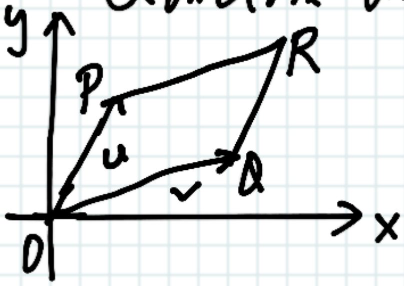
Vektör Cebiri:

Toplama: $\vec{u}=(u_1,u_2)$, $\vec{v}=(v_1,v_2)$ için $\vec{u}+\vec{v}:=(u_1+u_2, v_1+v_2)$.

Geometrik Yorum: $\vec{u}=\overrightarrow{OP}$, $\vec{v}=\overrightarrow{OQ}$ ve $\vec{u}+\vec{v}=\overrightarrow{OR}$ ise



$\overrightarrow{PR}=R-P=(u_1+u_2-u_1, v_1+v_2-v_1)=(u_2,v_2)=\vec{v}$

$\overrightarrow{QR}=R-Q=(u_1+u_2-u_2, v_1+v_2-v_2)=(u_1,v_1)=\vec{u}$

Toplama İşleminin özellikleri: Her $\vec{u},\vec{v},\vec{w}$ vektörü için:

1) $\vec{u}+(\vec{v}+\vec{w})=(\vec{u}+\vec{v})+\vec{w}$ 2) $\vec{u}+\vec{v}=\vec{v}+\vec{u}$

3) $\vec{0}=(0,0)$ için $\vec{u}+\vec{0}=\vec{u}$ 4) $\forall\,\vec{u}\ \exists\,\vec{v}: \vec{u}+\vec{v}=\vec{0}$.

İspat: 1) $u_i,v_i,w_i\in\mathbb{R}$ için $u_i+(v_i+w_i)=(u_i+v_i)+w_i$, $i=1,2$, olduğu için $\vec{u}+(\vec{v}+\vec{w})=(u_1+(v_1+w_1), u_2+(v_2+w_2))=((u_1+v_1)+w_1,(u_2+v_2)+w_2)=(\vec{u}+\vec{v})+\vec{w}$.

2) $u_i,v_i\in\mathbb{R}$ için $u_i+v_i=v_i+u_i$, $i=1,2$, old. $\vec{u}+\vec{v}=\vec{v}+\vec{u}$ olur.

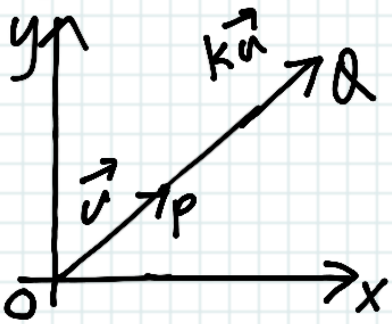
3) Açık 4) $v=(-u_1,-u_2)$ istenen özelliktedir.

Tanım: $\vec{0}$'ya birim vektör, $\vec{v}=(-u_1,-u_2)$'ye $\vec{u}$'nun negatifi denir.

Sabitle (Skalerle) Çarpma:

$k\in\mathbb{R}$ $\vec{u}=(u_1,u_2)$ için $k\vec{u}:=(ku_1,ku_2)$ olarak tanımlanır.

Geometrik Yorum: $\vec{u}=\overrightarrow{OP}$ ve $k\vec{u}=\overrightarrow{OQ}$ ise Q, $\overleftrightarrow{OP}$ doğrusu üzerindedir.



Çünkü, $u_1=0$ ise $ku_1=0$ ve $\overleftrightarrow{OP}=\overleftrightarrow{PQ}$'nun denk: $x=0$.

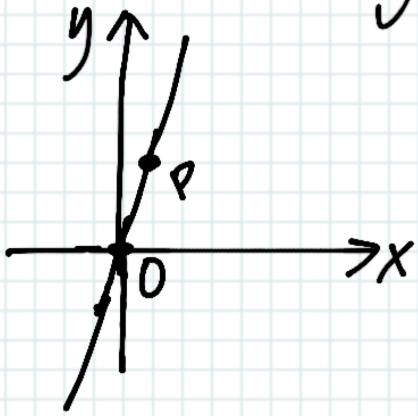
$u_1\neq 0$ iken $k=0$ ise $Q=O$ olur. $k\neq 0$ ise

$ku_1\neq 0$ olur. $m=\frac{u_2}{u_1}=\frac{ku_2}{ku_1}\in\mathbb{R}$ için

$\overleftrightarrow{OP}=\overleftrightarrow{PQ}=\overleftrightarrow{OQ}$ doğrusunun denklemi: $y=mx$.

Ör: $\vec{u}=(1,3)$ $k\vec{u}=(k,3k)$, $k\in\mathbb{R}$ için.
$=\overrightarrow{OP}$

$\overleftrightarrow{OP}$ doğrusu: $(0,0)$'dan ve $(1,3)$'den geçen TEK doğrudur ve denklemi $y=3x$'dir.



Aslında, $k\vec{u}$ vektörleri ile $d=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid y=3x\}$ doğrusunun noktaları 1-1 ve örten eşlenebilir:

$$\boxed{\begin{array}{l}\varphi: \mathbb{R}\to d \\ \quad k\to(k,3k)\end{array}}$$

Sabitle Çarpmanın Özellikleri:

Her $k,\ell\in\mathbb{R}$ ve $\vec{u},\vec{v}$ için

1) $k(\ell\vec{u})=(k\ell)\vec{u}$ 2) $(k+\ell)\vec{u}=k\vec{u}+\ell\vec{u}$

3) $k(\vec{u}+\vec{v})=k\vec{u}+k\vec{v}$ 4) $1\vec{u}=\vec{u}$

İspat: Ödev.

İÇ ÇARPIM (Nokta Çarpımı)

$\vec{u}=(u_1,u_2)$ $\vec{v}=(v_1,v_2)$ için $\vec{u}\cdot\vec{v}:=u_1v_1+u_2v_2$ olarak tanımlanır.

Özellikleri: Her $\vec{u},\vec{v},\vec{w}$ ve $k\in\mathbb{R}$ için:

1) $\vec{u}\cdot\vec{u}\geqslant 0$. Ayrıca $\vec{u}\cdot\vec{u}=0 \Leftrightarrow \vec{u}=0$.

2) $\vec{u}\cdot\vec{v}=\vec{v}\cdot\vec{u}$ 3) $(k\vec{u})\cdot\vec{v}=k(\vec{u}\cdot\vec{v})$

4) $(\vec{u}+\vec{v})\cdot\vec{w}=\vec{u}\cdot\vec{w}+\vec{v}\cdot\vec{w}$

İspat: Ödev.

Tanım: $\|\vec{u}\|:=\sqrt{\vec{u}\cdot\vec{u}}$ sayısına $\vec{u}$'nun boyu denir.

Ödev: $\|\overrightarrow{AB}\| = u(A,B)$ olduğunu gösteriniz.

Önerme (Cauchy-Schwartz Eşitsizliği): $|\vec{u}\cdot\vec{v}| \leq \|\vec{u}\|\|\vec{v}\|$.

İspat: $\vec{u}\cdot\vec{v} = u_1v_1+u_2v_2$ old. $|\vec{u}\cdot\vec{v}|^2 = (u_1v_1+u_2v_2)^2$ olur.

Yani, $|\vec{u}\cdot\vec{v}|^2 = u_1^2v_1^2+2u_1v_1u_2v_2+u_2^2v_2^2$ olur.

Öte yandan, $\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|^2 = (u_1^2+u_2^2)(v_1^2+v_2^2) = u_1^2v_1^2+u_1^2v_2^2+u_2^2v_1^2+u_2^2v_2^2$ 'dir.

$$\begin{aligned}\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|^2 - |\vec{u}\cdot\vec{v}|^2 &= u_1^2v_2^2+u_2^2v_1^2-2u_1v_1u_2v_2\\ &= u_1v_2(u_1v_2-v_1u_2)+u_2v_1(u_2v_1-u_1v_2)\\ &= u_1v_2(u_1v_2-v_1u_2)-u_2v_1(u_1v_2-u_2v_1)\\ &= (u_1v_2-u_2v_1)^2 \geqslant 0.\end{aligned}$$

$\Rightarrow \|\vec{u}\|\|\vec{v}\|^2 \geqslant |\vec{u}\cdot\vec{v}|^2 \Rightarrow \|\vec{u}\|\|\vec{v}\| \geqslant |\vec{u}\cdot\vec{v}|$ $\square$

Önerme (Üçgen Eşitsizliği): $\|\vec{u}+\vec{v}\| \leq \|\vec{u}\|+\|\vec{v}\|$.