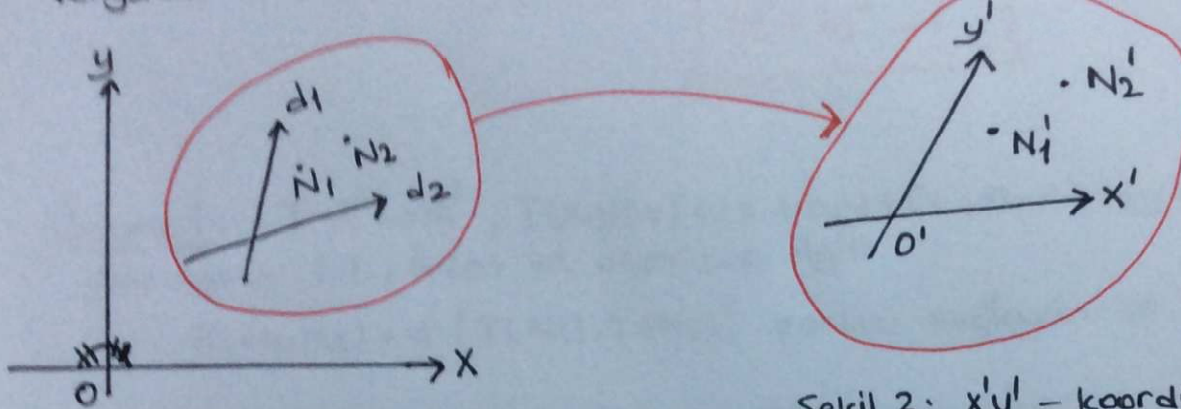
Afin Dönüşümler ve koordinat Sistemleri (12-16 Ekim)

Düzlemde kesişen herhangi iki doğru bir koordinat sistemi veriyordu. Şimdi, farklı koordinat sistemlerinin ilişkisini araştıralım.



Şekil 1: xy- koordinat sisteminde kesişen iki doğru: d_1 ve d_2

Şekil 2: $x'y'$ - koordinat sistemi

$d_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid a_1x + b_1y + c_1 = 0\} \longrightarrow y'$ eks. $= \{(x',y') \in \mathbb{R}^2 \mid x' = 0\}$

$d_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid a_2x + b_2y + c_2 = 0\} \longrightarrow x'$ eks $= \{(x',y') \in \mathbb{R}^2 \mid y' = 0\}$

aradaki ilişki

$$⊛ \quad \boxed{\begin{aligned} x' &= a_1x + b_1y + c_1 \\ y' &= a_2x + b_2y + c_2 \end{aligned}} \text{'dir.}$$

$u(N_1,N_2) = \sqrt{(x_1-x_2)^2 + (y_1-y_2)^2}$ reel sayısı, N_1, N_2 arasındaki uzaklık,

$u'(N_1',N_2') = \sqrt{(x_1'-x_2')^2 + (y_1'-y_2')^2}$ " , N_1', N_2' " " idi.

Şimdi ⊛'ı ve u''nü kullanarak xy - koord. sisteminde başka bir uzaklık formülü elde edebiliriz.

$\bar{u}(N_1,N_2) := u'(N_1',N_2')$ dersek,

$$\bar{u}(N_1,N_2) = \sqrt{[(a_1x_1 + b_1y_1 + c_1) - (a_1x_2 + b_1y_2 + c_2)]^2 + [(a_2x_1 + b_2y_1 + c_2) - (a_2x_2 + b_2y_2 + c_2)]^2}$$

$$= \sqrt{[a_1(x_1-x_2) + b_1(y_1-y_2)]^2 + [a_2(x_1-x_2) + b_2(y_1-y_2)]^2}$$

$$= \sqrt{(a_1^2+a_2^2)(x_1-x_2)^2 + 2(a_1b_1 + a_2b_2)(x_1-x_2)(y_1-y_2) + (b_1^2+b_2^2)(y_1-y_2)^2}$$

olur.

Ödev 1) $d_1 \cap d_2 = \{0'\} \iff a_1 b_2 - a_2 b_1 \neq 0$

2) $u(N_1,N_2) = \bar{u}(N_1,N_2) \iff \boxed{\begin{array}{l} a_1^2 + a_2^2 = 1 \\ a_1 b_1 + a_2 b_2 = 0 \\ b_1^2 + b_2^2 = 1 \end{array}}$

Önerme 1: $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $T(x,y) = (a_1 x + b_1 y + c_1 , a_2 x + b_2 y + c_2)$ fonksiyonu 1-1, örten ve uzaklıkla ilgili

$\bar{u}(N_1,N_2) = u'(T(N_1), T(N_2))$ şartını sağlayan bir dönüşümdür.

Yorum: Bu önerme sayesinde artık iki nokta arasındaki uzaklığı xy-koord. sisteminde $\bar{u}$ formülüyle, x'y'- koord. sisteminde $\underline{\underline{u'}}$ formülüyle hesaplayabiliriz.

ispat: $d_1 \cap d_2 = \{0'\}$ olduğundan ÖDEV 1) $\Rightarrow a_1 b_2 \neq a_2 b_1$

dolayısıyla $T^{-1}(x',y') = \dfrac{1}{a_1 b_2 - a_2 b_1}\Big(b_2(x'-c_1) - b_1(y'-c_2), -a_2(x'-c_1) + a_1(y'-c_2)\Big)$

tanımlı bir fonksiyondur. (gösteriniz. ÖDEV 3)

$T \circ T^{-1}(x',y') = (x',y')$ ve $T^{-1} \circ T(x,y) = (x,y)$ olduğundan,

Soyut matematik $\Rightarrow$ T (ve T^{-1}) 1-1 ve örtendir.

$N_i = (x_i, y_i)$ için $T(N_i) = (x_i', y_i') = N_i'$ dersek

$\bar{u}(N_1,N_2) = u'(N_1', N_2')$ olarak tanımlandığı için ispat biter.

Önerme 2: T dönüşümü (T^{-1} gibi) doğruları doğrulara dönüştürür.

ispat: $d' = \{(x',y') \in \mathbb{R}^2 \mid ax' + by' + c = 0\}$ olsun. $(x',y') = T(x,y)$ için

$f(x',y') = f(T(x,y)) = (f \circ T)(x,y)$ olduğundan $f(x',y') = 0 \iff (f \circ T)(x,y) = 0$

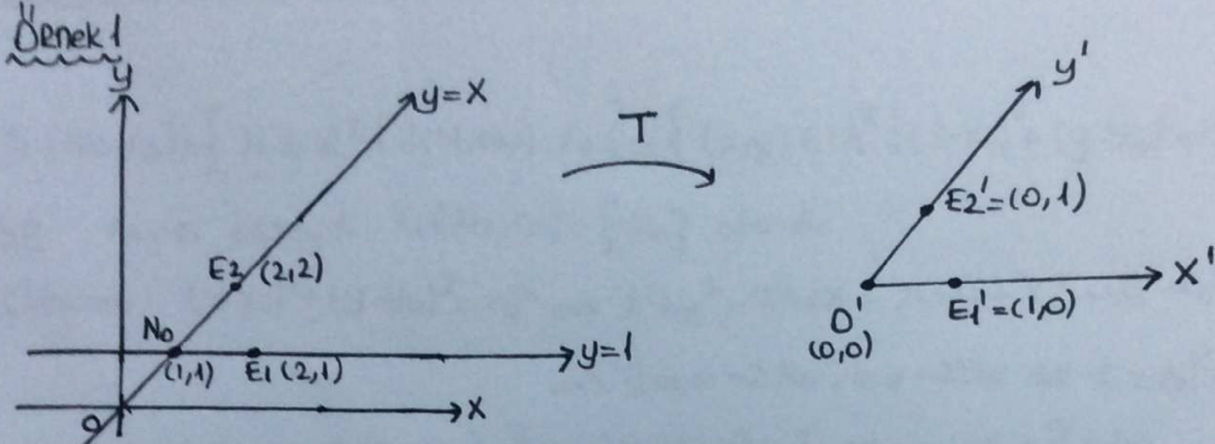
$f(x',y') = ax' + by' + c$ iken;

$(f \circ T)(x,y) = a(a_1 x + b_1 y + c_1) + b(a_2 x + b_2 y + c_2) + c = (a.a_1 + b a_2)x + (a.b_1 + b.b_2)y + (a.c_1 + b c_2 + c)$ dur.

$d=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid (f\circ T)(x,y)=0\}$ bir doğru olduğundan ve

$(x,y)\in d \Leftrightarrow T(x,y)\in d'$ olduğundan ispat biter.

Örnek 1



$T(x,y)=(x-y,\,y-1)$ ve $T^{-1}(x',y')=(x'+y'+1,\,y'+1)$

$T^{-1}(0,0)=(1,1)=N_0$ $\quad T^{-1}(E_1')=T^{-1}(1,0)=(2,1)=E_1$ $\quad T^{-1}(E_2')=T^{-1}(0,1)=(2,2)=E_2$

$$\left.\begin{array}{l} u(N_0,E_1)=\sqrt{(2-1)^2+(1-1)^2}=1 \\ \bar{u}(N_0,E_1)=u'(0',E_1')=\sqrt{(1-0)^2+(0-0)^2}=1 \end{array}\right\} u(N_0,E_1)=\bar{u}(N_0,E_1)$$

$$\left.\begin{array}{l} u(N_0,E_2)=\sqrt{(2-1)^2+(2-1)^2}=\sqrt{2} \\ \bar{u}(N_0,E_2)=u'(0',E_2')=\sqrt{(0-0)^2+(1-0)^2}=1 \end{array}\right\} u(N_0,E_2)\neq\bar{u}(N_0,E_2)$$

Bu sürpriz olmamalı çünkü $T(x,y)=(x-y,\,y-1)$ iken $\quad a_1=1 \quad b_1=-1 \quad c_1=0$
$\quad a_2=0 \quad b_2=1 \quad c_2=0$

ve $\quad a_1^2+a_2^2=1=1$
$a_1b_1+a_2b_2=-1\neq 0$
$b_1^2+b_2^2=\sqrt{2}\neq 1$!

$x'=y' \Leftrightarrow x-y=y-1 \Leftrightarrow x+1=2y \Leftrightarrow y=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$

olduğu için $d'=\{(x',y')\in\mathbb{R}^2 \mid x'-y'=0\}$ ile $d=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x-2y+1=0\}$ doğruları arasında (T ve T^{-1} vasıtasıyla) 1-1 ve örten bir eşleme kurulur.

Diğer bir ifadeyle, $d'=T(d)$ ve $d=T^{-1}(d')$ olur.

ÇEMBER

Klasik olarak çember, düzlemde sabit bir noktaya sabit (eşit) uzaklıktaki noktaların kümesi olarak tanımlanır. Yani $r_0 \in \mathbb{R}_+$

$$Ç(N_0, r_0) = \{ N \in \mathbb{R}^2 \mid d(N, N_0) = r_0 \} = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 = r_0^2 \}$$

Not $r_0 = 0$ olsaydı $Ç(N_0, r_0) = \{N_0\}$ olurdu

Gözlem $(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 = r_0^2 \Rightarrow x^2+y^2-2x_0x-2y_0y+x_0^2+y_0^2-r_0^2=0$

$$\Rightarrow \exists a = -2x_0, \; b = -2y_0 \text{ ve } c = x_0^2+y_0^2-r_0$$

reel sayıları vardır ki $Ç(N_0, r_0) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2+ax+by+c=0\}$ 'dır.
Burada $a^2+b^2-4c = 4r_0^2$ olduğuna dikkat ediniz.

Önerme 3 $Ç = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2+ax+by+c=0\}$ kümesi bir çember belirtir $\Leftrightarrow a^2+b^2-4c > 0$ 'dır. (Not: dik koord.'da geçerli)

İspat $\Rightarrow$ Gözlemde ele alındı.
$\Leftarrow$ $x^2+y^2+ax+by+c=0$ ve $a^2+b^2-4c>0$ olsun

$$\Rightarrow \left(x+\frac{a}{2}\right)^2 - \frac{a^2}{4} + \left(y+\frac{b}{2}\right)^2 - \frac{b^2}{4} + c = 0 \Rightarrow \left(x+\frac{a}{2}\right)^2 + \left(y+\frac{b}{2}\right)^2 = \frac{a^2+b^2-4c}{4}$$

$r_0 = \dfrac{\sqrt{a^2+b^2-4c}}{2} \in \mathbb{R}$ olduğundan $Ç = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \left(x+\frac{a}{2}\right)^2 + \left(y+\frac{b}{2}\right)^2 = r_0^2\right\}$ olur

Yani $Ç = Ç\left(\left(-\frac{a}{2}, -\frac{b}{2}\right), r_0\right)$ 'dır.

Örnek: 2) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 2x^2+3y^2+4x+6y+2=0\}$ çember mi? Hayır çünkü x^2 ve y^2 'nin katsayıları aynı değil

3) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 2x^2+2y^2+4x+6y+2=0\}$ çember mi? Evet çünkü

$$\Updownarrow$$

$$x^2+y^2+2x+3y+1=0 \rightarrow a=2, b=3, c=1 \Rightarrow a^2+b^2-4c = 9 > 0$$