

YEREL JEODİD YÜZEYİNİN BELİRLENMESİNDE KULLANILAN ENTERPOLASYON YÖNTEMLERİ

Kamil TEKE, Mualla YALÇINKAYA

Karadeniz Teknik Üniveristesi, Jeodezi ve Fotogrametri Müh. Bölümü, 61080, Trabzon

ÖZET

Yersel Konum Belirleme Sistemi (GPS) ile jeodezik kontrol noktalarına ait elipsoid yükseklikleri yüksek duyarlılıkta belirlenebilmektedir. Pratik jeodezide kullanılan yükseklikler ise jeoid yüzeyinden başlayıp kontrol noktasına kadar çekül eğrisi boyunca olan ortometrik yükseklikler olarak tanımlanır. Jeoid analitik yüzeyi yerel çalışma alanlarında ikinci veya üçüncü derece yüzey fonksiyonları ile yeterli duyarlılıkta temsil edilebilmektedir.

Bu çalışmada, ortogonal ve ortogonal olmayan polinomlarla, en uygun yerel jeoidin belirlenmesi amaçlanmıştır. Yerel jeoid yüzeyi, kuadratik, kübik, bi-kuadratik, bi-kübik yüzey polinomları ve multi-kuadratik enterpolasyon yöntemi ile belirlenmiştir. Jeoid ondülasyonlarının, GPS ile belirlenen değerlerinden sapmaları irdelenerek yöntemlerin duyarlılıkları araştırılmıştır.

Anahtar Kelimeler: Jeoid ondülasyonu, kuadratik polinom, kübik polinom, multi-kuadratik enterpolasyon yöntemi.

ABSTRACT

Ellipsoidal heights of geodetic control points can be obtained accurately by Global Positioning System (GPS). Whether, the heights, which are used in practical geodesy, are the orthometric heights defined as the distances along plumb lines between the geoid surface and the control points. For local study areas geoid's analytical surface can be represented accurately by second or third degree surface polynomials

In this study, it was aimed to obtain the most compatible local geoid by using orthogonal and non-orthogonal polynomials. Local geoid surface was obtained by quadratic, cubic, bi-quadratic, bi-cubic surface polynomials and multi-quadratic interpolation method. By investigating the geoid undulation deviations from the values obtained by GPS, the accuracies of the methods are searched.

Keywords: Geoid undulation, quadratic polynomial, cubic polynomial, multi-quadratic interpolation method.

GİRİŞ

Yerin gravite alanı içerisinde, çekim potansiyeli ve merkezkaç potansiyelinin skaler toplamı olan gerçek gravite potansiyeli eşit noktaların birleşmesiyle eş potansiyelli yüzeyler elde edilir. Fiziksel yeryüzünde her noktadan bir eş potansiyelli yüzey geçer. Bu yüzeyler yerin dışında analitik ve kapalı yüzeylerdir. Eş potansiyelli yüzeylerden ortalama okyanus yüzeyi ile çakışanına Jeoid adı verilir. Jeodezi bilim dalında yerin gerçek şekli olan jeoid yüzeyinin global veya yerel anlamda belirlenmesi büyük önem taşır (Heiskanen ve Moritz, 1984).

Elipsoid yüzeyinden elipsoid normali boyunca ölçü noktasına olan yüksekliklere elipsoid yükseklikleri (h) adı verilir. Elipsoid yükseklikleri GPS ile yüksek doğrulukta ve düşük maliyet ile pratik olarak belirlenebilmektedir. Fakat pratik jeodezide kullanılan jeoid yüzeyinden itibaren çekül eğrisi boyunca olan yükseklikler (ortometrik yükseklikler (H)) maliyeti yüksek ve zahmetli ölçümlerle belirlenmektedir (İnal, 1996; İnal, 2002).

Bölgesel haritacılık çalışmalarının çoğu için, yerel jeoid yüzeyi yardımı ile ölçülen elipsoid yüksekliklerinden ortometrik yükseklikleri yeterli duyarlıklarda elde mümkündür.

Jeoid ve elipsoid yüzeyleri arasındaki elipsoid normali boyunca olan uzaklığa jeoid ondülasyonu denir. Yerel jeoid yüzey denkleminin belirlenmesinde jeodezik dayanak noktalarına ait jeoid ondülasyonları kullanılır. Yüzey denkleminin oluşturulmasında kullanılan enterpolasyon yöntemleri iki yükseklik sistemi arasındaki dönüşümün duyarlılığını etkiler. Bu çalışmada aynı dayanak noktaları için farklı enterpolasyon yöntemleri kullanılarak elde edilen yüzey denklemlerinin ölçülen ortometrik yüksekliklere ne derece yaklaşabildiği irdelenmiştir.

YEREL JEODİD YÜZEYİNİN BELİRLENMESİNDE KULLANILAN ENTERPOLASYON YÖNTEMLERİ

Kullanılacak yüzey genellikle iki değişkenli yüksek derece polinomlarla tanımlanır. Ortogonal polinom genel ifadesi,

$$N(X, Y) = \sum_{k=0}^n \sum_{\substack{j=k-i \\ i=0}}^k a_{ij} x^i y^j \quad (1)$$

eşitliği ile gösterilir. Burada, a_{ij} ; polinomun katsayıları, n ; polinomun derecesi, x, y ; noktaların düzlem koordinatlarıdır. Eşitlikte $n=1$ alındığında yüzey lineer, $n=2$ alındığında yüzey quadratik, $n=3$ alındığında yüzey kübik olur. Quadratik yüzey,

$$N(x, y) = a_0 + a_1 y + a_2 x + a_3 x^2 + a_4 xy + a_5 y^2 \quad (2)$$

eşitliği ile 6 bilinmeyenli bir polinomla ifade edilir. Kübik yüzey,

$$N(x, y) = a_0 + a_1 y + a_2 x + a_3 x^2 + a_4 xy + a_5 y^2 + a_6 x^3 + a_7 x^2 y + a_8 xy^2 + a_9 y^3 \quad (3)$$

eşitliği ile 10 bilinmeyenli bir polinomla ifade edilir.

Ortogonal olmayan polinom genel ifadesi

$$N(X, Y) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n a_{ij} x^i y^j \quad (4)$$

şeklindedir. (4) eşitliğinde n=1 alındığında yüzey bi-lineer, n=2 alındığında yüzey bi-quadratik, n=3 alındığında yüzey bi-kübik olarak isimlendirilir. Bi-quadratik yüzey,

$$N(x, y) = a_0 + a_1y + a_2x + a_3x^2 + a_4xy + a_5y^2 + a_6x^2y + a_7y^2x + a_8x^2y^2 \quad (5)$$

eşitliği ile 9 bilinmeyenli bir polinomla ifade edilir. Bi-kübik yüzey,

$$N(x, y) = a_0 + a_1y + a_2x + a_3xy + a_4y^2 + a_5xy^2 + a_6x^2 + a_7x^2y + a_8x^2y^2 + a_9y^3 + a_{10}xy^3 + a_{11}x^2y^3 + a_{12}x^3 + a_{13}x^3y + a_{14}x^3y^2 + a_{15}x^3y^3 \quad (6)$$

eşitliği ile 16 bilinmeyenli bir polinomla ifade edilir.

Yukarıda verilen fonksiyonların katsayılarının belirlenmesinde uygulanacak en küçük kareler çözümünde her bir ölçü için ayrı bir lineer denklem yazılarak katsayılar matrisi (A) oluşturulur. Kübik yüzey için katsayılar matrisi,

$$A_{n \times 10} = \begin{bmatrix} 1 & y_1 & x_1 & x_1^2 & x_1y_1 & y_1^2 & x_1^3 & x_1^2y_1 & x_1y_1^2 & y_1^3 \\ 1 & y_2 & x_2 & x_2^2 & x_2y_2 & y_2^2 & x_2^3 & x_2^2y_2 & x_2y_2^2 & y_2^3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & y_n & x_n & x_n^2 & x_ny_n & y_n^2 & x_n^3 & x_n^2y_n & x_ny_n^2 & y_n^3 \end{bmatrix} \quad (7)$$

şeklinde oluşturulur. Ölçüler vektörü (I),

$$I_{1 \times n}^T = [N_1 \quad N_2 \quad \dots \quad N_n] \quad (8)$$

eşitliği ile ifade edilir. Ölçülerin ağırlık matrisi (P),

$$P_{n \times n} = \begin{bmatrix} P_{N_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & P_{N_2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & P_{N_n} \end{bmatrix} \quad (9)$$

eşitliği ile ifade edilir. Polinom katsayılarından oluşan bilinmeyenler vektörü (X),

$$X_{1 \times 10}^T = [a_0 \quad a_1 \quad a_2 \quad a_3 \quad a_4 \quad a_5 \quad a_6 \quad a_7 \quad a_8 \quad a_9] \quad (10)$$

eşitliği ile ifade edilir. En küçük kareler çözümü sonucu,

$$X = (A^T P A)^{-1} A^T P I \quad (11)$$

matris eşitliği ile fonksiyonların katsayıları hesaplanır (Öztürk ve Şerbetçi, 1992; Yiğit, 2003).

Model hipotezinin testi

Dengeleme hesabının matematik modelinin ölçülerle bilinmeyenler arasındaki geometrik ve fiziksel ilişkilere uygun olup olmadığı, ölçülerin duyarlıklarını ve aralarındaki korelasyonları yeterince yansıtıp yansıtmadığı model hipotezinin testi yoluyla denetlenir (Öztürk ve Şerbetçi, 1992). Aynı koşullarda yapılan benzer türden ölçülerin değerlendirilmesi sonucunda, dengelemeden önce elde edilen ve gözlemlerin ağırlıklarının belirlenmesinde yararlanılan birim ölçünün ortalama hatasının öncül (a priori) değeri (s_0) ile dengeleme hesabı sonucunda bulunan soncul (a posteriori) değeri (m_0) kullanılarak model hipotezinin testi için sıfır hipotezi,

$$H_0 : E \{ m_0^2 \} = E \{ s_0^2 \} \quad (12)$$

biçiminde kurulur. Seçenek hipotezleri, tek yönlü testlerde

$$\begin{aligned} H_{S1} : E \{ m_0^2 \} < E \{ s_0^2 \} \\ H_{S1} : E \{ m_0^2 \} > E \{ s_0^2 \} \end{aligned} \quad (13)$$

olarak, çift yönlü testlerde ise

$$H_{S2} = E \{ m_0^2 \} \neq E \{ s_0^2 \} \quad (14)$$

olarak kurulur. Birim ölçünün öncül ve soncul değerleri yardımıyla hesaplanan test büyüklüğü,

$$T = \frac{m_0^2}{s_0^2} \quad ; \quad m_0 > s_0 \quad (15)$$

F-dağılım tablolarından yanılma olasılığı (α), payın serbestlik derecesi (f) ve paydanın serbestlik derecesine (\bar{f}) göre alınan

$$q_1 = F_{f,\bar{f},1-\alpha} \quad \text{ya da} \quad q_2 = F_{f,\bar{f},\frac{\alpha}{2}} \quad (16)$$

değerleri ile karşılaştırılır. Test büyüklüğü, seçenek hipotezi H_{S1} ise q_1 ile seçenek hipotezi H_{S2} ise q_2 ile karşılaştırılır. Eğer test büyüklüğü tablo değerinden küçük ise ($T < q$), dengeleme modeli geçerlidir. Eğer test büyüklüğü tablo değerinden büyük ise ($T > q$), dengeleme modeli geçersizdir. Sıfır hipotezinin reddedilmesi durumunda uyumsuz ölçüler testi ile uyumsuz ölçü olup olmadığına bakılmalıdır (Koch, 1980; Öztürk ve Şerbetçi, 1992; Konak, 1994).

Uyuşumsuz ölçüler testi

Ölçülerin birinde ya da birkaçında bulunan ve rasgele ölçü hatalarına çok yakın büyüklükte olan kaba hatalar kolaylıkla fark edilemezler ve dengeleme hesabı sonucunda bulunan büyüklükleri olumsuz yönde etkilerler. Bunlar ancak uyumsuz ölçüler testi ile

belirlenebilirler. Uyuşumsuz ölçüler dengelemenin matematik modelinin geçersizliğine neden olabilir (Öztürk ve Şerbetçi, 1992; Ayan, 1992).

Δ_j , j numaralı ölçüdeki kaba hata olmak üzere t-testi için fonksiyonel model her bir j ölçüsüne karşılık,

$$l + v = [A \quad e_j] \begin{bmatrix} x \\ \Delta_j \end{bmatrix} \quad (17)$$

şeklinde ayrı ayrı genişletilerek oluşturulur. Burada l, ölçü; v, düzeltme; x, bilinmeyenler ve e_j , j. değeri 1 olan sıfır vektörünü; A, katsayılar matrisini göstermektedir. Bu modelden j. ölçüdeki kaba hatanın büyüklüğü ve ters ağırlığı

$$\Delta_j = -\frac{e_j^T P v}{e_j^T P Q_{vv} P e_j} \quad ; \quad q_{\Delta\Delta} = \frac{1}{e_j^T P Q_{vv} P e_j} \quad (18)$$

biçiminde hesaplanır. Burada P, ölçülerin ağırlığını ve Q_{vv} , düzeltmelerin ters ağırlık matrisini göstermektedir. Genişletilmiş modelden birim ölçünün ortalama hatasının soncul değeri S_0 ve f, serbestlik derecesi olmak üzere

$$s_0 = \pm \sqrt{\frac{1}{f-1} (f m_0^2 - \frac{\Delta_j^2}{q_{\Delta\Delta}})} \quad (19)$$

eşitliğinden hesaplanır. Kaba hatanın anlamlı olup olmadığını irdeleyebilmek için sıfır ve seçenek hipotezleri

$$\begin{aligned} H_0 &: E(\Delta_j) = 0 \\ H_s &: E(\Delta_j) \neq 0 \end{aligned} \quad (20)$$

biçiminde kurulur. Test büyüklüğü

$$T = \frac{|e_j^T P v|}{s_0 \sqrt{e_j^T P Q_{vv} P e_j}} \quad (21)$$

şeklinde hesaplanır. Test büyüklüğü, α testin ve $\bar{\alpha}/2 = 1 - \sqrt{1 - \alpha/2}$ de t-dağılımının yanılma olasılığı olmak üzere $S = 1 - \alpha$ istatistik güvenle t-dağılımı cetvelinden alınan sınır değer ile karşılaştırılır.

$$T > t_{f-1, 1 - \bar{\alpha}/2} \quad (22)$$

ise irdelenen ölçüde sayısal değeri Δ_j kadar olan anlamlı bir kaba hata vardır. Bu ölçülerden yalnızca en büyüğünün uyuşumsuz olduğuna karar verilir. İlgili ölçü, ölçü kümesinden çıkarılır ya da yeniden ölçülür. Uyuşumsuz ölçü kalmayıncaya kadar aynı işlemlere devam edilir. Kaba hatalı ölçülerin her iterasyonda ölçü kümesinden ayıklanması ve bir sonraki

iterasyon adımı da işleme katılmaması ağıın şeklini belirlemeye yetecek yeterli sayıda ölçünün kalmadığı durumlarda bir şekil bozukluğu (şekil defekt) oluşumuna yol açar. Böyle durumlarda ağıın yapısını bozan ölçüler yinelenmelidir (Koch, 1980; Aksoy, 1984; Öztürk ve Şerbetçi, 1992).

Parametreler için anlamlılık testi

Kestirilen bir parametre x_i ve standart sapması m_{x_i} olmak üzere parametrenin ümit değerinin sıfır kabul edilip edilmeyeceğine karar vermek için sıfır ve seçenek hipotezleri,

$$\begin{aligned} H_0 &: E(x_i) = 0 \\ H_s &: E(x_i) \neq 0 \end{aligned} \quad (23)$$

şeklinde oluşturulur. Test büyüklüğü,

$$T = \frac{|x_i|}{m_{x_i}} \quad (24)$$

eşitliği ile hesaplanır. f , serbestlik derecesi ve α , yanılma olasılığı olmak üzere, test büyüklüğü $t_{f, 1-\frac{\alpha}{2}}$ sınır değeri ile karşılaştırılır. $T < t_{f, 1-\frac{\alpha}{2}}$ ise sıfır hipotezi kabul edilir ve ilgili parametre polinomdan çıkarılır. Seçenek hipotezinin geçerli olması durumunda ise kestirim değerinin anlamlı olduğuna karar verilir (Wolf ve Ghilani, 1997).

Multiquadratik enterpolasyon yöntemi

Multiquadratik enterpolasyon yönteminin uygulanmasından önce çalışma bölgesine uygun dağılımda seçilen dayanak noktalarının N_i değerlerine bağlı olarak n . dereceden bir polinomun bilinmeyen katsayıları en küçük karelere göre çözümlendikten sonra dayanak noktalarındaki ΔN_i artık ondülasyon değerleri

$$\Delta N_i = N_i - N(x_i, y_i) = N_i - N_{\text{fonk}} \quad ; \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (25)$$

hesaplanır. (x_0, y_0) enterpolasyon noktasındaki ΔN_0 artık ondülasyon değeri ise,

$$\Delta N_0 = N_0 - N(x_0, y_0) = N_0 - N_{\text{fonk}}. \quad (26)$$

eşitliğinden hesaplanır. Fakat bu eşitlikte bilinmeyen hem ΔN_0 hem de N_0 değerleridir Multiquadratik yöntemin en genel eşitliği,

$$\Delta N_0 = \sum_{i=1}^n C_i \theta(x_0, y_0; x_i, y_i) \quad (27)$$

şeklindedir. Burada N_i dayanak noktalarının jeoid ondülasyon değerleri, N_0 ; enterpolasyon noktasının jeoid ondülasyon değerleri, $N(x_i, y_i)$; fonksiyondan elde edilen herhangi bir i noktasına ait ondülasyon değeri, n ; dayanak nokta sayısı, C_i ; dayanak noktalarının bilinen ΔN_i değerlerinden hesap edilecek olan bilinmeyen katsayılarıdır. C_i katsayıları ikinci dereceden terimlerin işaretini ve eğimini belirler. $\theta(x_0, y_0; x_i, y_i)$; Kernel fonksiyonudur. Bu fonksiyon dairesel dik konilerin toplamları şeklinde ifade edilirse,

$$\theta(x_0, y_0; x_i, y_i) = [(x_i - x_0)^2 + (y_i - y_0)^2]^{1/2} \quad (28)$$

eşitliği elde edilir. C_i katsayılarını hesaplamak için dayanak noktalarına bağlı olarak,

$$\begin{aligned} C_1 a_{11} + C_2 a_{12} + \dots + C_n a_{1n} &= \Delta N_1 \\ C_1 a_{21} + C_2 a_{22} + \dots + C_n a_{2n} &= \Delta N_2 \\ \vdots & \\ C_1 a_{n1} + C_2 a_{n2} + \dots + C_n a_{nn} &= \Delta N_n \end{aligned} \quad (29)$$

şeklinde n tane lineer denklem oluşturulur. 12 denklem sistemindeki a_{ij} katsayıları dayanak noktalarının koordinatlarından yararlanarak 11 eşitliğinden hesaplanır. 12 denklem sisteminde A ; $n \times n$ boyutlu katsayılar matrisi,

$$A_{n \times n} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \quad (30)$$

C , n elemanlı bilinmeyenler vektörünü,

$$C^T = [C_1 \quad C_2 \quad \dots \quad C_n] \quad (31)$$

Ve ΔN , dayanak noktalarındaki artık ondülasyon değerlerini içeren n elemanlı vektörü,

$$\Delta N^T = [\Delta N_1 \quad \Delta N_2 \quad \dots \quad \Delta N_n] \quad (32)$$

göstermek üzere,

$$C = A^{-1} \Delta N \quad (33)$$

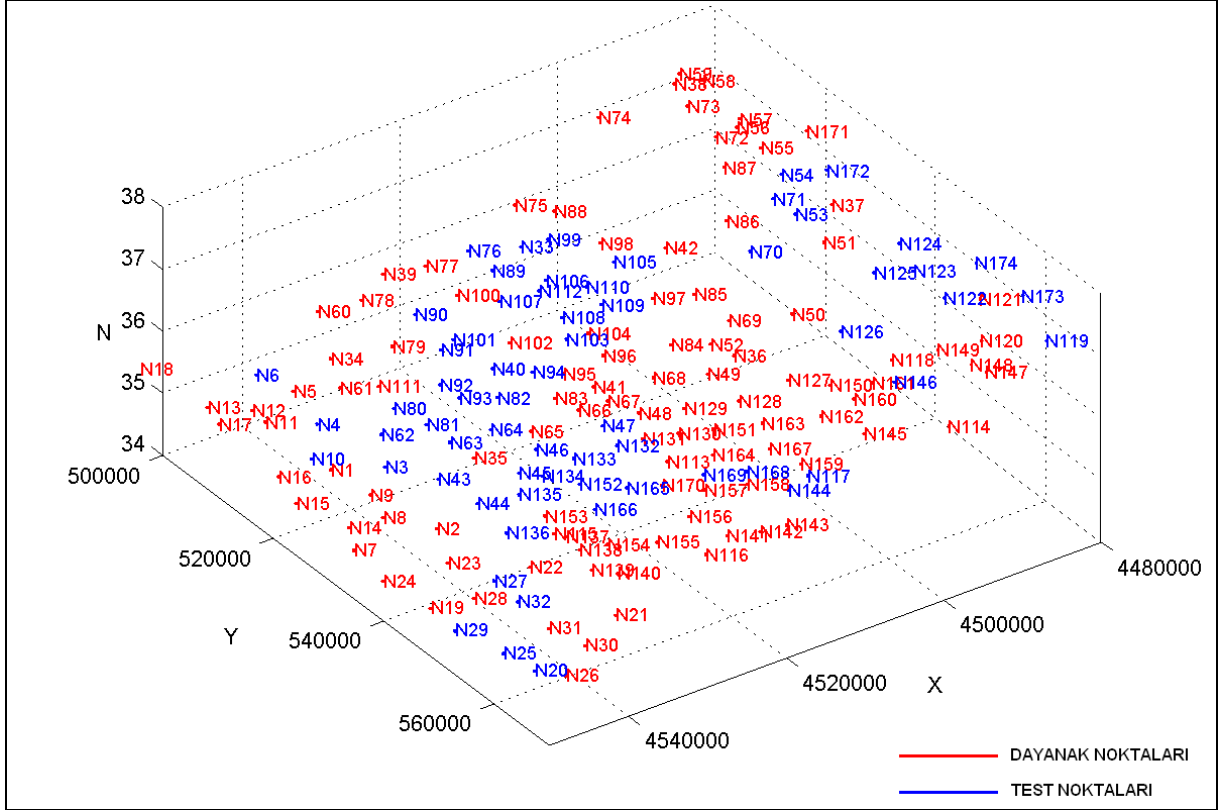
olur. (x_0, y_0) koordinatları ile bilinen herhangi bir enterpolasyon noktasının aranan N_0 ondülasyon değeri,

$$N_0 = N(x_0, y_0) + \sum_{i=1}^n C_i [(x_i - x_0)^2 + (y_i - y_0)^2]^{1/2} \quad (34)$$

eşitliği ile hesaplanır (Hardy, 1971; İnal, 1996; İnal, 2002; Yiğit, 2003).

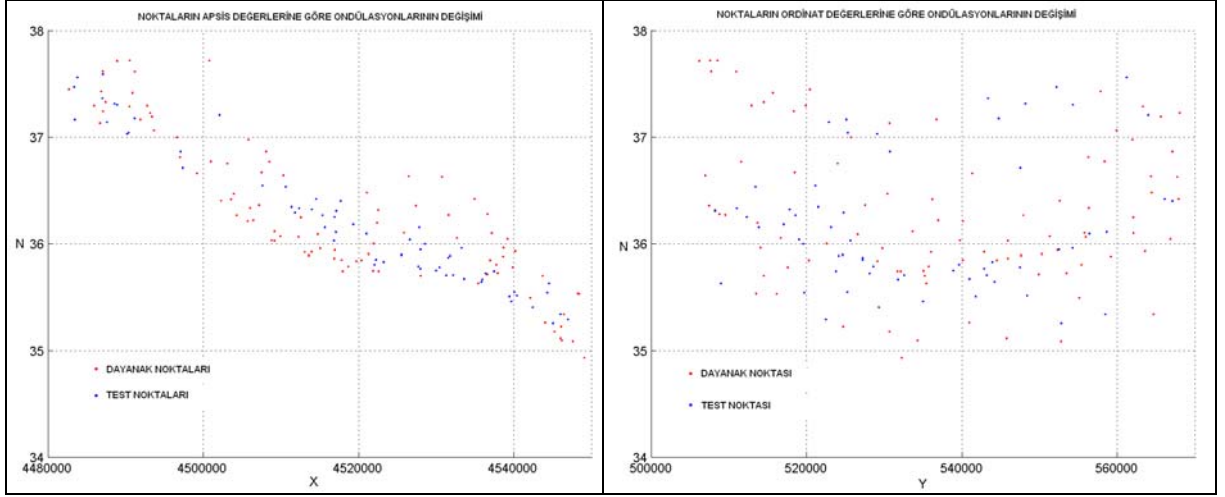
SAYISAL UYGULAMA

Uygulamada, Kocaeli ilinde MERLİS (Marmara Earthquake Region Land Information System) projesi kapsamında yapılan çalışmalarda oluşturulan jeodezik kontrol noktalarının ITRF96 datumu 2002.48 ölçü epogundaki koordinatları kullanılmıştır. DUTM projeksiyon koordinatları ve elipsoid ondülasyonları belli olan bu noktalar toplam 174 adet olup yaklaşık 80 km x 80 km bir alana dağılmıştır (Şekil 1).



Şekil 1. Dayanak ve test noktalarının uygulama bölgesi jeoid yüzeyine dağılımı

Uygulamada bunlardan 109 adedi dayanak, 65 adedi ise test noktası olarak alınmıştır. Dayanak noktalarının uygun dağılımda seçimi yüzey modelinin doğruluğunu arttıracaktır. Bu nedenle noktaların seçiminde, x ve y eksen yönlerindeki nokta dağılımlarına bakılmıştır (Şekil 2).



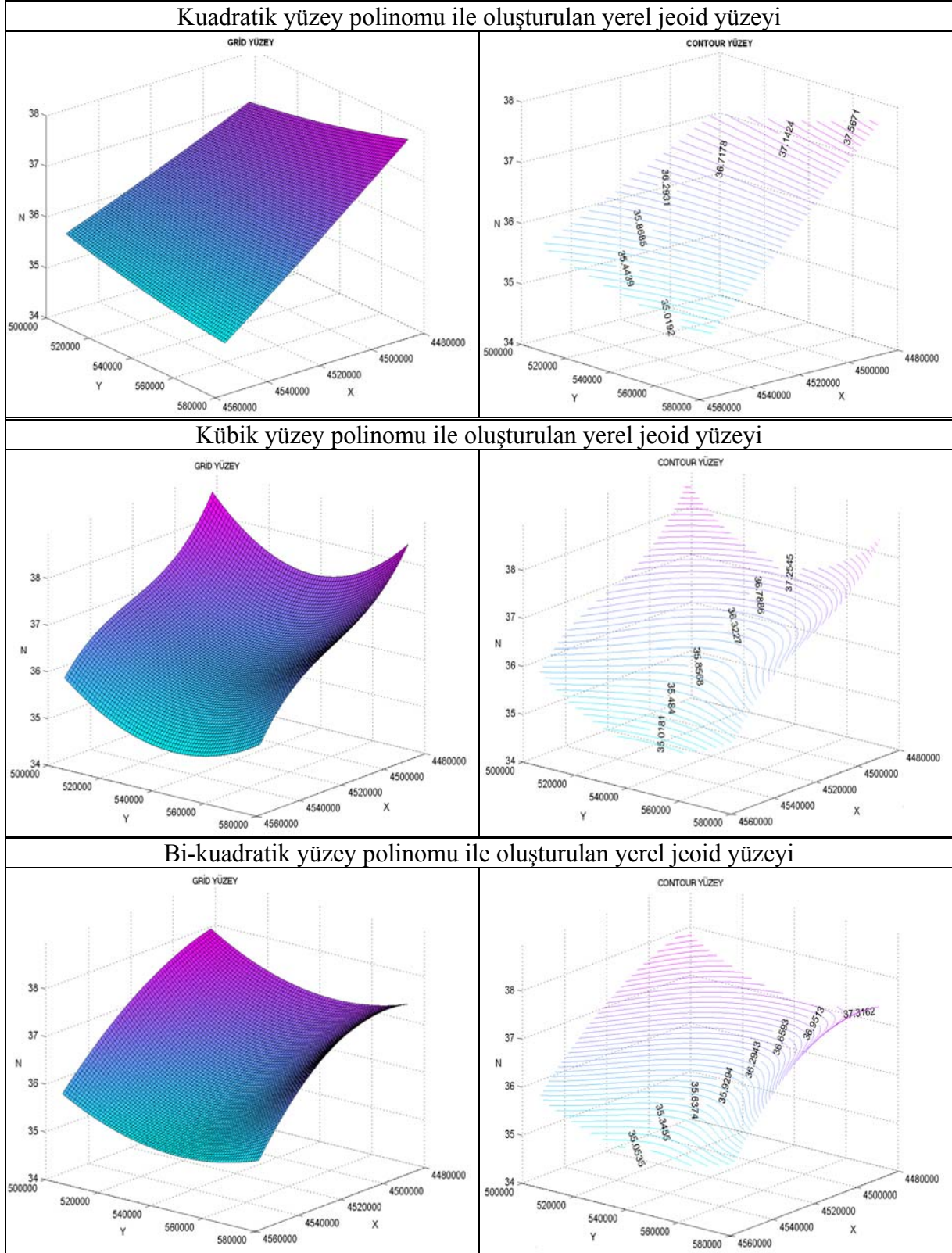
Şekil 2. Dayanak ve test noktalarının ondülasyon değerlerinin x ve y eksenine göre dağılımı

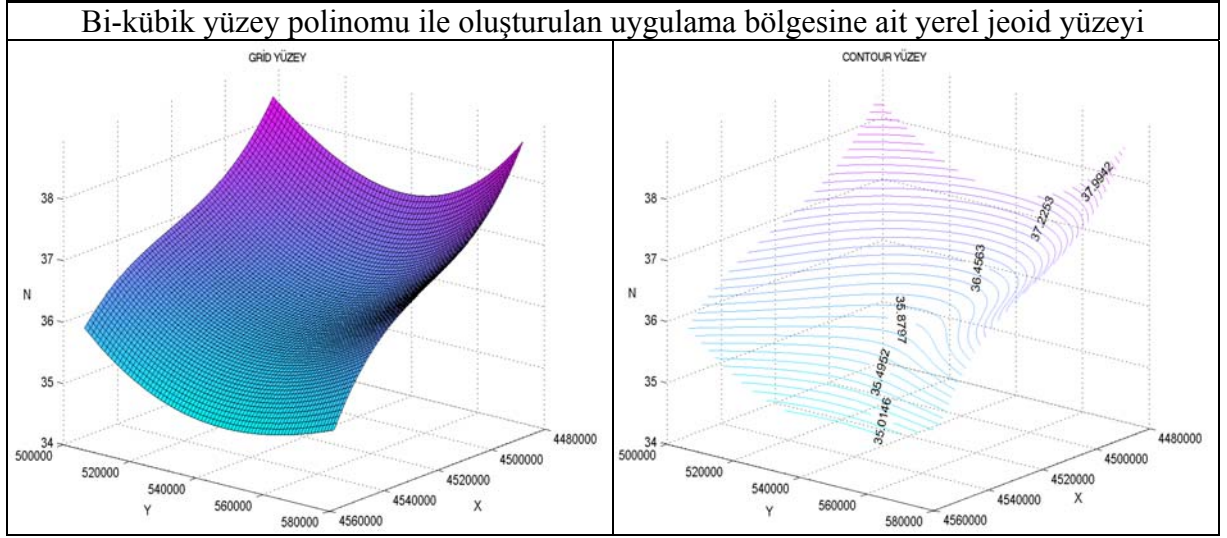
Dayanak noktalarının seçiminin ardından 2, 3, 5 ve 6 eşitlikleri ile verilen kuadratik, kübik, bi-kuadratik ve bi-kübik yüzey polinomlarının katsayıları en küçük kareler kestirim yöntemine göre 7, 8, 9, 10 ve 11 eşitliklerinden hesaplanmıştır. Parametrelerin anlamlılık testi değeri 24 eşitliğinden hesaplanmış ve test değeri sınır değerini sağlamayan katsayılar modele dahil edilmemiştir (Tablo 1).

Tablo 1. Yüzey polinomlarının katsayıları ve katsayıların anlamlılık testi sonuçları

Katsayılar	Yüzeyin Cinsi											
	Ortogonal Yüzey Polinomları						Ortogonal Olmayan Yüzey Polinomları					
	Kuadratik			Kübik			Bi-kuadratik			Bi-kübik		
	Katsayı Değeri	Test Değeri (Tablo Değ.=1,6598)	Sonuç	Katsayı Değeri	Test Değeri (Tablo Değ.=1,6604)	Sonuç	Katsayı Değeri	Test Değeri (Tablo Değ.=1,6600)	Sonuç	Katsayı Değeri	Test Değeri (Tablo Değ.=1,6606)	Sonuç
A ₀	3.1664e-10	38.729	Geçerli	8.0849e-30	4.559	Geçerli	1.4479e-32	3.2137	Geçerli	3.5897e-06	1.056	Geçersiz
A ₁	8.5329e-05	71.185	Geçerli	1.9898e-24	2.259	Geçerli	-2.7701e-25	3.2421	Geçerli	2.1267e-04	0.856	Geçersiz
A ₂	8.205e-05	71.186	Geçerli	2.7483e-24	5.689	Geçerli	5.5068e-27	3.2794	Geçerli	-1.5897e-03	0.324	Geçersiz
A ₃	3.1219e-11	0.83971	Geçerli	7.59e-19	5.482	Geçerli	5.5068e-27	3.3036	Geçerli	1.2517e-09	2,071	Geçerli
A ₄	-2.707e-10	3.7306	Geçerli	6.9229e-19	2.753	Geçerli	2.2627e-21	3.2646	Geçerli	-6.6520e-02	0,025	Geçersiz
A ₅	5.1375e-11	1.8471	Geçerli	6.25e-19	2.536	Geçerli	5.871e-16	3.3259	Geçerli	2.4256e-07	0,287	Geçersiz
A ₆	-	-	-	4.7322e-15	5.292	Geçerli	1.8197e-21	3.3209	Geçerli	-2.6596e-08	1,731	Geçerli
A ₇	-	-	-	-1.3226e-14	1.906	Geçerli	4.9072e-16	3.3443	Geçerli	1.5509e-13	1,760	Geçerli
A ₈	-	-	-	1.2555e-14	1.667	Geçerli	-1.5775e-21	3.3665	Geçerli	-3.1401e-19	1,828	Geçerli
A ₉	-	-	-	-3.8248e-15	2.110	Geçerli	-	-	-	1.4815e-14	5,759	Geçerli
A ₁₀	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-8.8285e-20	5,978	Geçerli
A ₁₁	-	-	-	-	-	-	-	-	-	3.7996e-25	2,632	Geçerli
A ₁₂	-	-	-	-	-	-	-	-	-	5.1697e-14	1,754	Geçerli
A ₁₃	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-3.0179e-19	1,785	Geçerli
A ₁₄	-	-	-	-	-	-	-	-	-	5.9677e-25	1,834	Geçerli
A ₁₅	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-5.0205e-31	1,738	Geçerli

Hesaplanan polinom katsayılarına göre oluşturulan yüzey polinomları çizdirilmiş ve şekil 3 de verilmiştir. Yüzeylerin farklılıklarının daha iyi anlaşılabilmesi için ondülasyon değerlerini gösteren Z ekseninin ölçeği x ve y düzlem koordinat değerlerinin gösterildiği eksenlerin ölçeklerinden çok daha büyük alınmıştır.





Şekil 3. Farklı yüzey polinomları ile oluşturulan yerel jeoid yüzeyleri

Yüzey polinomları ile uyumsuz olan noktaları belirlemek için uyumsuz ölçüler testlerinden t-testi 21 ve 22 eşitlikleri ile tüm yüzey polinomları için uygulanmıştır. Uyumsuz nokta belirlenmemiştir (Tablo 2).

Tablo 2. Uyumsuz ölçüler testi (t-testi) sonuçları

Nok. No	Kuatratik		Kübik		Bi-kuadratık		Bi-kübik	
	Test değerleri Tablo değ. ($t_{102,0.987}=2.2724$)	Sonuç	Test değerleri Tablo değ. ($t_{98,0.987}=2.2742$)	Sonuç	Test değerleri Tablo değ. ($t_{99,0.987}=2.2735$)	Sonuç	Test değerleri Tablo değ. ($t_{98,0.987}=2.2742$)	Sonuç
N1	0,682	Anlamlı	0,551	Anlamlı	0,249	Anlamlı	0,381	Anlamlı
N2	0,358	Anlamlı	0,160	Anlamlı	0,571	Anlamlı	0,169	Anlamlı
N5	0,322	Anlamlı	0,109	Anlamlı	0,691	Anlamlı	0,327	Anlamlı
N7	0,916	Anlamlı	0,408	Anlamlı	0,712	Anlamlı	0,520	Anlamlı
N8	0,833	Anlamlı	0,456	Anlamlı	0,277	Anlamlı	0,383	Anlamlı
N9	0,745	Anlamlı	0,467	Anlamlı	0,098	Anlamlı	0,356	Anlamlı
N11	0,193	Anlamlı	0,786	Anlamlı	0,784	Anlamlı	1,016	Anlamlı
N12	0,112	Anlamlı	0,230	Anlamlı	0,381	Anlamlı	0,446	Anlamlı
N13	0,054	Anlamlı	0,083	Anlamlı	0,157	Anlamlı	0,046	Anlamlı
N14	1,180	Anlamlı	0,697	Anlamlı	1,103	Anlamlı	0,589	Anlamlı
N15	1,034	Anlamlı	0,271	Anlamlı	1,061	Anlamlı	0,087	Anlamlı
N16	0,648	Anlamlı	0,165	Anlamlı	0,422	Anlamlı	0,379	Anlamlı
N17	0,002	Anlamlı	0,722	Anlamlı	0,286	Anlamlı	0,908	Anlamlı
N18	0,114	Anlamlı	1,390	Anlamlı	0,654	Anlamlı	2,256	Anlamlı
N19	1,083	Anlamlı	0,968	Anlamlı	1,653	Anlamlı	0,973	Anlamlı
N21	1,307	Anlamlı	0,545	Anlamlı	0,156	Anlamlı	0,347	Anlamlı
N22	0,364	Anlamlı	0,330	Anlamlı	0,814	Anlamlı	0,287	Anlamlı
N23	0,541	Anlamlı	0,224	Anlamlı	0,086	Anlamlı	0,250	Anlamlı

N171	0,803	Anlamlı	1,284	Anlamlı	0,169	Anlamlı	1,391	Anlamlı

Multi-kuadratık enterpolasyon yönteminde trend yüzey olarak kuadratık yüzey seçilmiştir. Multikuadratık enterpolasyon yöntemi ile 25, 26, 27, 28, 30,31, 32, 33 ve 34 eşitlikleri

kullanılarak uygulama bölgesindeki test noktalarının ondülasyon değerleri hesaplanmıştır. Yöntemlerin ve modellerin duyarlılıkları Tablo 3’de verilmiştir.

Tablo 3. Enterpolasyon yöntemlerine ilişkin istatistiksel duyarlık değerleri

Yöntem	Parametreler		m_0 (cm)	$ \varepsilon_{\max} $ (cm)
Polinom yüzeyleri	Ortogonal olan	Kuadratik	17,2	40,1
		Kübik	10,8	34,9
	Ortogonal olmayan	Bi-kuadratik	18,5	41,0
		Bi-kübik	10,3	25,8
Multikuadratik			8,7	18,9

SONUÇLAR ve ÖNERİLER

Trend yüzey olarak kuadratik yüzey seçilerek gerçekleştirilen multi-kuadratik enterpolasyon yöntemi Tablo 3’ den de görüleceği gibi en duyarlı sonucu vermiştir. Kübik ve bi-kübik yüzey polinomlarından elde edilen ondülasyon değerlerinin duyarlılıklarının da jeodezik çalışmaların çoğu için yeterli olacağı söylenebilir. Dayanak noktalarının uygulama bölgesine homojen dağılım gösterecek ve yeterli sıklıkta olacak şekilde seçilmesi, multi-kuadratik enterpolasyon yöntemi ile noktaların ondülasyon değerleri ve ortometrik yüksekliklerinin hesaplanması, multi-kuadratik enterpolasyon yönteminde trend yüzey olarak kuadratik yüzey polinomunun seçilmesi önerilir.

KAYNAKLAR

Aksoy, A., Uyuşumsuz Ölçüler Testi, Harita Dergisi, 93, 15-24, 1984.

Ayan, T., Uyuşumsuz Ölçüler Testi, Harita ve Kadastro Mühendisliği Dergisi, 72, 38-46, 1992.

Hardy, R.L., Multiquadratic Equation Of Topography And Other Irregular Surface, Journal of Geophysical Research, 76, 8, 1971.

Heiskanen, W. ve Moritz, H., Türkçe çeviri: Onur Gürkan, Fiziksel Jeodezi, Karadeniz Teknik Üniversitesi, Trabzon, 1984.

İnal, C., Yerel Jeoit Geçirilerek GPS Sonuçlarından Yükseklik Belirlenmesi, Selçuk Üniversitesi Mühendislik-Mimarlık Fakültesi Dergisi, 11, 2, 1996.

İnal, C., Turgut, B., Yiğit, C., Lokal Alanlarda Jeoit Ondülasyonlarının Belirlenmesinde Kullanılan Enterpolasyon Yöntemlerinin Karşılaştırılması, Selçuk Üniversitesi Jeodezi ve Fotogrametri Mühendisliği Öğretiminde 30. Yıl Sempozyumu, Konya, 16-18 Ekim 2002.

Koch, K. R., Parameterschatzung und Hypothesentests in linearen Modellen, Bonn, 1980.

Konak, H., Yüzey Ağlarının Optimizasyonu, Doktora Tezi, K.T.Ü., Fen Bilimleri Enstitüsü, Trabzon, 1994.

Öztürk, E. ve Şerbetçi, M., Dengeleme Hesabı, Cilt III, K.T.Ü. Basımevi, Trabzon, 1992.

Wolf, H. ve Ghilani, C. D., Adjustment Computation: Statistics and Least Squares in Surveying and GIS, John Wiley and Sons Inc., New York, 1997.

Yiğit, C., Elipsoidal Yüksekliklerin Ortometrik Yüksekliğe Dönüşümünde Kullanılan Enterpolasyon Yöntemlerinin Karşılaştırılması, Yüksek Lisans Tezi, S. Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü, Konya, 2003.