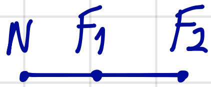
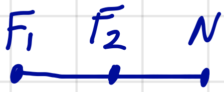
Hiperbol

Tanım: Sabit iki noktaya (odaklar) uzaklıkları farkının mutlak değeri sabit olan noktalar kümesine **hiperbol** denir.

$F_1=(-c,0)$ ve $F_2=(c,0)$ odak noktaları ve $a>0$ için
$\mathcal{H}=\{N\in\mathbb{R}^2 \,/\, |u(N,F_1)-u(N,F_2)|=2a\}$ olsun.

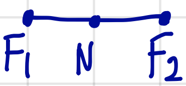
<u>1. durum:</u> $c<a$ iken $H=\emptyset$. $N\in\mathbb{R}^2 \Rightarrow N\in\overleftrightarrow{F_1F_2}$ veya $N\notin\overleftrightarrow{F_1F_2}$.

- $N=F_1$, $N=F_2$, 

veya 

olunca

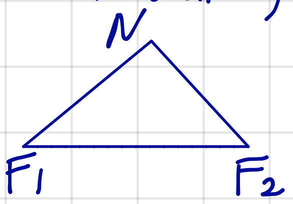
$|u(N,F_1)-u(N,F_2)|=u(F_1,F_2)=2c<2a$ olur ki $N\notin\mathcal{H}$ demektir.

- 

iken $|u(N,F_1)-u(N,F_2)|<u(F_1,F_2)=2c<2a$ olduğundan

$N\notin\mathcal{H}$'dir. Yani, $N\in\overleftrightarrow{F_1F_2}$ iken $N\notin\mathcal{H}$'dir.

Son olarak, $N\notin\overleftrightarrow{F_1F_2}$ iken üçgen eşitsizliğinden

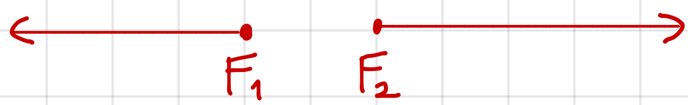


$u(N,F_i)<u(F_1,F_2)+u(N,F_j)$, $\forall\, i,j\in\{1,2\}$, olduğu için $|u(N,F_1)-u(N,F_2)|<u(F_1,F_2)=2c<2a$ elde edilir.

Yani, $N\notin\mathcal{H}$ olur.

<u>2. durum:</u> $c=a$ iken $\mathcal{H}=(\overleftrightarrow{F_1F_2}\setminus F_1F_2)\cup\{F_1,F_2\}$

yani $\overleftrightarrow{F_1F_2}$ doğrusu üzerinde F_1 ve F_2 arasında bulunmayan noktalar kümesidir.



3. durum: $(c>a)$ $b=\sqrt{c^2-a^2}$ için $H=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,/\, \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1\right\}$'dir.

$$N=(x,y)\in H \iff |u(N,F_1)-u(N,F_2)|=2a \iff \left|\sqrt{(x+c)^2+y^2}-\sqrt{(x-c)^2+y^2}\right|=2a$$

$$\iff \sqrt{(x+c)^2+y^2}-\sqrt{(x-c)^2+y^2}=\mp 2a \iff \underbrace{\sqrt{(x+c)^2+y^2}}_{\alpha}=\underbrace{\sqrt{(x-c)^2+y^2}\mp 2a}_{\beta}$$

$$① \Rightarrow (x+c)^2+y^2=(x-c)^2+y^2\mp 4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}+4a^2$$

$$\iff \underbrace{(x+c)^2-(x-c)^2}_{4xc}-4a^2=\mp 4a\sqrt{(x-c)^2+y^2} \iff \underbrace{xc-a^2}_{\gamma}=\underbrace{\mp a\sqrt{(x-c)^2+y^2}}_{\delta}$$

$$② \Rightarrow c^2x^2-2a^2cx+a^4=a^2(x^2-2cx+c^2+y^2)$$

$$\iff (\underbrace{c^2-a^2}_{b^2})x^2-a^2y^2=a^2(\underbrace{c^2-a^2}_{b^2}) \iff \boxed{\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1}$$

H'nin denklemi

$$\frac{x^2}{a^2}=\frac{y^2}{b^2}+1\geq 1 \Rightarrow x^2\geq a^2 \Rightarrow x\geq a \text{ veya } x\leq -a.$$

$$(x+c)^2-(x-c)^2=4xc=\begin{cases}>0\\<0\end{cases}$$

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}-\sqrt{(x-c)^2+y^2}=\begin{cases}2a & (x\geq a \text{ iken})\\-2a & (x\leq -a \text{ iken})\end{cases}$$

$x\geq a \Rightarrow xc\geq ac>a^2 \Rightarrow \gamma>0$. $x\geq a$ iken $\delta>0$ olduğu için ② 'de $\gamma^2=\delta^2 \Rightarrow \gamma=\delta$ olur.

$x\leq -a<0 \Rightarrow xc<0<a^2 \Rightarrow \gamma<0$. $x\leq -a$ iken $\delta<0$ olduğundan ② 'de $\gamma^2=\delta^2 \Rightarrow \gamma=\delta$ olur.

Benzer şekilde, ① 'in tersinin de doğru olduğunu yani $\alpha^2=\beta^2 \Rightarrow \alpha=\beta$ olduğunu da görebiliriz.

$\alpha>0$ olduğundan β'nın da pozitif olduğunu görelim.

$x\geq a$ iken $\beta=\sqrt{(x-c)^2+y^2}+2a>0$ 'dır.

$x\leq -a$ iken $\beta=\sqrt{(x-c)^2+y^2}-2a>0 \Leftrightarrow (x-c)^2+y^2>4a^2$.

$x\leq -a \Rightarrow -2xc\geq 2ac>2a^2$ ve $x^2+c^2>2a^2$ 'dir.

$\Rightarrow (x-c)^2+y^2=x^2-2xc+c^2+y^2\geq x^2+c^2-2xc>4a^2$ 'dir.

Böylece, $\beta>0$ ve $\alpha^2=\beta^2 \Rightarrow \alpha=\beta$ elde edilir.

Uyarı: Burada uygulanan fikri odaklar x-ekseni üzerinde değilken de kullanabiliriz.

Ör: $F_1=(-2,-2)$ $F_2=(2,2)$ noktalarına uzaklıkları farkının mutlak değeri 2 olan noktalar kümesi $H=?$

Çözüm: $(x,y)\in H=\{N\in\mathbb{R}^2 \,/\, |u(N,F_1)-u(N,F_2)|=2\} \Longleftrightarrow$

$\sqrt{(x+2)^2+(y+2)^2}-\sqrt{(x-2)^2+(y-2)^2}=-2$ veya 2'dir.

$\Leftrightarrow \sqrt{(x+2)^2+(y+2)^2}=\sqrt{(x-2)^2+(y-2)^2}\mp 2$.

① $\Rightarrow (x+2)^2+(y+2)^2=(x-2)^2+(y-2)^2\mp 4\sqrt{(x-2)^2+(y-2)^2}+4$

$\Leftrightarrow 8x+8y=\mp 4\sqrt{(x-2)^2+(y-2)^2}+4 \Longleftrightarrow$

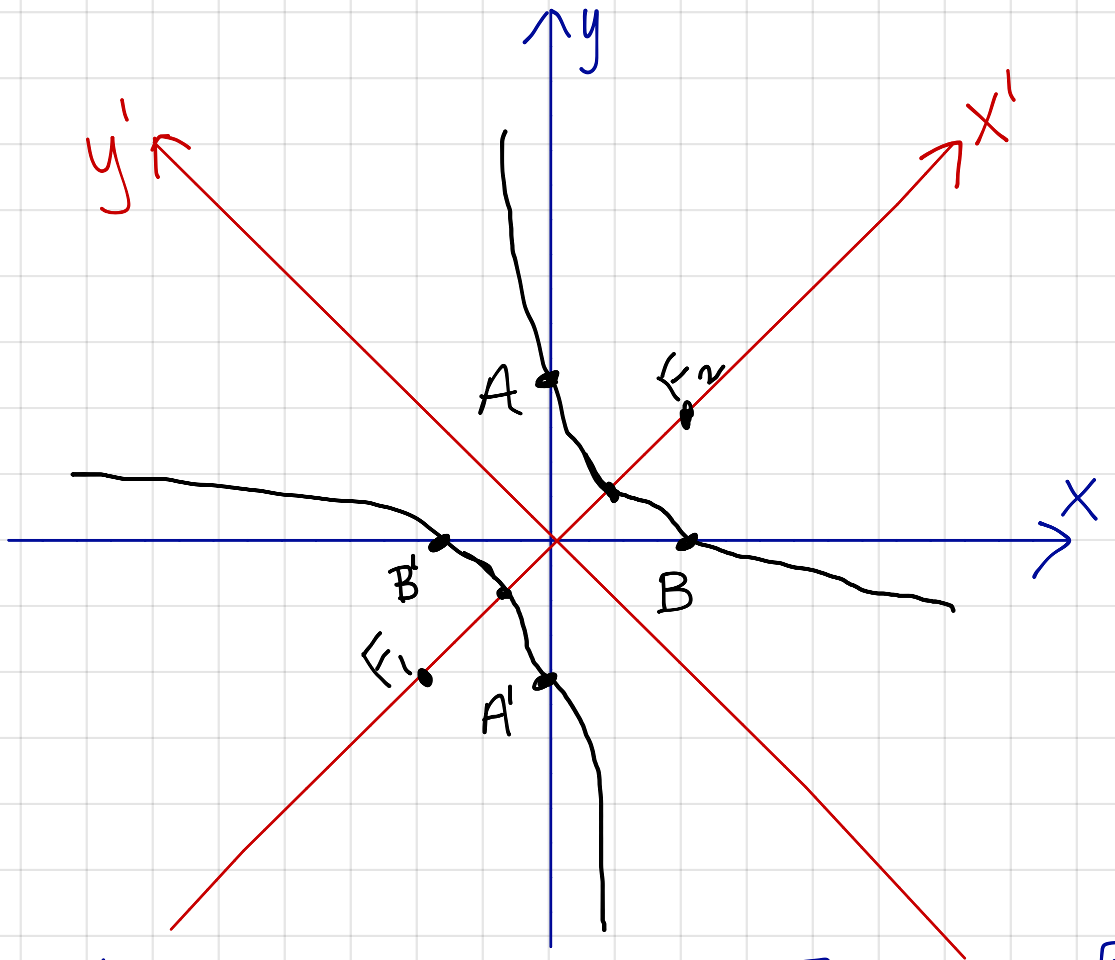
$$\Leftrightarrow 2x+2y-1=\mp\sqrt{(x-2)^2+(y-2)^2}$$

$$2 \Rightarrow 4x^2+2\cdot 2x(2y-1)+(2y-1)^2=(x-2)^2+(y-2)^2$$

$$\Leftrightarrow 4x^2+8xy-\underline{4x}+4y^2-\underline{\underline{4y}}+1=x^2-\underline{4x}+4+y^2-\underline{\underline{4y}}+4$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{3x^2+8xy+3y^2-7=0}_{\text{H'nin denklemi}}$$

Not: H'nin denklemini elde ettik ama grafiğini çizmek için yine de $x'y'$-koordinat sistemini kullanmalıyız.



Kesenler: $x=0 \Rightarrow 3y^2=7 \Rightarrow y^2=7/3 \Rightarrow y=\mp\sqrt{7/3}$

$A=(0,\sqrt{7/3})$ ve $A'=(0,-\sqrt{7/3})$ bulunur.

Benzer şekilde $B=(\sqrt{7/3},0)$ ve $B'=(-\sqrt{7/3},0)$ bulunur.

Parabol

Düzlemde sabit bir noktaya ve sabit bir doğruya uzaklıkları eşit olan noktalar kümesine **parabol** denir.

Ödev: $P_0=(x_0,y_0)$ noktasının $d=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 / ax+by+c=0\}$ doğrusuna uzaklığının $\dfrac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$ olduğunu gösteriniz.

Denklemi: Sabit nokta $F=(P/2,0)$, doğrunun denklemi $x=-P/2$ iken

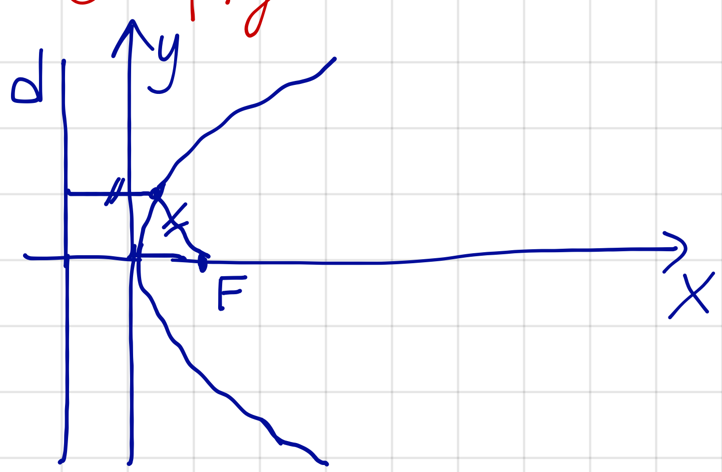
$P=\{N\in\mathbb{R}^2 / u(N,F)=u(N,d)\}$ parabolünün denklemi

şu şekilde bulunur.

$$u(N,F)=u(N,d) \Leftrightarrow \sqrt{(x-P/2)^2+y^2} = \frac{|x+\frac{P}{2}|}{\sqrt{1^2+0^2}} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (x-P/2)^2+y^2=(x+P/2)^2 \Leftrightarrow \boxed{y^2=2px}.$$

Grafiği



Ödevin Çözümü: $d=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid ax+by+c=0\}$ olsun.

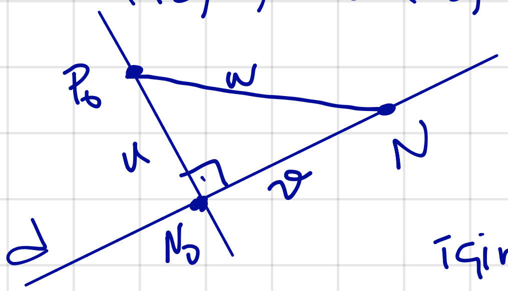
$P_0=(x_0,y_0)\in\mathbb{R}^2\setminus d$ iken $u(P_0,d)=\dfrac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$'dir.

İspat:

$u(P_0,d)=\min\{u(P_0,P)\mid P\in d\}$ olduğundan

öncelikle $\overrightarrow{N_0P_0}=(a,b)$ olacak şekildeki $N_0\in d$ için

$u(P_0,d)=u(P_0,N_0)$ olduğunu gösterelim.



Pisagor Teo: $w^2=u^2+v^2$ olduğu

için $v>0$ (yani $N\neq N_0$) ise $w^2>u^2$ olur.

ve uzunluk olduklarından ikisi de pozitiftir. Yani

$w^2>u^2 \Rightarrow w>u$ olur.

$u(P_0,N_0)=\min\{u(P_0,N)\mid N\in d\}=u(P_0,d)$ olur.

Şimdi $u(P_0,N_0)$'ı bulalım.

$\overrightarrow{N_0P_0}\perp d\perp(a,b)$ olduğundan $\exists\, t\in\mathbb{R}:\ \overrightarrow{P_0N_0}=t(a,b)$.

$N_0=P_0+t(a,b)=(x_0+at,\ y_0+bt)$ bulunur.

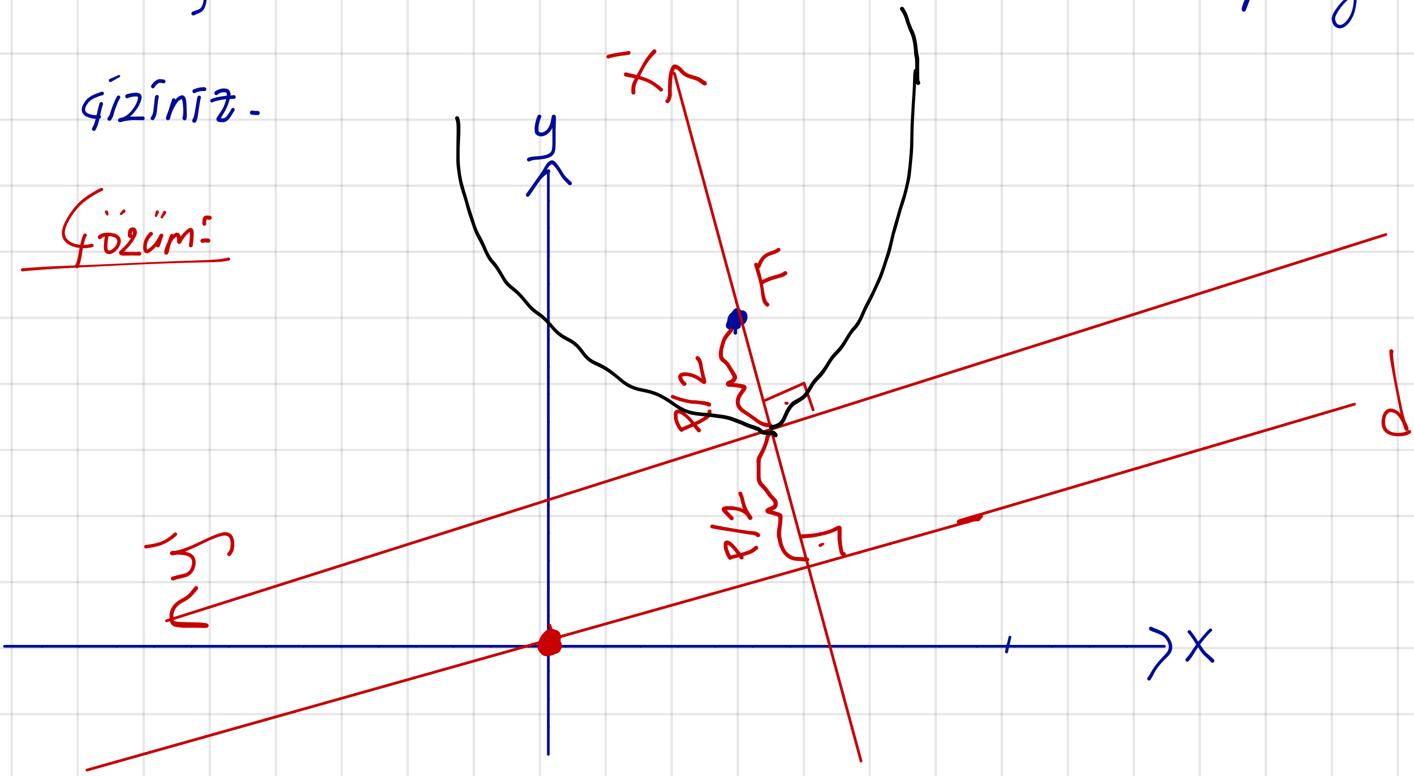
$N_0\in d$ olduğundan $a(x_0+at)+b(y_0+bt)+c=0$ sağlanır.

$(ax_0+by_0+c)+t(a^2+b^2)=0 \Rightarrow t=\dfrac{-(ax_0+by_0+c)}{a^2+b^2}$

$u(P_0,d)=u(P_0,N_0)=\|\overrightarrow{P_0N_0}\|=|t|\sqrt{a^2+b^2}=\dfrac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$ //

Ör: $F=(3,5)$ noktasına uzaklığı $2x-7y=0$ doğrusuna uzaklığına eşit olan noktalar kümesini bulup grafiğini çiziniz.

Çözüm:



$N=(x,y)$ olmak üzere, $u(N,F)=u(N,d) \Longleftrightarrow$

$$\sqrt{(x-3)^2+(y-5)^2} = \frac{|2x-7y|}{\sqrt{4+49}} \Leftrightarrow (x-3)^2+(y-5)^2 = \frac{(2x-7y)^2}{53}$$

$$\Leftrightarrow 53(x^2-6x+9+y^2-10y+25) = 4x^2-28xy+49y^2$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{49x^2+4y^2+28xy-318x-530y+1802=0}$$

Sorulan noktalar kümesi, denklemiyle verilen bir paraboldür.