Analitik Geometri 1

Bu dönem boyunca düzlem olarak $\mathbb{R}^2 := \{(x,y) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$ kümesi ele alınacak ve $\mathbb{R}^2$'nin geometrik özellikleri <u>analiz</u> edilecektir.

Belitsel (aksiyomatik, sentetik) geometri açısından sadece bir model-örnek gibi görünse de Öklit düzlemlerinin hepsi $\mathbb{R}^2$ ile eşyapılı (izomorf) olduğu için aslında TEK örnek de sayılabilir.

$\mathbb{R}^2$'de doğrular:

a ve b ikisi birden sıfır olmayan reel sayılar ve $c \in \mathbb{R}$ olmak üzere $\mathbb{R}^2$'de bir doğru $d = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid ax + by + c = 0\}$ altkümesi olarak tanımlanır.

<u>NOT:</u> Hiç bir aksiyom kabul edilmeyecek, sadece reel sayıların cebirsel özellikleri kullanılacaktır.

① **Önerme 1:**

d_1 ve d_2 iki doğru ise; $d_1 // d_2$ (çakışır ya da paralel) veya $d_1 \cap d_2$ (tek noktada kesişir).

İspat: $\{(x,y) \in R^2 \mid d_1 = a_1x + b_1y + c_1 = 0,\ d_2 = a_2x + b_2y + c_2 = 0\}$

$d_1 \neq d_2$ ise 3 durum var.

1) $b_1 = 0$, $b_2 = 0$ ($a_1 \neq 0$ veya $a_2 \neq 0$)

2) $b_1 = 0$, $b_2 \neq 0$ (ya da $b_1 \neq 0$, $b_2 = 0$)

3) $b_1 \neq 0$, $b_2 \neq 0$

Tanım: $d = \{(x,y) \in R^2 \mid ax + by + c = 0\}$ olsun.

$b = 0 \Rightarrow d$'nin eğimi $m = \infty$

$b \neq 0 \Rightarrow d$'nin eğimi $m = \frac{-a}{b}$

olarak tanımlanır.

1. durumda;

d_1 için $\Rightarrow x = \frac{-c_1}{a_1}$ $\quad d_2$ için $\Rightarrow x = \frac{-c_2}{a_2}$

$\frac{c_1}{a_1} = \frac{c_2}{a_2}$ ise $d_1 = d_2$ olur. $\quad \frac{c_1}{a_1} \neq \frac{c_2}{a_2}$ ise kesişim boşkümedir.

2. durumda;

d_1 için $\Rightarrow x = \frac{-c_1}{a_1}$ $\quad d_2$ için $\Rightarrow y = \underbrace{\frac{-c_2}{b_2}}_{n_2} \underbrace{- \frac{a_2}{b_2}}_{m_2} x \Rightarrow y = m_2x + n_2$

$(x,y) \in d_1 \cap d_2 \Leftrightarrow x = \frac{-c_1}{a_1}$ ve $y = m_2x + n_2$ olduğundan;

$y = m_2\left(\frac{-c_1}{a_1}\right) + n_2$ olur. Buradan; $d_1 \cap d_2 = \left\{\left(\frac{-c_1}{a_1},\ m_2\left(\frac{-c_1}{a_1}\right) + n_2\right)\right\}$ olur.

Yani tek noktada kesişirler.

3. durumda;

d_1 için $\Rightarrow y = \underbrace{-\frac{a_1}{b_1}}_{m_1} x \underbrace{- \frac{c_1}{b_1}}_{n_1}$ $\quad d_2$ için $\Rightarrow y = \underbrace{-\frac{a_2}{b_2}}_{m_2} x \underbrace{- \frac{c_2}{b_2}}_{n_2}$

$y = m_1x + n_1$ $\quad y = m_2x + n_2$

$(x,y) \in d_1 \cap d_2 \Leftrightarrow y = m_1x + n_1 = m_2x + n_2 \Leftrightarrow (m_1 - m_2)x = n_2 - n_1$

$m_1 = m_2$ ya da $m_1 \neq m_2$

$m_1 = m_2$:
- $n_1 = n_2$: doğrular çakışıktır.
- $n_1 \neq n_2$: kesişim boşküme. $d_1 \cap d_2 \neq 0$

$m_1 \neq m_2$:

$x_0 = \frac{n_2 - n_1}{m_1 - m_2}$

$y_0 = m_1\left(\frac{n_2 - n_1}{m_1 - m_2}\right) + n_1$

Sonuç: $d_1 \cap d_2 = \{(x_0, y_0)\}$

Sonuç 1:

$d_1 // d_2 \Leftrightarrow m_1 = m_2$

İspat: Önerme 1'in ispatındaki 3 durumda da ifade geçerlidir.

$d_1 \cap d_2 = \{(x_1,y_1),(x_2,y_2)\}$ ise $d_1 = d_2$ old. gösteriniz.

(Bir doğru iki nokta tarafından belirlenir.)

Cevap: Önerme 1'e göre herhangi iki doğru;

* Ya tek noktada kesişir.
* Ya paraleldir. (Kesişmez)
* Ya da çakışıktır. ($d_1 = d_2$, paralel)

Bu yüzden, $d_1 \cap d_2 =$ iki nokta ise bu doğrular çakışıktır. Yani $d_1 = d_2$ olmak zorundadır.

$d_1 = \{(x,y) \in R^2 \,/\, 2x+3y+5=0\}$
$d_2 = \{(x,y) \in R^2 \,/\, ax+12y+c=0\}$

a ve c ne olmalıdır ki $d_1 = d_2$ olsun?

Cevap:

$d_1 = d_2$ ise doğrular çakışıktır.

4 katı

$2x+3y+5=0 \Rightarrow ax+12y+c=0$

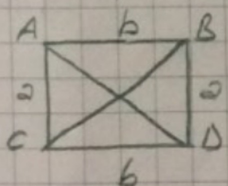
$ax+12y+c=0 \Rightarrow 2.4x+12y+5.4=0$

$\Rightarrow 8x+12y+20=0$ olur.

$a=8$ ve $c=20$'dir.

∵ $d_1 // d_2$ ve $d_1 \neq d_2$ olsaydı paralel ama çakışık olmazdı. Bu yüzden; $a=8$, $c \neq 20$ olurdu.

Bir dikdörtgenin köşegen uzunlukları eşittir. Gösteriniz.



Pisagordan; $|AD| = \sqrt{a^2+b^2} = |BC|$

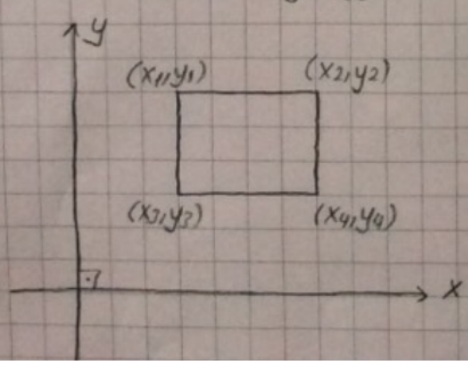
∵ Bu analitik olmayan bir çözüm.

Cevap: Bunu analitik olarak gösterirsek,

$A=(x_1,y_1)$, $B=(x_2,y_2)$, $C=(x_3,y_3)$, $D=(x_4,y_4)$ diyelim.

$d(A,D) = \sqrt{(x_1-x_4)^2+(y_1-y_4)^2}$ (d reel sayısına A ile D arasındaki uzaklık denir) (Öklid uzaklığı)

$d(B,C) = \sqrt{(x_2-x_3)^2+(y_2-y_3)^2}$



$$\left.\begin{array}{l} x_1 = x_3 \\ x_2 = x_4 \\ y_1 = y_2 \\ y_3 = y_4 \end{array}\right\} d(A,D) = d(B,C)$$

2) Önerme 2:

$\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid d_1 = a_1x+b_1y+c_1=0,\ d_2=a_2x+b_2y+c_2=0\}$ olmak üzere;

i) $d_1=d_2 \Leftrightarrow \exists k\in\mathbb{R}\setminus\{0\}\ \ (a_1,b_1,c_1)=k(a_2,b_2,c_2)$

ii) $d_1\neq d_2$ ve $d_1 \parallel d_2 \Leftrightarrow \exists k\in\mathbb{R}\setminus\{0\}\ \ (a_1,b_1)=k(a_2,b_2)$ ve $c_1\neq kc_2$.

İspat: Önerme 1'den $d_1\parallel d_2 \Leftrightarrow m_1=m_2$ olduğunu biliyoruz.

1. durum
$$\begin{cases} b_1=0 \Rightarrow m_1=\infty\ , & b_1\neq 0 \Rightarrow m_1=-\dfrac{a_1}{b_1} \\ b_2=0 \Rightarrow m_2=\infty\ , & b_2\neq 0 \Rightarrow m_2=-\dfrac{a_2}{b_2}\end{cases}$$
2. durum

1. durum: $m_1=m_2=\infty$ ise; $(b_1=b_2=0)$

d_1'in denklemi $\Rightarrow x=\dfrac{-c_1}{a_1}$, d_2'nin denklemi $\Rightarrow x=\dfrac{-c_2}{a_2}$ buradan;

$\dfrac{c_1}{a_1}=\dfrac{c_2}{a_2} \Rightarrow d_1=d_2$, $\dfrac{c_1}{a_1}\neq\dfrac{c_2}{a_2} \Rightarrow d_1\cap d_2=\emptyset$

(Yani $d_1\neq d_2$, $d_1\parallel d_2$ olur.)

2. durum: $m_1=m_2 \Rightarrow \dfrac{a_1}{b_1}=\dfrac{a_2}{b_2}$ ise; $(b_1\neq 0, b_2\neq 0)$

$\dfrac{a_1}{b_1}=\dfrac{a_2}{b_2} \Leftrightarrow a_1.b_2=a_2.b_1 \overset{?}{\Leftrightarrow} \exists k\in\mathbb{R}\setminus\{0\}:(a_1,b_1)=k(a_2,b_2)$

?: $a_2\neq 0$ ise $\dfrac{a_1}{a_2}=\dfrac{b_1}{b_2}=k \Rightarrow k=\dfrac{b_1}{b_2}\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$ ve $(a_1,b_1)=k(a_2,b_2)$

$a_2=0$ ise $a_1.b_2=0 \Rightarrow b_2\neq 0$ olduğundan $a_1=0$ olur. $k=\dfrac{b_1}{b_2}$ için istenen sağlanır

Demek ki, $d_1\parallel d_2 \Leftrightarrow \exists k\in\mathbb{R}\setminus\{0\}:(a_1,b_1)=k(a_2,b_2)$

$d_1\parallel d_2 \Leftrightarrow m_1=m_2=\infty$ veya $\dfrac{a_1}{b_1}=\dfrac{a_2}{b_2}$ 'dir.

$d_1\parallel d_2$ olsun.

$$\left.\begin{aligned} c_1=k.c_2 \Rightarrow a_1x+b_1y+c_1=k(\underbrace{a_2x+b_2y+c_2}_{0\ (\text{çünkü } k\neq 0)})=0\end{aligned}\right\} d_1=d_2$$

$c_1\neq k.c_2 \Rightarrow a_1x+b_1y+c_1=k.a_2x+kb_2y+c_1=0$ $(a_1=k.a_2,\ b_1=k.b_2)$

$d_1\cap d_2$'nin boş küme old. göstereceğiz.

Tersini kabul edelim, $(x,y)\in d_1\cap d_2$ olsun.

$k(a_2x+b_2y+c_2)=0$

$c_1-kc_2=0 \Rightarrow c_1=kc_2$ çelişki

$d_1\cap d_2=\emptyset$ 'dir.

İddia: R^2'deki bir doğru R ile 1-1 ve örten eşlenebilir.

İspat: $d: \{(x,y) \in R^2 \mid ax+by+c=0\}$ verilsin.

$\ell : R \to d$

$t \to \ell(t) = \{(-\frac{c}{a}), t\}$ eğer $b=0$ ise

$t \to \ell(t) = \{t, \frac{-a}{b}t - \frac{c}{b}\}$ eğer $b \neq 0$ ise

ℓ örten çünkü;

$ax+by+c=0$ için;

$b=0 \Rightarrow x = -\frac{c}{a}$, $b \neq 0 \Rightarrow y = \frac{-ax}{b} - \frac{c}{b}$ olduğundan;

$(x,y) \in d \Rightarrow \exists t \in R$, $\ell(t) = (x,y)$

$b=0 \Rightarrow t=y$, $b \neq 0 \Rightarrow t=x$

ℓ 1-1 çünkü;

$\ell(t) = \ell(s) \Rightarrow (-\frac{c}{a}, t) = (-\frac{c}{a}, s)$ veya;

$(t, -\frac{a}{b}t - \frac{c}{b}) = (s, \frac{-a}{b}s - \frac{c}{b})$ olur.

Her iki durumda da $t=s$ çıkar.
Yani ℓ'nin iyi tanımlı bir fonksiyon, 1-1 ve örten old. gösterdik.

$t_1 * t_2 * t_3 \Leftrightarrow \ell(t_1) * \ell(t_2) * \ell(t_3)$ old. gösteriniz.

! $f(t) = -t$ sıralamayı korumaz, değiştirir.

$t_1 < t_2 < t_3 \Rightarrow -t_3 < -t_2 < -t_1$ $(f: R \to R)$

$\left.\begin{array}{l} A = (n, t_1) \\ B = (n, t_2) \\ C = (n, t_3) \end{array}\right\}$ $x=n$ doğrusu üzerinde ise tanımdan; $A * C * B$'dir $\Leftrightarrow$ $n*n*n$ veya $t_1 * t_2 * t_3$'tür.

$\to$ olmaz çünkü birbirine eşit.

$y = mx+n$ doğrusu üz. A,B,C alalım.

$\overset{A}{(t_1, mt_1+n)}$, $\overset{B}{(t_2, mt_2+n)}$, $\overset{C}{(t_3, mt_3+n)}$

$A * B * C \Leftrightarrow t_1 * t_2 * t_3$ veya

$(mt_1+n) * (mt_2+n) * (mt_3+n) \Leftrightarrow t_1 * t_2 * t_3$

Çünkü;

$mt_1+n < mt_2+n < mt_3+n$

Koordinat Sistemleri

$$d_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y=0\} = \{(x,0) \mid x \in \mathbb{R}\}$$

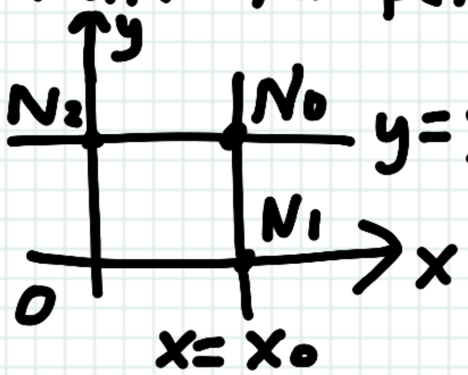
doğrusuna x-ekseni,

$$d_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x=0\} = \{(0,y) \mid y \in \mathbb{R}\}$$

doğrusuna y-ekseni ve

$d_1 \cap d_2 = \{(0,0)\}$ noktasına orijin diyelim.

$N_0=(x_0,y_0)$ sıralı ikilisini geometrik olarak şu şekilde göstereceğiz:



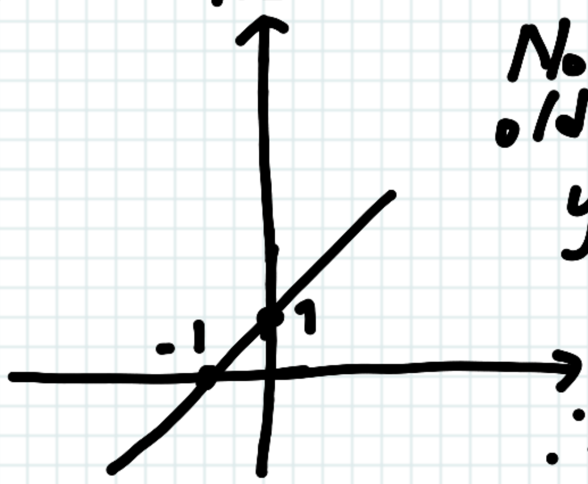
$$u(O,N_1) = \sqrt{(x_0-0)^2+(0-0)^2} = |x_0|$$

$$u(N_2,N_0) = \sqrt{(x_0-0)^2+(y_0-y_0)^2} = |x_0|$$

$$u(O,N_2) = \sqrt{(0-0)^2+(0-y_0)^2} = |y_0|$$

$$u(N_1,N_0) = \sqrt{(x_0-x_0)^2+(0-y_0)^2} = |y_0|.$$

<u>Ör:</u> $(-1,0)$ ve $(0,1)$'den geçen doğrunun grafiğini çiziniz. Denklemini yazınız.



Noktalar x'leri farklı olduğundan denklem: $y=mx+n$ tipinde.

$$0 = m(-1)+n \Rightarrow m=n=1$$

$$1 = m(0)+n \Rightarrow n=1$$

$$\therefore y = x+1 \;//$$