Doğrusal Modeller

Giriş

- Aşağıdaki denklemlere bakın:

$$2x - y = 2 \qquad -3x + 4y = -3.$$

  Burada, x ve y bilinmeyenlerdir. Biz, her iki denklemi de sağlayan özel bir (x, y) ikilisi arıyoruz: $(x^\star, y^\star)$.

- Eğer böyle özel bir (x, y) ikilisi varsa, bu ikiliye, ilgili denklemlerle tanımlanmış olan sistemin çözümü diyoruz.

- Şimdi çözümü bulalım—tabii eğer varsa: Birinci denklemi yeniden yazalım:

$$y = 2x - 2.$$

  O halde ikinci denklem aşağıdaki şekilde yazılabilir:

$$-3x + 4(2x - 2) = -3$$

  Burada değişkenlerden birini yok ettik ve tek bilinmeyenli tek denkleme ulaştık. Çözersek

$$5x - 8 = -3$$
$$5x = 5$$
$$x = 1.$$

  x'in bilinmeyen olduğunu hatırlayın: Ancak şimdi bu değeri—$x^\star = 1$ değerini—denklemlerden herhangi birinde yerine yazarsak, y için de özel bir değer buluruz: Hem birinci, hem de ikinci denklem, $y = 0$ sonucunu verecektir. O halde

$$x^\star = 1 \qquad y^\star = 0$$

  bir çözümdür (Kendiniz kontrol edin!).

- İktisatta, yukarıdaki sisteme çok benzeyen doğrusal sistemler vardır. Doğrusal iktisadi model denklemleri, genellikle, bir (iktisadi) dengeyi tanımlayan denklemlerdir ve bilinmeyenler de, genellikle, incelenen modelin içsel değişkenlerdir.

- Biçimsel olarak,

$$Ax = b$$

  bir doğrusal iktisadi model olsun; A bilinen bir $n \times n$ matris, x bilinmeyen bir $n \times 1$ vektör ve b de bilinen bir $n \times 1$ vektördür. Burada, n 2 veya daha büyük olan bir tamsayıdır.

- A ve b'yi oluşturan girdiler, iktisadi modelin katsayıları ve dışsal değişkenleridir.

- Ödevimiz, yine, kısaca $Ax = b$ şeklinde yazdığımız n adet denklemi aynı anda sağlayan özel bir $x^\star$ bulmak.

Tutarlı Olmayan Sistemler

- Daha fazla ilerlemeden önce, denklemleri birbirleriyle tutarsız olan sistemleri göz ardı etmekte fayda var. Şu denklemlere bakın:

$$2x - y = 2 \qquad 2x - y = 3.$$

- Bu denklemler, denklemlerden birini sağlayan $x^\star$ ve $y^\star$'nin diğer denklemi sağlayamayacak olması anlamında tutarsızdır—$2 \neq 3$.
- Bu bakımdan, tutarsız olan bir doğrusal sistemin çözümü yoktur.

Çözüm

- **Teorem.** A bir kare matris olsun. Aşağıdaki ifadeler özdeştir:
  1. $|A| \neq 0$.
  2. A tekil olmayan matristir.
  3. A'nın tersi (A^{-1}) vardır.
- A'nın tersi varsa, bu ters matris tektir.
- $Ax = b$ doğrusal modeline geri dönelim. Eğer $|A| \neq 0$ geçerli ise, o halde şunu sağlayan bir $x^\star$ vardır:

$$x^\star = A^{-1}b$$

  Neden? $Ax = b$'nin her iki yanını soldan A^{-1} ile çarpın ve $A^{-1}A = I$ ile $Ix = x$ olduğunu hatırlayın.
- Sırada ne var? A^{-1} tek olduğu için, $x^\star = A^{-1}b$ çözümü de tektir.
- Burada iki olasılık vardır:
  1. Eğer $b \neq 0$ ise, $x^\star = A^{-1}b \neq 0$, $Ax = b$ sisteminin tek ve önemsiz olmayan (0'dan farklı olan) çözümüdür.
  2. Eğer $b = 0$ ise, $x^\star = A^{-1}b = 0$ tek ve önemsiz olan çözümdür.
- Buraya kadar yaptığımız çözüm kolay olanıydı—$|A| \neq 0$ olan durum. Eğer $|A| = 0$ ise, ters matris (A^{-1}) yoktur. Bu durumda, $Ax = b$ sistemini tanımlayan denklemler doğrusal olarak bağımlıdır (eğer tutarsız değillerse!)
- Doğrusal bağımlılık altında, sistemdeki denklemlerden biri gereksizdir (çözüme ilişkin faydalı olacak bir bilgi içermez).
- **Örnek.** Örnek olması açısından, $|A| = 0$ sağlayan bir 2×2 matris inşa edelim:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -6 \\ 5 & -10 \end{bmatrix}$$

  Bilinmeyen

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

ve bilinen

$$b = \begin{bmatrix} 12 \\ 20 \end{bmatrix},$$

ile birlikte,

$$\begin{bmatrix} 3 & -6 \\ 5 & -10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 \\ 20 \end{bmatrix}$$

şeklinde yazacağımız bir sistem oluşur.

- Dikkat edin; denklemler tutarsız değiller ancak doğrusal bağımlılar. Her iki denklem de, bilinmeyenler hakkında aynı bilgiyi içermekteler:

$$5x_1 - 10x_2 = 20 \qquad \text{Her iki yanı } 3/5 \text{ ile çarpın}$$

$$3x_1 - 6x_2 = 12$$

- Şimdi, deriz ki, bu denklemlerden herhangi biri, sistemin genel çözümünü tanımlar; yani x_2'yi x_1'in veya x_1'i x_2'nin bir fonksiyonu olarak yazmamızı sağlar:

$$x_2 = \frac{3x_1 - 12}{6}$$

  Başka deyişle, sonsuz sayıda çözüm vardır ve belirli bir (sayısal) çözümü bulmak için, x_1 veya x_2'den birini bilmemiz gerekir.

- Bu da çok mantıklıdır, çünkü aslında iki bilinmeyenimiz olmasına rrağmen tek gerçekten ilgili denklemimiz vardır.

- Biçimsel olarak, eğer $Ax = b$ tutarlı denklemlerden oluşan ve $|A| = 0$ sağlayan bir doğrusal sistem ise,
  - $b \neq 0$ olduğunda, $x^\star = 0$'ı içermeyen sonsuz sayıda belirli çözüm vardır ve
  - $b = 0$ olduğunda, $x^\star = 0$'ı da içeren sonsuz sayıda belirli çözüm vardır.

Bazı Örnekler

Aşağıda bazı doğrusal iktisadi modeller için bazı örnekler bulunuyor. Bunları, $Ax = b$ matris biçiminde yazarak çözümleri mümkün olduğunca ayrıntılı biçimde tanımlamaya çalışmak çok iyi bir alıştırma olur.

Piyasa Modeli

$$q^d = \alpha - \beta p + \gamma y \qquad \text{(Talep)}$$
$$q^s = -\delta + \eta p + \theta x \qquad \text{(Arz)}$$
$$q^d - q^s = 0 \qquad \text{(Denge)}$$

Bu modelde, q^d ve q^s, sırasıyla, p fiyat düzeyinde piyasadan talep edilen ve piyasaya arz edilen miktarları göstermekte, y hanehalkı geliri ya da servetini ifade etmekte, x ise teknoloji veya üretkenliğin bir ölçüsü olmaktadır. $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \eta, \theta > 0$ modelin yapısal katsayılarıdır.

Keynesgil Harcama-Gelir Modeli

$$E = \alpha + \beta Y \qquad \text{(Harcama ve Gelir)}$$
$$Y - E = 0 \qquad \text{(Denge)}$$

Bu modelde, E ve Y, sırasıyla, ekonominin bütüncül harcama ve gelir akımlarını göstermektedir. $\alpha > 0$ gelirden bağımsız olan (otonom) harcama akımıdır ve $\beta \in (0, 1)$ bir katsayıdır.

Statik IS-LM Modeli

$$C = \eta + \gamma(Y - T) \tag{1}$$
$$T = \tau Y \tag{2}$$
$$I = \alpha - \beta r \tag{3}$$
$$G = T \tag{4}$$
$$L = \phi Y - \theta r \tag{5}$$
$$M = \mu \tag{6}$$
$$Y \equiv C + I + G \tag{7}$$
$$L \equiv M \tag{8}$$

Bu modelde, (1) denklemi tüketim C'yi harcanabilir gelir $Y - T$'nin fonksiyonu olarak ifade eder. Y ulusal gelir, T ise toplam vergi düzeyidir. (2) denklemi, verginin τ oranında toplandığını gösterir. (3) denklemi, toplam özel sektör yatırım harcaması I'yı faiz oranı r'nin bir fonksiyonu olarak yazmaktadır. (4) denklemine göre hükümet dengeli bir bütçe izlemektedir; toplam hükümet harcaması G toplam vergi gelirine eşittir. (5) denklemi, para talebi L'yi, Y'nin ve r'nin fonksiyonu olarak ifade eder. (6) denklemi, para arzı M'nin sabit olduğunu göstermektedir. Son olarak, (7) ve (8) denklemleri, sırasıyla, denge koşullarını ifade etmektedir: İlkine göre, mal ve hizmet piyasası, gelir/harcama dengesine gelir. Diğerine göre ise, para piyasasında para talebi ve para arzı eşitlenir. Yapısal katsayılar $\eta, \alpha, \beta, \phi, \theta, \mu > 0$ ve $\gamma, \tau \in (0, 1)$ şeklindedir. İçsel değişkenler ise Y, C, I, G, T, r, L ve M'dir.