, ağın kalitesini gösterirler ve ağın tümü için tanımlanabilecekleri gibi ağın tek noktası veya komşu noktaları içinde tanımlanabilirler. Nokta koordinatlarının ortalama hatası, nokta konum hatası, noktaların hata elipsoidleri ve bağıl hata elipsoidleri noktaların duyarlıklarını yansıtan ölçütlerdendir. Bu ölçütlere göre ağın duyarlık analizleri yapılabilir. Duyarlık ölçütleri geçerli bir dengeleme modeli ile gerçekçi bilgi taşırlar. Dengeleme modelinin geçerli olup olmadığı veya değerlendirme aşamasında bir model hatasının oluşup oluşmadığı güven ölçütleri ile denetlenebilir. Dengeleme sonuçlarına ve onların duyarlıklarına ilişkin yorumlar güven ölçütlerinin sağlanması durumunda gerçekçi olurlar. Güvenilir bir ağda, ortalama serbestlik derecesinin 0.5 değerini aşması ve tüm ölçülerin redundanz değerlerinin ortalama serbestlik derecesine yakın değer alması gerekir. Ayrıca, güvenilir bir ağdan, ölçülerde oluşacak normal dağılıma uymayan hataların yine aynı ölçülerin düzeltmelerine yansması böylece normal dağılıma uymayan hataları içeren ölçülerin uyumsuz ölçü testleri ile ortaya çıkarılabilmesi, belirlenemeyen kaba ve sistematik hataların dengeleme bilinmeyenlerine ve bunların fonksiyonlarına düşük oranda yansması beklenir. Ağın güvenirliliği doğrudan ağın geometrisi ve ölçü sayısı ile ilişkilidir.

Jeodezik GPS ağları, ülke sisteminde dengelenmeden önce ölçülerin kendi aralarındaki tutarlılığını ve noktaların konum duyarlılığını en iyi şekilde yansıtan serbest ağ dengelemesi yöntemiyle dengelemeli ve uyumsuz ölçüler testi uygulanarak ağdaki uyumsuz ölçüler belirlenmelidir. Bu işlemlerin ardından duyarlık ve güven ölçütleri hesaplanarak ağın kalitesi ve kullanım amacına uygunluğu irdelenmelidir. Ağın duyarlık ve güven yönünden iyileştirilebilirliği araştırılmalıdır.

Bu çalışmada Ordu ilinde sıklaştırma ağı olarak tesis edilmiş bir jeodezik GPS ağı uygulama ağı olarak seçilmiştir. Bu ağın duyarlık ve güven ölçütleriyle analizi yapılmış ve ağın duyarlık ve güveninin artırılmasına yönelik uygulanabilir çözüm önerileri sunulmuştur.

2. Ağın Serbest Dengelenmesi ve Uyuşumsuz Ölçülerin Belirlenmesi

Ağdaki ölçülerin kendi aralarındaki tutarlılığını ve noktaların konum duyarlılığını en iyi şekilde yansıtabilmek için ağın serbest dengelenmesi, başka bir deyişle ağda değişmez olarak kabul edilecek noktanın ve ölçünün bulunmaması gerekir. Serbest ağ dengelemesinde, başlangıçta belirlenen yaklaşık koordinatlara (X_0, Y_0, Z_0), dengeleme sonucunda eklenecek bilinmeyenlerin (x, y, z) kareleri toplamı minimum yapılmaktadır. Başka bir deyişle dengeli koordinatlar (X, Y, Z), yaklaşık koordinatların (X_0, Y_0, Z_0) belirledikleri sisteme dönüştürülmektedir. Bu nedenle serbest ağ dengelemesinde yaklaşık koordinatların çok iyi belirlenmiş olmaları gerekmektedir (Ayan, 1981; Öztürk ve Şerbetçi 1992).

Serbest ağ dengelemesi, hiçbir datum parametresi sabit alınmaksızın v , düzeltmeler; x , bilinmeyenler vektörü; p , ölçülere ilişkin ağırlık matrisi olmak üzere, tüm iz minimum koşulu altında, düzeltmelerin ve koordinat bilinmeyenlerinin kareleri toplamının minimum yapıldığı

$$v^T P v + x^T x \Rightarrow \min \quad (1)$$

en küçük kareler çözümüyle gerçekleştirilir. Serbest ağ dengelemesinde, koordinat bilinmeyenlerinin ortalama hatalarının en küçük olması anlamına gelen, koordinat bilinmeyenlerinin ters ağırlık matrisinin izinin minimum olması

$$\text{iz} \{Q_{xx}\} \Rightarrow \min \quad (2)$$

koşulu da gerçekleşir (Öztürk ve Şerbetçi 1992). A, katsayılar matrisi olmak üzere, serbest ağ dengelemesinde hesaplanan normal denklem katsayılar matrisi (N),

$$N = A^T P A \quad (3)$$

tekil yapıda olur. Bu nedenle bu matrisin tersi Moore – Pensore inversiyle

$$N^+ = (N + GG^T)^{-1} - GG^T \quad (4)$$

biçiminde alınır. Burada G matrisi, normal denklem katsayılar matrisinde datum parametre sayısı kadar sıfıra eşit özdeğerlere karşılık gelen özvektörlerden ya da benzerlik dönüşümüne karşılık gelen ve ağırlık merkezine ötelenmiş (normlandırılmış) koordinatlardan oluşturulan ortogonal özellikli bir dönüşüm matrisidir (Koch, 1980; Ruff, 1983; Konak, 1996).

Serbest ağ dengelemesinin ardından model hipotezi testi yapılır ve dengeleme modelinin geçersiz olması durumunda,

- dengelemenin matematik modelinin doğru kurulmamış olabileceği,
- ölçü ağırlıklarının doğru belirlenmemiş olabileceği,
- ölçülerden en az birinin uyuşumsuz olabileceği,

şeklinde sonuçlar çıkarılır. Ölçülerin birinde yada birkaçında bulunan ve rasgele ölçü hatalarına çok yakın büyüklükte olan kaba hatalar kolaylıkla fark edilemezler ve dengeleme hesabı sonucunda bulunan büyüklükleri olumsuz yönde etkilerler. Bunlar ancak uyuşumsuz ölçüler testi ile belirlenebilirler. Uyuşumsuz ölçüleri belirlemek için genişletilmiş fonksiyonel model, l , ölçü; v , düzeltme; x , bilinmeyenler ve e_j , j . değeri 1 olan sıfır vektörü; Δ_j , j numaralı ölçüdeki kaba hata olmak üzere

$$l + v = \begin{bmatrix} A & e_j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \Delta_j \end{bmatrix} \quad (5)$$

biçiminde oluşturulur. Bu modelden j . ölçüdeki kaba hatanın büyüklüğü ve ters ağırlığı,

$$\Delta_j = - \frac{e_j^T P v}{e_j^T P Q_{vv} P e_j}, \quad q_{\Delta\Delta} = \frac{1}{e_j^T P Q_{vv} P e_j} \quad (6)$$

olarak hesaplanır. Burada Q_{vv} , düzeltmelerin ters ağırlık matrisini göstermektedir. Genişletilmiş modelden birim ölçünün ortalama hatasının soncul değeri (s_0), f , serbestlik derecesi olmak üzere,

$$s_0 = \pm \sqrt{\frac{1}{f-1} (P_{vv} - \frac{\Delta_j}{q_{\Delta\Delta}})} \quad (7)$$

eşitliğinden hesaplanır. Kaba hatanın anlamlı olup olmadığını irdeleyebilmek için sıfır ve seçenek hipotezleri,

$$\begin{aligned} H_0 &: E(\Delta_j) = 0 \\ H_s &: E(\Delta_j) \neq 0 \end{aligned} \quad (8)$$

biçiminde kurulur. Test büyüklüğü,

$$T_j = \frac{|e_j^T P v|}{s_0 \sqrt{e_j^T P Q_{IV} P e_j}} \quad (9)$$

şeklinde hesaplanır. Her ölçü için hesaplanan test büyüklüğü değerlerinden en büyüğü, α testin ve $\bar{\alpha}/2 = 1 - \sqrt{1 - \alpha}/2$ de t-dağılımının yanılma olasılığı olmak üzere, $S=1-\alpha$ istatistik güvenle t-dağılımı cetvelinden alınan sınır değer ile karşılaştırılır.

$$T_{\max} > t_{f-1, 1-\bar{\alpha}/2} \quad (10)$$

ise irdelenen ölçünün uyuşumsuz olduğuna karar verilir. İlgili ölçü, ölçü kümesinden çıkarılır yada yeniden ölçülür. Uyuşumsuz ölçü kalmayınca kadar aynı işlemlere devam edilir. Kaba hatalı ölçülerin her iterasyonda ölçü kümesinden ayıklanması ve bir sonraki iterasyon adımında da işleme katılmaması ağır şeklini belirlemeye yetecek yeterli sayıda ölçünün kalmadığı durumlarda bir şekil bozukluğu (şekil defekt) oluşumuna yol açar. Böyle durumlarda ölçüler yinelenmelidir (Ayan, 1981; Öztürk ve Şerbetçi, 1992; Konak, 1994; Dilaver, 1996; Kara, 1998; Şimşek 1992).

3. Duyarlık Ölçütleri

Duyarlık ölçütleri, jeodezik ağın kalitesini gösterirler. Tüm nokta koordinatlarının bilinmeyen olarak seçildiği serbest ağ dengelenmesi sonucunda hesaplanan duyarlık ölçütleri iç duyarlık ölçütleridir. Bu ölçütlerin tümü, koordinat bilinmeyenlerinin varyans–kovaryans matrisinde depolanmıştır. Bu nedenle, duyarlık ölçütlerinin hesaplanması için koordinat bilinmeyenlerinin varyans–kovaryans matrisinin tümünden ya da bir bölümünden yararlanılır.

3.1 Noktalara Göre Tanımlanan Duyarlık Ölçütleri

Jeodezik ağlar için tanımlanan duyarlık ölçütlerinin büyük bir bölümünü, noktalara göre tanımlanan duyarlık ölçütleri oluşturur. Bunlar, ağ noktalarının gerçek değerlerinin hangi sınırlar içerisinde kalacağını belirlemeye yararlar.

Koordinat bilinmeyenlerinin ortalama hatası: Koordinat bilinmeyenlerinin ortalama hataları, dengeleme sonucunda hesaplanan karesel ortalama hata (m_0^2) ve koordinat bilinmeyenlerinin ters ağırlık matrisi (Q_{xx}) kullanılarak,

$$m_{X_j} = m_0 \sqrt{q_{X_j X_j}} \quad ; \quad m_{Y_j} = m_0 \sqrt{q_{Y_j Y_j}} \quad ; \quad m_{Z_j} = m_0 \sqrt{q_{Z_j Z_j}} \quad (11)$$

eşitliklerinden hesaplanır.

Helmert nokta konum hatası:

$$m_{P_j} = \sqrt{m_{X_j}^2 + m_{Y_j}^2 + m_{Z_j}^2} = m_0 \sqrt{q_{X_j X_j} + q_{Y_j Y_j} + q_{Z_j Z_j}} \quad (12)$$

Werkmeister nokta konum hatası:

$$w_{P_j} = m_{X_j} m_{Y_j} m_{Z_j} \quad (13)$$

eşitliğinden hesaplanır (Öztürk ve Şerbetçi, 1992; Konak, 1994; Güllü, 1998).

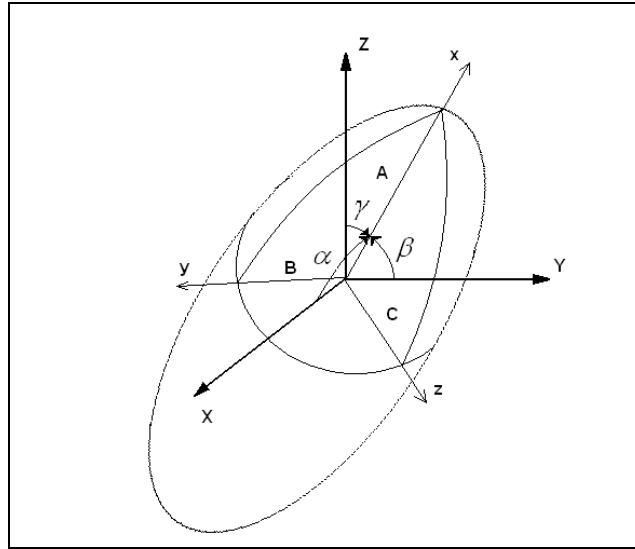
Helmert ortalama hata ve güven elipsoidleri: Bir noktanın konum duyarlığı Helmert elipsoidleri ile tanımlanabilir. Söz konusu elipsoidler, nokta konum hatalarına göre daha çok bilgi taşırlar. Bir noktaya ilişkin ortalama hata elipsoidinin elemanları,

$$\begin{aligned} A_H &= m_0 \sqrt{\lambda_1} && \text{elipsoidin x yönündeki yarı eksen uzunluğu,} \\ B_H &= m_0 \sqrt{\lambda_2} && \text{elipsoidin y yönündeki yarı eksen uzunluğu,} \\ C_H &= m_0 \sqrt{\lambda_3} && \text{elipsoidin z yönündeki yarı eksen uzunluğu,} \end{aligned} \quad (14)$$

$j=A_H, B_H, C_H$ olmak üzere;

$$\begin{aligned} \cos \alpha_j &= \frac{M_j}{W_j} && j \text{ ekseninin x eksenine yönündeki dönüklüğü,} \\ \cos \beta_j &= \frac{N_j}{W_j} && j \text{ ekseninin y eksenine yönündeki dönüklüğü,} \\ \cos \gamma_j &= \frac{T_j}{W_j} && j \text{ ekseninin z eksenine yönündeki dönüklüğü,} \end{aligned} \quad (15)$$

eşitlikleri ile hesaplanır (Şekil 1).



Şekil 1. Hata elipsoidinin elemanları

Burada ara değerler aşağıdaki formüllerden hesaplanır.

$$\cos 3\varphi = \frac{-q}{2\sqrt{-\left(\frac{p}{3}\right)^3}} \quad (16)$$

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= 2\sqrt{-(p/3)} \cos \varphi - (a/3) \\ \lambda_2 &= 2\sqrt{-(p/3)} \cos(\varphi + 2\pi/3) - (a/3) \\ \lambda_3 &= 2\sqrt{-(p/3)} \cos(\varphi + 4\pi/3) - (a/3) \\ p &= b - (a^2/3) \\ q &= c - (ab/3) + (2a^3/27) \\ a &= -(q_{xx} + q_{yy} + q_{zz}) \\ b &= q_{xx}q_{yy} + q_{xx}q_{zz} + q_{yy}q_{zz} - q_{xy}^2 - q_{xz}^2 - q_{yz}^2 \\ c &= q_{xx}q_{yz}^2 + q_{yy}q_{xz}^2 + q_{zz}q_{xy}^2 - q_{xx}q_{yy}q_{zz} - 2q_{xy}q_{xz}q_{yz} \\ M_j &= q_{xz}(q_{yy} - \lambda_j) - q_{xy}q_{yz} \\ N_j &= (q_{xx} - \lambda_j)q_{yz} - q_{xy}q_{xz} \\ T_j &= q_{xy}^2(q_{xx} - \lambda_j) - (q_{yy} - \lambda_j) \\ W_j^2 &= M_j^2 + N_j^2 + T_j^2\end{aligned}$$

Hata elipsoidleri herhangi bir S istatistik güvenle de hesaplanabilir. α yanılma olasılığı; 3, payın ve f, paydanın serbestlik dereceleri olmak üzere F-tablo değeri ($F_{3, f, 1-\alpha}$) ile c çarpanı

$$c = \sqrt{3F_{3, f, 1-\alpha}} \quad (17)$$

biçiminde hesaplanır. Farklı serbestlik dereceleri ve S istatistik güvene bağlı olarak hesaplanan F-tablo değerleri ve hata elipsoidlerinin c çarpanları Tablo 1’de verilmiştir.

Tablo 1. Farklı serbestlik dereceleri ve istatistik güvene bağlı olarak hesaplanan F-tablo değerleri ve hata elipsoidlerinin c çarpanları

Serbestlik Dereceleri	F-Tablo (S = 90%)	c	F-Tablo (S = 95%)	c	F-Tablo (S = 99%)	c
1	53,593	12,680	215,710	25,439	5403,40	127,320
2	9,162	5,243	19,164	7,582	99,166	17,248
3	5,391	4,022	9,277	5,275	29,457	9,401
4	4,191	3,546	6,591	4,447	16,694	7,077
5	3,620	3,295	5,410	4,028	12,060	6,015
10	2,728	2,861	3,708	3,335	6,552	4,434
15	2,490	2,733	3,287	3,140	5,417	4,031
20	2,380	2,672	3,098	3,049	4,938	3,849
30	2,276	2,613	2,922	2,961	4,510	3,678
60	2,177	2,556	2,758	2,877	4,126	3,518
∞	2,084	2,500	2,605	2,796	3,782	3,368

Serbestlik derecesi ve istatistik güvene göre Tablo 1’den alınacak c çarpanı ile güven elipsoidinin yarı eksenleri

$$\begin{aligned}A_{H\%} &= A_G = cA_H = m_0 \sqrt{\lambda_1 3F_{3, f, 1-\alpha}} \\ B_{H\%} &= B_G = cB_H = m_0 \sqrt{\lambda_2 3F_{3, f, 1-\alpha}}\end{aligned} \quad (18)$$

$$C_{H\%} = C_G = cC_H = m_0 \sqrt{\lambda_3 3F_{3,f,1-\alpha}}$$

eşitliklerinden de hesaplanabilir. Burada $A_{H\%}$, $B_{H\%}$, $C_{H\%}$ seçilen istatistik güvene bağlı olarak hesaplanan hata elipsoidi yarı eksenleridir. Tablo 1’de görüldüğü gibi istatistik güven $S = 1-\alpha = \%95$ seçilirse fazla ölçü sayısının $f = \infty$ olduğu durumda F-tablo değeri $F_{3,\infty,0.95} = 2,605$ olarak alınarak c çarpanı

$$c = \sqrt{3F_{3,\infty,0.95}} = 2.796 \quad (19)$$

hesaplanır ve 3 boyutlu GPS ağlarında güven ve hata elipsoidleri arasındaki ilişki

$$\begin{aligned} A_{H\%95} &= A_G \cong 2.8 A_H \\ B_{H\%95} &= B_G \cong 2.8 B_H \\ C_{H\%95} &= C_G \cong 2.8 C_H \end{aligned} \quad (20)$$

eşitlikleri ile ifade edilebilir. \tilde{x} , bilinmeyenlerin gerçek değerleri olmak üzere güven elipsoidlerinin olasılık bağıntısı,

$$P\left\{\left(\tilde{x}-x\right)^T Q_{ii}^{-1}\left(\tilde{x}-x\right) \leq 3m_0^2 F_{3,f,1-\alpha}\right\} = 1-\alpha \quad (21)$$

ve hata elipsoidlerinin olasılık bağıntısı,

$$P\left\{\left(\tilde{x}-x\right)^T Q_{ii}^{-1}\left(\tilde{x}-x\right) \leq m_0^2\right\} = 1-\alpha \quad (22)$$

karşılaştırılırsa, hata elipsoidlerinde F-tablo değerinin,

$$3F_{3,f,1-\alpha} = 1 \quad , \quad F_{3,f,1-\alpha} = 0, \bar{3} \quad (23)$$

gibi bir sabit sayı olduğu ortaya çıkar. Serbestlik derecesine bağlı olarak hata elipsoidinin istatistik güven değerleri Tablo 2’de verilmiştir (Niemeier, 1985; Wolf ve Ghilani, 1997; Öztürk ve Şerbetçi, 1992).

Tablo 2. Farklı serbestlik derecelerinde hata elipsoidinin istatistik güveni

Serbestlik Derecesi	Hata Elipsoidinin İstatistik Güveni
1	0,182
2	0,192
5	0,197
10	0,198
∞	0,199

Tablo 2 incelendiğinde, bir noktanın geometrik yeri olarak düşünülen hata elipsoidi içine düşme olasılığının %18-%20 arasında değiştiği görülür. Bir noktanın güven elipsoidi için düşme olasılığı ise istatistik güven S %90, %95 ya da %99 olarak serbestçe seçilebilmektedir (Wolf, 1975; Öztürk ve Şerbetçi, 1992).

3.2 Lokal Duyarlık Ölçütleri

Noktaların birbirlerine göre konum duyarlıkları lokal duyarlık ölçütleri ile hesaplanır.

Bağlı hata elipsoidleri : Herhangi iki ağ noktasının birbirlerine göre konumları koordinatların farklarının bir fonksiyonu olarak düşünüldüğünde, bağlı hata kavramından söz edilir. Hesaplanan bağlı hata elipsoidlerinin geometrik yeri, iki noktayı birleştiren doğrunun orta noktası olarak düşünülür. i ve k noktalarının koordinat farklarından oluşan d vektörü ve ters ağırlık matrisi

$$d = \begin{bmatrix} -I & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \\ x_k \\ y_k \\ z_k \end{bmatrix} = FX \quad (24)$$

$$Q_{dd} = FQ_{xx}F^T \quad (25)$$

biçiminde oluşturulur. eşitliğinden hesaplanır. Bağlı hata ve güven elipsoidinin yarı eksenleri ve dönüklükleri de (14, 15 ve 16) eşitliklerinde verilen temel bağıntılara göre Q_{dd} matrisinden hesaplanır (Wolf, 1975; Atasoy, 1987; Konak, 1994; Kurt, 1996).

3.3 Global Duyarlık Ölçütleri

Ağın tamamının kalitesi için tanımlanan global duyarlık ölçütleri, koordinat bilinmeyenlerinin varyans-kovaryans matrisinin tümünden yararlanarak hesaplanırlar (Öztürk ve Şerbetçi, 1992).

Hacim ölçütü : Güven hiperelipsoidlerinin hacimlerine ilişkin,

$$\det(K_{xx}) = m_0^2 \lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_{3p} = m_0^2 \prod_{i=1}^{3p} \lambda_i \quad (26)$$

determinant değerlerinin her biri ağın tümü için geçerli duyarlık ölçütü olarak ele alınabilir. Ağın bir noktasına ilişkin güven hiperelipsoidinin hacim ölçütü Werkmeister nokta hatasına denk düşer.

Varyans ölçütü : Varyans ölçütü kuramsal ve deneysel varyans-kovaryans matrislerinin ana köşegen elemanlarının toplamı olarak ele alınır (Öztürk, 1987; Konak, 1994).

$$\text{iz}(K_{xx}) = m_0^2 \text{iz}(Q_{xx}) = m_0^2 (\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_{3p}) = m_0^2 \sum_{i=1}^{3p} \lambda_i \quad (27)$$

Ortalama konum duyarlığı:

$$m_p = \sqrt{\frac{\text{iz}(K_{xx})}{3p}} = m_0 \sqrt{\frac{\text{iz}(Q_{xx})}{3p}} \quad (28)$$

eşitliği ile hesaplanır. (28) eşitliğindeki Q_{xx} matrisi serbest ağ dengelemesi sonucunda bulunuyorsa m_p ağın iç konum hatası olarak değerlendirilmektedir (Öztürk, 1982).

4. Güven Ölçütleri

Dengeleme sonuçlarına ve onların duyarlıklarına ilişkin yorumlar, matematik modelin gerçeği yansıtması durumunda doğrudur. Dengeleme modelinin geçerli olup olmadığı yada ölçülerin değerlendirilmesi aşamasında model hataları oluşup oluşmadığı güven ölçütleriyle denetlenir. Güven ölçütleri, jeodezik ağın geometrik yapısının model hatalarını ortaya çıkarma gücünü, başka bir deyişle güven ölçütleri, ağın ölçülerdeki kaba hataları ortaya çıkarabilme kabiliyetini gösterir.

Kaba hatalı ölçüleri ayırma gücü olan iç güvenilirlik ve ortaya çıkarılmayan model hatalarının dengeleme sonuçlarına olan etkilerini gösteren dış güvenilirliğin belirlenmesi gerekir (Paper and Niemeier, 1983; Dilaver, 1996). İç güvenilirlik ve dış güvenilirlik arasında güçlü bir ilişki vardır. İyi bir iç güvenilirlik iyi bir dış güvenilirliğin var olduğunun göstergesidir. Ayrıca bir jeodezik ağ küçük kaba hataları teşhis edebildiği zaman o ağın güvenilirliğinin yüksek olduğu kabul edilir (Baarda, 1968).

4.1 İç Güven Ölçütü

İç güven ölçütü, hata sınırına yakın kaba hatalı ölçüleri ayırma gücüdür. Diğer bir deyişle, bir ölçüdeki hatanın açığa çıkarılabilmesi için en az ne büyüklükte bir değere ulaşması gerektiğini gösteren ölçüttür. Bir ağda oluşabilecek model hatalarının denetlenmesi amacıyla, herhangi bir ölçüde yapılacak hatanın yüzde kaçının bu ölçünün düzeltilmesine yansıtacağı her ölçü için

$$r_j = (Q_{vv})_j P_j \quad (29)$$

eşitliğinden hesaplanan kısmi redundanz payı ile belirlenir. İyi planlanmış bir ağın ortalama serbestlik derecesinin $r_0 = 1 - \frac{u}{n} > 0.5$ (n , ölçü sayısı; u , bilinmeyen sayısı) olması istenir. Her ölçünün kısmi redundanzının da $r_i > 0.5$ ya da zorunlu hallerde $r_i > 0.3$ olması gerekir. $r_i \ll r_0$ olan ölçülerin güvenilirliğini artırmak için bu ölçülere dik yönde yeni ölçüler planlanmalıdır. Maliyet dikkate alındığında $r_i \gg r_0$ olan ölçüler, ölçü planından çıkarılmalıdır.

Bir ölçüdeki kaba hatanın düzeltmeler üzerindeki etkilerini belirlemek için kullanılan bir sınır değer olan iç güven ölçütü, α_0 , yanlış olma olasılığı; β_0 , testin gücü; $w_0 = f(\alpha_0, \beta_0, r, \infty)$ dış merkezlik parametresinin sınır değeri olmak üzere

$$|\Delta_{0j}| = m_0 \sqrt{\frac{w_0}{P_j r_j}} \quad (30)$$

eşitliğinden hesaplanır. Bu ölçüt, bir ağda yapılan ölçülerden herhangi birinin diğer ölçüler yardımıyla denetlenebilirliğinin bir ölçütüdür. İyi planlanmış bir ağda iç güven ölçütü değerlerinin mümkün olduğu kadar küçük değerler alması ve $\Delta_{0i} \cong (6 \text{ ya da } 8) m_i$ sınır değerlerinin altında kalması gerekir.

4.2 Dış Güven Ölçütü

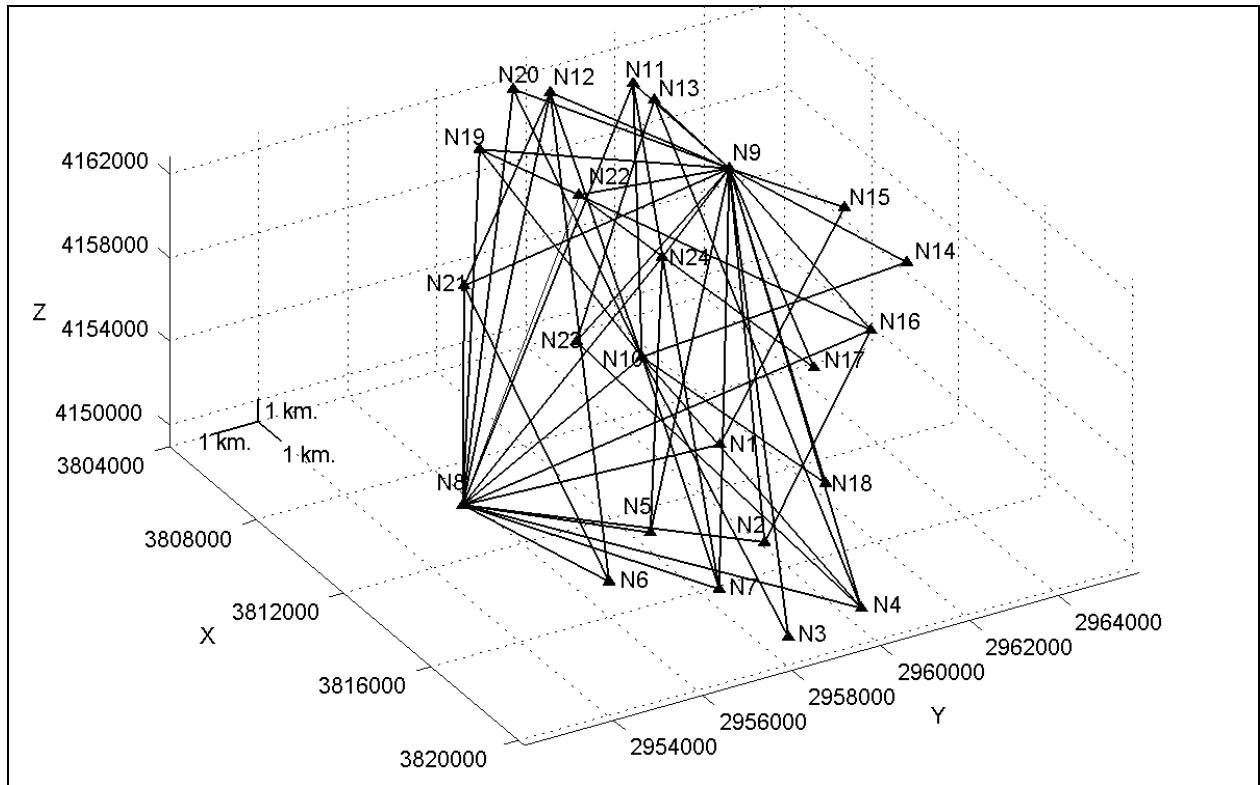
Dış güven ölçütü, ortaya çıkarılmayan bir model hatasının koordinat bilinmeyenlerine yada bunların fonksiyonlarına etkiye katsayısıdır. Ortaya çıkarılmayan bir model hatasının koordinat bilinmeyenlerine etkisi, bunun dengeli ölçülere etkisinden çok daha önemlidir. Dış güven ölçütü,

$$\delta_{0i}^2 = \frac{1 - r_i}{r_i} w_0 \quad (31)$$

eşitliğinden hesaplanır. İyi planlanmış ve dengelemenin matematik modeli doğru kurulmuş bir ağda, hataların koordinatlara etkiye katsayılarının mümkün olduğu kadar küçük değerler alması ve $\delta_{0i} \cong 6$ ya da 10 sınır değerinin altında kalması gerekir (Öztürk ve Şerbetçi, 1992; Konak, 1994; Kurt, 1996; Ayan, 1981; Dilaver, 1996).

5. Uygulama

Bu çalışmada, Ordu ilinde sıklaştırma ağı olarak tesis edilmiş 24 noktadan ve 55 baz vektöründen oluşan bir jeodezik GPS ağı uygulama ağı olarak kullanılmıştır (Şekil 2).



Şekil 2. Uygulama GPS ağı

Ağ, serbest dengeleme yöntemiyle dengelenmiş ve model hipotezi testi ile uyumsuz ölçüler testi yapılmıştır. (9) eşitliğinden test büyüklüğü değerleri hesaplanmış ve bu değerler (10) eşitliğindeki gibi t-tablo değeriyle karşılaştırılarak N22-N8 bazı uyumsuz bulunmuştur (Tablo 3).

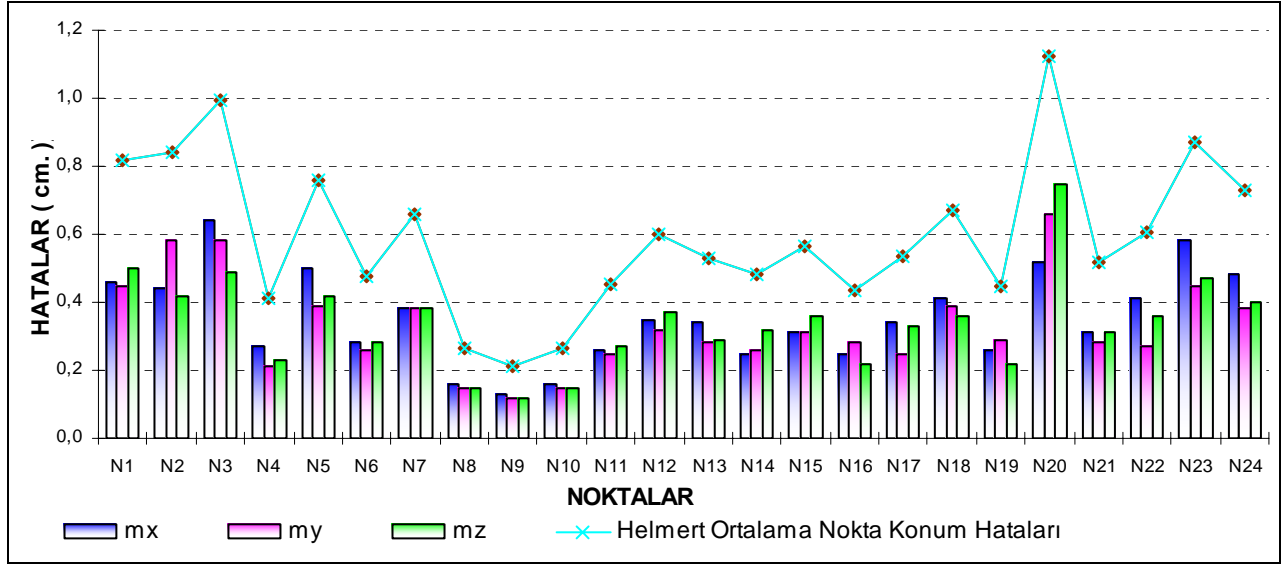
Tablo 3. Uygulama ağı baz vektörleri bileşenlerinin test büyüklüğü ve t-tablo değeri

Bazlar	Test Büyüklüğü			t-Tablo Değeri	Bazlar	Test Büyüklüğü			t-Tablo Değeri
	$T_{\Delta X_i}$	$T_{\Delta Y_i}$	$T_{\Delta Z_i}$			$T_{\Delta X_i}$	$T_{\Delta Y_i}$	$T_{\Delta Z_i}$	
N8 – N1	0,344	0,857	0,562	2,262	N15 – N9	0,340	0,845	0,551	2,262
N8 – N2	2,199	0,549	0,809	2,262	N16 – N2	1,319	0,327	2,238	2,262
N8 – N4	2,068	0,429	1,462	2,262	N16 – N8	1,185	0,341	0,352	2,262
N8 – N5	0,160	0,977	0,779	2,262	N16 – N9	0,751	0,209	0,269	2,262
N8 – N6	0,962	0,757	0,542	2,262	N17 – N9	0,434	0,987	0,530	2,262
N8 – N7	0,975	1,974	1,436	2,262	N18 – N9	0,549	0,460	0,870	2,262
N9 – N2	0,651	0,585	1,388	2,262	N18 – N10	0,538	0,450	0,871	2,262
N9 – N3	0,116	0,095	1,334	2,262	N19 – N8	1,227	0,485	1,271	2,262
N9 – N4	1,084	0,624	1,291	2,262	N19 – N9	0,549	0,897	0,571	2,262
N9 – N5	0,121	1,310	0,806	2,262	N19 – N10	0,268	0,595	1,022	2,262
N9 – N7	0,857	0,497	1,431	2,262	N19 – N16	0,621	0,772	1,374	2,262
N10 – N8	0,861	0,587	0,152	2,262	N20 – N8	1,614	1,377	0,876	2,262
N10 – N3	0,115	0,095	1,334	2,262	N20 – N9	0,042	0,092	0,592	2,262
N10 – N4	0,835	1,347	0,529	2,262	N20 – N10	1,435	1,325	0,239	2,262
N10 – N7	2,117	1,795	0,559	2,262	N21 – N6	0,132	1,086	0,885	2,262
N11 – N7	0,473	0,379	0,526	2,262	N21 – N8	1,432	0,451	0,652	2,262
N11 – N8	0,247	0,045	0,596	2,262	N21 – N9	1,079	1,224	0,541	2,262
N11 – N9	0,034	0,359	1,208	2,262	N21 – N12	0,160	0,440	0,294	2,262
N11 – N10	0,254	0,158	0,700	2,262	N22 – N8	2,295	1,382	0,016	2,262
N12 – N6	1,895	0,462	0,516	2,262	N22 – N9	1,316	1,867	0,457	2,262
N12 – N8	1,047	0,091	0,476	2,262	N22 – N17	0,434	0,987	0,530	2,262
N12 – N9	0,762	0,744	0,365	2,262	N23 – N4	0,013	1,045	1,859	2,262
N12 – N10	1,443	0,773	0,591	2,262	N23 – N9	0,016	0,252	0,582	2,262
N13 – N4	0,337	0,009	0,636	2,262	N23 – N13	0,028	0,771	1,172	2,262
N13 – N9	0,237	0,573	0,398	2,262	N24 – N5	0,278	0,404	0,080	2,262
N14 – N9	0,975	1,149	0,060	2,262	N24 – N8	0,190	0,934	0,338	2,262
N14 – N10	0,978	1,162	0,052	2,262	N24 – N9	0,090	0,823	0,389	2,262
N15 – N1	0,344	0,857	0,562	2,262					

Uyuşumsuz N22-N8 bazı ölçü kümesinden çıkarıldıktan sonra, ağın serbest dengelenmesi tekrar yapılmış ve başka uyuşumsuz ölçü belirlenmemiştir.

- **Ağın Duyarlık Ölçütleriyle Analizi**

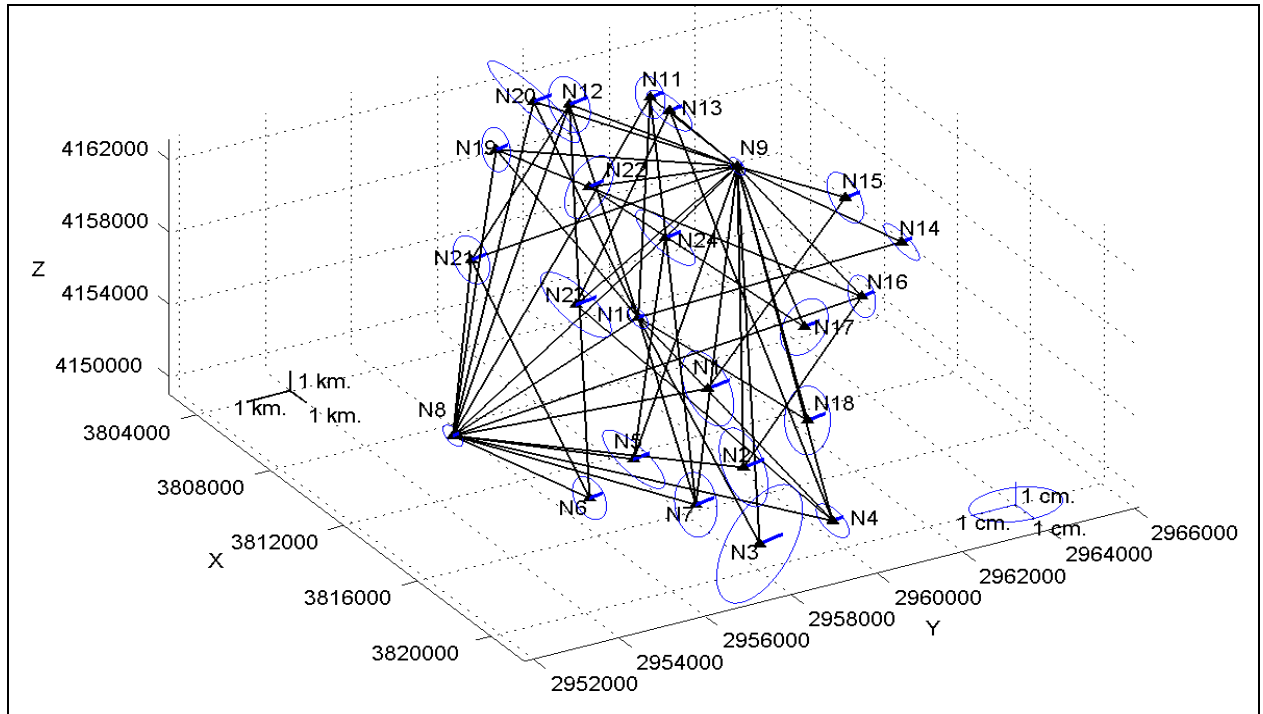
Uygulama ağının duyarlık analizinde, noktalara göre tanımlanan duyarlık ölçütlerinden koordinat bilinmeyenlerinin ortalama hataları (11) eşitliği ile Helmert nokta konum hataları (12) eşitliği ile hesaplanarak Şekil 3 de verilmiştir.



Şekil 3. Koordinat bilinmeyenlerinin ortalama hataları ve Helmert ortalama nokta konum hataları

Şekil 3' incelendiğinde koordinat bilinmeyenlerinin ortalama hataları 0.75cm. ile 0.12cm. arasında, Helmert nokta konum hatalarının da 1.13cm ve 0.21cm. arasında değer aldığı görülür. Şekilde, noktaların duyarlılıklarının birbirlerine göre farklılık gösterdikleri, diğer bir deyişle ortalama hataların birbirine yakın değerler almadıkları görülmektedir.

Noktalara göre tanımlanan duyarlık ölçütlerinden daha geniş açıklama potansiyeline sahip, nokta duyarlılıklarının yön bağımlılıklarını da gösteren ağa ilişkin Helmert nokta hata elipsoidlerinin elemanları (14, 15 ve 16) eşitlikleri ile hesaplanmıştır (Şekil 4).



Şekil 4. Uygulama ağı Helmert nokta hata elipsoidleri

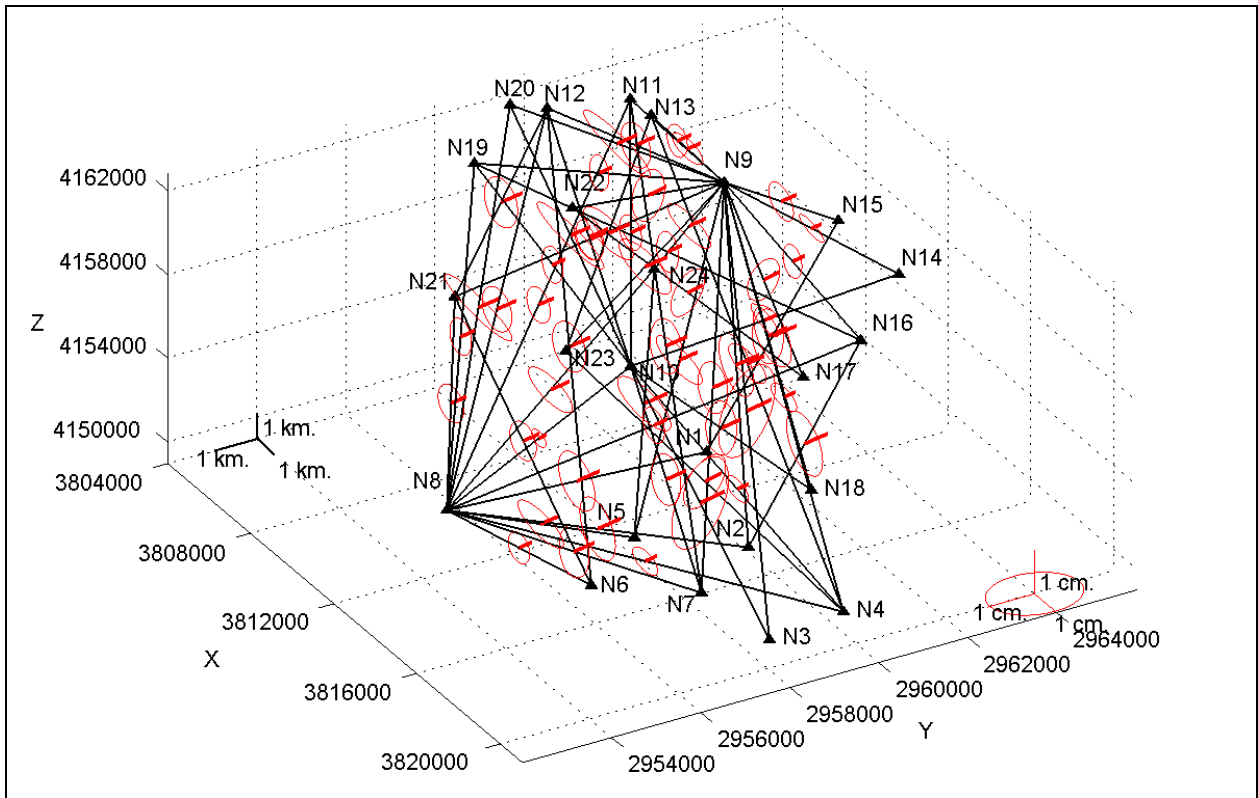
Şekil 4’de görüldüğü gibi ağ homojen yapıda değildir. Hata elipsoidlerinin, ölçülerin fazla yapıldığı N8, N9 ve N10 noktalarında küçük, ağın dış kısımlarında bulunan ve az ölçü yapılan N3 ve N20 noktalarında ise büyük olduğu görülebilir. N3 ve N20 noktalarının hata elipsoidlerinin yarı eksenleri Tablo 4’de verilmiştir.

Tablo 4. N3 ve N20 noktalarına ait Helmert nokta hata elipsoidleri yarı eksenleri

NN.	A _H (cm)	B _H (cm)	C _H (cm)
N3	0,69	1,24	0,92
N20	1,09	0,49	0,71

Tablo 4’de görüldüğü gibi, N3 noktasının Y eksen ve N20 noktasının X eksen doğrultusundaki hata elipsoidi yarı eksenleri büyük, diğer bir deyişle bu doğrultudaki konum duyarlılıkları zayıftır. N3’ün Y eksen doğrultusundaki duyarlılığını arttırmak amacıyla yine bu doğrultuda, konum duyarlılığı yüksek olan noktalardan, örneğin N16 ve N4’ den bu noktaya yeni bazlar planlanmalıdır. N20’nin X eksen doğrultusundaki duyarlılığını arttırmak amacıyla yine bu doğrultuda konum duyarlılığı yüksek olan noktalardan örneğin, N14 ve N16’ dan bu noktaya yeni bazlar planlanmalıdır.

Uygulama ağının bağıl hata elipsoidleri yarı eksenleri ve dönüklükleri (25, 14, 15 ve 16) eşitlikleri ile hesaplanmıştır (Şekil 5).

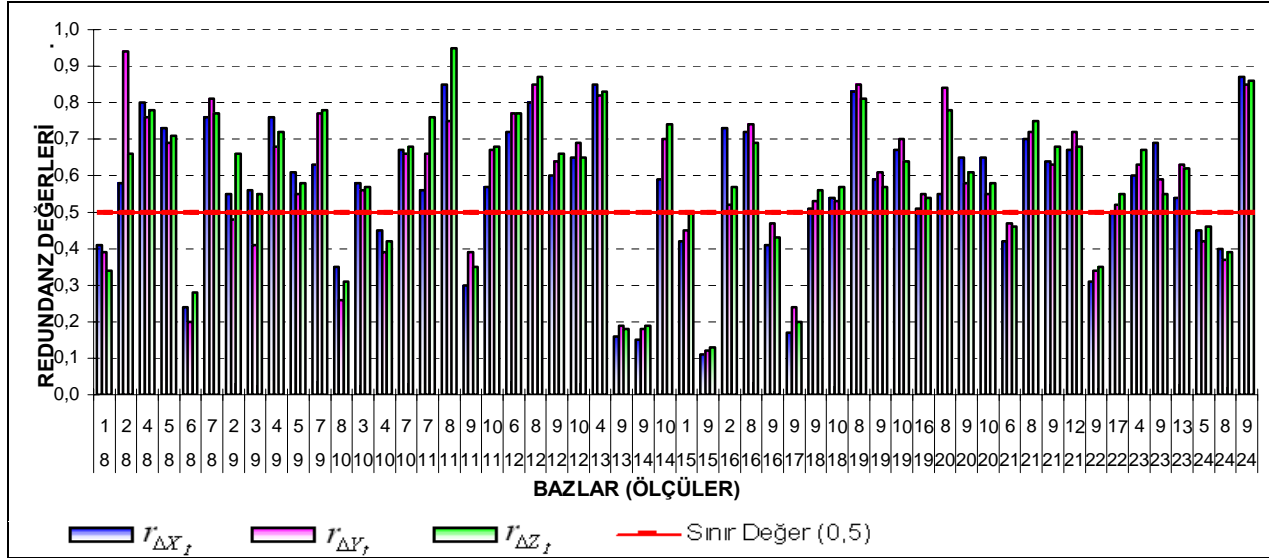


Şekil 5. Uygulama ağı Helmert bağıl hata elipsoidleri

Şekil 5’de görüldüğü gibi N9-N3 ve N10-N3’e göre hesaplanan bağıl hata elipsoidlerinin Y eksen ve N20-N8, N20-N9 ve N20-N10 noktaları arasında hesaplanan bağıl hata elipsoidlerinin X eksen doğrultusundaki yarı eksenlerinin büyük olduğu belirlenmiştir. Bazı noktalara sadece iki baz ölçüsü yapılmış iken bazı noktalarda 10’u aşan bazın ölçülmüş olması ağın duyarlık yönünden homojen yapıda olmamasına neden olmuştur.

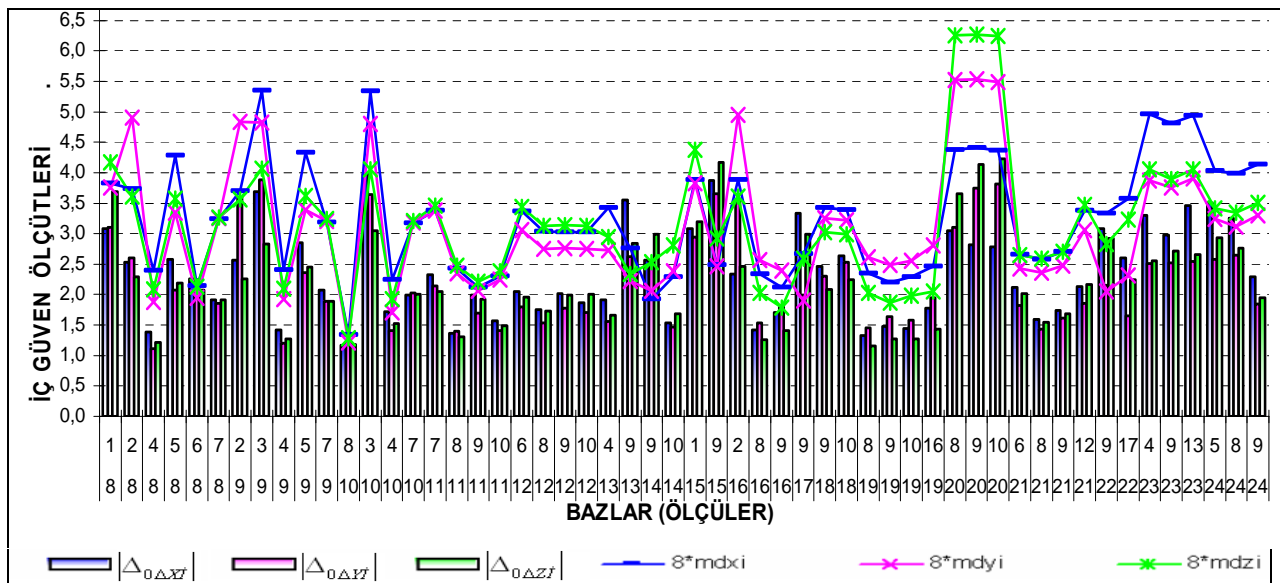
- Ağın Güven Ölçütleriyle Analizi

Ağdaki tüm bazların redundanz değerleri (29) eşitliği ile hesaplanmış ve grafik olarak verilmiştir (Şekil 6).



Şekil 6. Uygulama ağı baz vektörleri bileşenlerinin redundanz değerleri

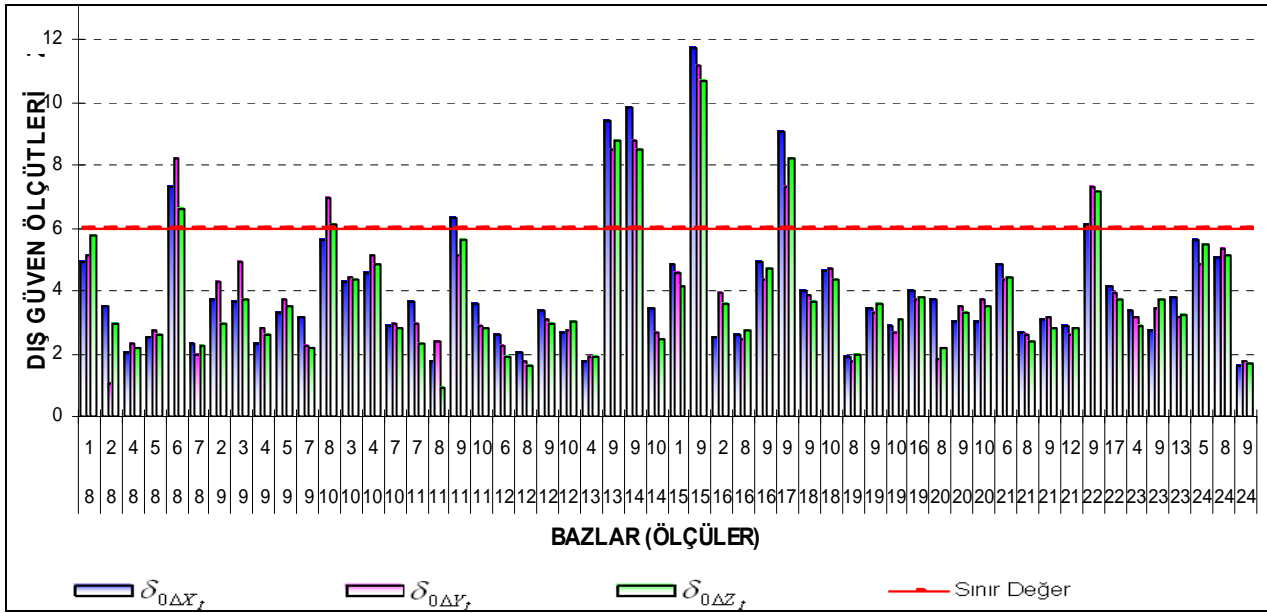
Şekil 6 incelendiğinde, 15 adet bazın redundanz değerlerinin 0,5 değerinin altında kaldığı, bu 15 bazdan 5'inin (8-6, 13-9, 14-9, 15-9, 17-9) redundanz değerlerinin zorunlu durumlarda dikkate alınması gereken 0,3 sınır değerinin altında kaldığı görülür. Bu bazlara dik yönde yeni bazlar planlanarak güvenilirlikleri artırılmalıdır. Ağın ortalama serbestlik derecesi $r_0 = 0,57$ olarak hesaplanmıştır. Şekil incelendiğinde, 7 bazın redundanz değerlerinin, ağın ortalama redundanz değerinden çok büyük olduğu görülmektedir. Başka bir deyişle, bu bazların diğer ölçülerce denetlenebilirliği fazladır. Arzu edilen kısmi redundanz değerlerinin, ortalama serbestlik derecesine yakın olması olduğundan, $r_i \gg r_0$ olan bu 7 bazın ağdan çıkarılması uygun olacaktır. Uygulama ağının iç güven ölçütleri, (30) eşitliği ile hesaplanarak Şekil 7'de verilmiştir.



Şekil 7. Uygulama ağı iç güven ölçütleri

Şekil 7’de görüldüğü gibi, redundanz değerleri 0.3’ün altında kalan 5 ölçü (8-6, 13-9, 14-9, 15-9, 17-9) iç güven ölçütü sınır değerlerinin de altında kalmışlardır. Bu ölçülerin kaba hataları ortaya çıkarabilme gücü azdır. Bu nedenle bu ölçülere dik yönde yeni bazlar ölçülmelidir. Böylece ölçülerin fazla ölçü sayısındaki payları ve iç güvenilirlikleri artırılabilir.

Ağın dış güven ölçütleri (31) eşitliği ile hesaplanmış ve 6 sınır değeri ile birlikte Şekil 8 de verilmiştir. Redundanz değerleri 0.3 sınır değerinin ve iç güven ölçütü değerleri $8m_{\Delta i}$ sınır değerlerinin altında kalan 5 bazın (8-6, 13-9, 14-9, 15-9, 17-9) dış güven ölçütü değerleri 6 sınır değerini aşmıştır. Bu ölçülerle birlikte ayrıca 10-8, 11-9, 22-9 bazlarının da dış güven ölçütü değerlerinin sınır değeri aştığı Şekil 8 de görülmektedir. Bu bazlarda belirlenemeyen kaba ve sistematik hatalar, koordinat bilinmeyenlerine dış güven ölçütü ile belirlenen katsayılar oranında yansiyacaktır.



Şekil 8. Uygulama ağı dış güven ölçütleri

6. Sonuç ve Öneriler

Jeodezik ağların, kuruluş amaçlarına uygun olup olmadıkları, duyarlık ve güven ölçütleriyle saptanabilir. Bu bağlamda, ağ önce ölçülerin kendi aralarındaki tutarlılığını ve noktaların konum duyarlılığını en iyi şekilde yansıtan serbest ağ dengelemesi yöntemiyle dengelenerek, uyuşumsuz ölçüler saptanmalı ve bu ölçüler yinelenmeli ya da ağdan çıkarılmalıdır. Duyarlık ve güven ölçütleri, uyumlu ölçülerle yapılan serbest ağ dengelemesi sonuçlarından hesaplanmalıdır.

Bu çalışmada, uygulama ağının duyarlık analizi için, nokta koordinatlarının ortalama hataları ve Helmert nokta konum hataları hesaplanmış ve noktaların duyarlıklarının birbirlerine göre farklılık gösterdikleri, diğer bir deyişle ortalama hataların birbirine yakın değerler almadıkları görülmüştür. Ayrıca, duyarlık analizi için noktaların konum duyarlıklarının ve iki nokta arası komşuluk duyarlıklarının analizi, hata elipsoidlerinin çizdirilmesiyle yapılmış ve nokta hata elipsoidleri ve bağıl hata elipsoidlerinin, ölçülerin fazla yapıldığı noktalarda küçük, ağın dış kısımlarında bulunan ve az ölçü yapılan noktalarda ise büyük olduğu yani ağın homojen ve izotrop yapıda olmadığı görülmüştür. Ağın duyarlılığını artırmak için, duyarlığı düşük olan noktaların hata elipsoidlerine bakılarak yeni bazların planlanması gerekir.

Uygulama ağının güven analizi için bazların kısmi redundanz payları ile iç ve dış güven ölçütleri hesaplanmıştır. Ağın, ortalama serbestlik derecesinin 0.5 den büyük olmasına rağmen bir çok ölçünün redundanz değerlerinin sınır değerinin altında kaldığı bir kısım ölçünün de ortalama serbestlik derecesinden çok büyük olduğu görülmüştür. Ağda redundanz değerleri çok küçük olan bazların, iç ve dış güven ölçütlerinin de sınır değerlerini aştıkları saptanmıştır. Bu ölçülere dik yönde yeni ölçüler planlanarak güvenilirliklerinin artırılması gerekir. Ayrıca ağın maliyeti de göz önüne alınarak güvenilirlikleri çok fazla olan ölçüler ağdan çıkarılmalıdır.

Sonuç olarak,

- GPS ağlarında, nokta konum duyarlıklarının yüksek ve tüm ağın homojen yapıda olması için oturumların uyduların ufka dağılımının iyi olduğu zaman aralıklarında ve eşit oturum süreleri ile yapılması yanında, bazların ağ noktalarına homojen dağılımlarının sağlanması gerekir.
- Ağ kapalı luplardan oluşmalıdır. Kapalı ağ ölçmelerinde her sonraki oturum en az daha önceden gözlem yapılan bir noktayı içermelidir.
- Ağda konum duyarlılığı kötü olan noktaların zayıf yönleri bu noktalara ait hata elipsoidlerinin büyük eksenleri doğrultularındadır. Nokta konum duyarlıklarında iyileştirme işlemleri bu eksenler dikkate alınarak yapılmalıdır.
- Baz hatalarının nokta konum hatalarına etkisini azaltmak ve güvenilirliği artırmak için bazların birbirine dik planlanması diğer bir deyişle küçük açılarla kestirilmemeleri gerekir.

Kaynaklar

Atasoy, V., (1987) Üç Boyutlu Ağlarda Güven Elipsoidleri, *Harita Dergisi*, 99, 22 – 29.

Ayan, T., (1981) Jeodezik Ağların Optimizasyonu, *Doçentlik Tezi*, İ.T.Ü. İnşaat Fakültesi, İstanbul.

Baarda, W., (1968) A Testing Procedure for Use in Geodetic Network, *Netherlands Geodetic Commission*, 2, 5, 5-59.

Dilaver, A., (1996) *Jeodezik Ağlarda Kaba Hatalı Ölçülerin Ayıklanması ve Güven Ölçütleri*, K.T.Ü. M.M.F. Jeodezi ve Fotogrametri Mühendisliği Bölümü Araştırma Raporları, Fakülte yayın No:2, Trabzon.

Güllü, M., (1998) GPS ve Yersel Gözlemlerin Birlikte Dengelenmesi, *Doktora Tezi*, Selçuk Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Konya.

Öztürk, E., ve Şerbetçi, M., (1992) *Dengeleme Hesabı, Cilt III*, K.T.Ü. Basımevi, 144., Trabzon.

Öztürk, E., (1982) Jeodezik Ağlarda Güven Ölçütleri ve Ölçme Planının Enuygunlaştırılması, K.T.Ü. Yayınları, Trabzon.

Öztürk, E., (1987) Jeodezik Ağlarda Duyarlık ve Güven Ölçütleri, *Türkiye 1. Harita ve Teknik Kurultayı, Bildiriler Kitabı*, 641-699, Ankara.

Kara, H. H., (1998) Ölçülerin İteratif Çözüm Yöntemleri İle Belirlenmesinde Geleneksel En Küçük Kareler Yöntemi İle Değişik Roboust Kestrim Yöntemlerinin Uygulanması ve Karşılaştırılması, *Yüksek Lisans Tezi*, K.T.Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü, Trabzon.

Koch, K. R., (1980) *Parameterschatzung und Hypothesentests in linearen Modellen*, Bonn.

- Konak, H., (1994) Yüzey Ağlarının Optimizasyonu, *Doktora Tezi*, K.T.Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü, Trabzon.
- Konak, H., (1996) Yer Merkezli Üç Boyutlu Jeodezik Ağlarda Datum Sorunu, *Harita Dergisi*, 116.
- Kurt, O., (1996) GPS Ölçülerinin Değerlendirildiği Yermerkezli Üç Boyutlu Jeodezik Ağlarda Duyarlık ve Güven Optimizasyonu, *Yüksek Lisans Tezi*, K.T.Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü, Trabzon
- Niemeier, W., (1985) Deformationsanalyse. *Geodatische Netze in Landes-und Ingenieurvermessung II*, 559-623.
- Paper, R., Niemeier, W., (1983) *Some Aspects of the Theory of Errors in Levelling Networks*, The Workshop on Precise Leveling, March 1983, Precise Leveling, 295-314.
- Ruff, B., (1983) Berechnung der Pseudoinversen mit modifiziertem Gaus-Jordan Austauschverfahren unter Ausnutzung der Symmetrieeigenschaften der Normalgleichungsmatrizen, *ZfV*, 6, 216-220.
- Şimşek, M., (1992) Jeodezik Ağlarda Uyuşumsuz Ölçülerin Belirlenmesi, *Harita Dergisi*, 108, 18-33.
- Wolf, H., (1975) *Ausgleichsrechnung Formeln Zur Praktischen Anwendung*, Dümmlerbuch 7835, Dümler Verlag, Bonn.
- Wolf, P. R. and Ghilani, C. D., (1997) *Adjustment Computation, Statistics and Least Squares in Surveying and GIS*, John Wiley and Sons, Inc.367-368.