Ör: $x^2+2\sqrt{3}xy+ay^2-2\sqrt{3}x-2ay-3a=0$.

$$A=\begin{bmatrix}1 & \sqrt{3} & -\sqrt{3}\\ \sqrt{3} & a & -a\\ -\sqrt{3} & -a & -3a\end{bmatrix}$$

$$\left.\begin{array}{l} x_0+\sqrt{3}y_0=\sqrt{3}\\ \sqrt{3}x_0+ay_0=a\end{array}\right\} \Rightarrow (a-3)\,y_0=(a-3)$$

$\boxed{a\neq 3 \text{ iken}}$ $y_0=1$ ve $x_0=1-y_0=0$ olur.

$x=x'$ ve $y=y'+1 \Leftrightarrow T_{(0,-1)}$ ötelemesi

$x'^2+2\sqrt{3}x'(y'+1)+a(y'+1)^2-2\sqrt{3}x'-2a(y'+1)-3a=0$

$x'^2+2\sqrt{3}x'y'+ay'^2-4a=0$ olur.

Dikkat edilirse x^2, xy ve y^2'nin katsayısı değişmedi; x ve y yok oldu. Sabit terim $F(0,1)=-4a$ oldu!

$$\left.\begin{array}{l} x'=\cos\theta\, x''-\sin\theta\, y''\\ y'=\sin\theta\, x''+\cos\theta\, y''\end{array}\right\} R_\theta(x',y')=(x'',y'') \text{ dönmesi}$$

yapılınca denklem aşağıdaki gibi olur:

$[\cos^2\theta\, x''^2-2\cos\theta\sin\theta\, x''y''+\sin^2\theta\, y''^2]+2\sqrt{3}[\cos\theta\sin\theta\, x''^2+(\cos^2\theta-\sin^2\theta)x''y''-$
$-\sin\theta\cos\theta\, y''^2]+a[\sin^2\theta\, x''^2+2\sin\theta\cos\theta\, x''y''+\cos^2\theta\, y''^2]-4a=0.$

Düzenlersek;

$[\cos^2\theta+2\sqrt{3}\cos\theta\sin\theta+a\sin^2\theta]x''^2+[2\sqrt{3}\cos 2\theta+(a-1)\sin 2\theta]\,x''y''+$
$+[\sin^2\theta-2\sqrt{3}\sin\theta\cos\theta+a\cos^2\theta]y''^2-4a=0$ olur.

$2\sqrt{3}\cos 2\theta+(a-1)\sin 2\theta=0 \Leftrightarrow 2\sqrt{3}\cos 2\theta=(1-a)\sin 2\theta \Leftrightarrow \boxed{\tan 2\theta=\dfrac{2\sqrt{3}}{1-a}}$

Ör: $x^2+2\sqrt{3}xy+ay^2-2\sqrt{3}x-2ay-3a=0$

$$A=\begin{bmatrix} 1 & \sqrt{3} & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & a & -a \\ -\sqrt{3} & -a & -3a \end{bmatrix} \qquad |A_{33}|=a-3 \quad \begin{cases} a=3 \Rightarrow |A_{33}|=0 \\ a\neq 3 \Rightarrow |A_{33}|\neq 0. \end{cases}$$

Dönme: $\left.\begin{array}{l} x=\cos\theta x'-\sin\theta y' \\ y=\sin\theta x'+\cos\theta y' \end{array}\right\}$ $R_\theta(x,y)=(x',y')$ dönmesi uygulanınca denklem

$$(\cos\theta x'-\sin\theta y')^2+2\sqrt{3}(\cos\theta x'-\sin\theta y')(\sin\theta x'+\cos\theta y')+a(\sin\theta x'+\cos\theta y')^2-$$

$$-2\sqrt{3}(\cos\theta x'-\sin\theta y')-2a(\sin\theta x'+\cos\theta y')-3a=0$$ halini alır.

$$(\cos^2\theta+\sqrt{3}\sin 2\theta+a\sin^2\theta)x'^2+\underline{(2\sqrt{3}\cos 2\theta+(a-1)\sin 2\theta)}x'y'+(\sin^2\theta-\sqrt{3}\sin 2\theta+$$

$$+a\cos^2\theta)y'^2+(-2\sqrt{3}\cos\theta-2a\sin\theta)x'+(2\sqrt{3}\sin\theta-2a\cos\theta)y'\boxed{-3a}=0$$

sabit değişmedi

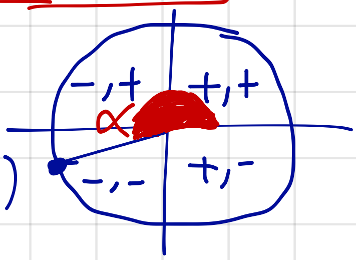
$x'y'$'nün katsayısını yok eden açı:

$a=1$ iken $\boxed{\begin{array}{l}\cos 2\theta=0 \\ \theta=\pi/4\end{array}}$ $a\neq 1$ iken $\tan 2\theta=\dfrac{2\sqrt{3}}{1-a}$ $\begin{cases} a=3 \text{ ise} \\ a=-1 \text{ ise} \end{cases}$

$a=-1$ iken $\tan 2\theta=\sqrt{3} \Rightarrow \boxed{\sin 2\theta=\sqrt{3}/2 \text{ ve } \cos 2\theta=1/2}$

veya $\boxed{\sin 2\theta=-\sqrt{3}/2 \text{ ve } \cos 2\theta=-1/2}$, çünkü

$(\cos\alpha, \sin\alpha)$



İlk durumda $2\theta=\dfrac{\pi}{3}$ ve $\boxed{\theta=\dfrac{\pi}{6}}$ iken ikinci durumda $2\theta=\dfrac{4\pi}{3}$ ve $\boxed{\theta=\dfrac{2\pi}{3}}$ olur.

Bu açılardan herhangi birini seçebiliriz.

$a=3$ iken $\tan 2\theta = -\sqrt{3}$ yani 2θ açısı 2. veya 4. bölgededir. Bu yüzden $2\theta = \pi - \frac{\pi}{3}$ veya $2\theta = -\frac{\pi}{3}$ olur.

Yani, $\boxed{\theta = \frac{\pi}{3}}$ veya $\boxed{\theta = -\frac{\pi}{6}}$ açılarından herhangi birini seçebiliriz.

Not: Genel olarak, açıyı seçerken $\tan 2\theta > 0$ ise 1. bölgedeki açı, $\tan 2\theta < 0$ iken 4. bölgedeki açıyı seçmek yeterlidir.

Soru 1: $x^2 + 2\sqrt{3}xy + 3y^2 - 2\sqrt{3}x - 6y - 9 = 0$ denklemi hangi geometrik şekli belirtir bulup grafiğini çiziniz.

$$\tan 2\theta = \frac{2\sqrt{3}}{1-3} \begin{array}{l} \to xy\text{'nin katsayısı} \\ \to x^2\text{'nin katsayısı} - y^2\text{'nin katsayısı} \end{array}$$

$\tan 2\theta = -\sqrt{3}$, 4. bölgede tanjantı $\sqrt{3}$ olan açı $-\frac{\pi}{3}$ olduğundan $\boxed{\theta = -\frac{\pi}{6}}$ olur.

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(-\frac{\pi}{6}) & -\sin(-\frac{\pi}{6}) \\ \sin(-\frac{\pi}{6}) & \cos(-\frac{\pi}{6}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{3}/2 & 1/2 \\ -1/2 & \sqrt{3}/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} \Leftrightarrow \quad x = \frac{1}{2}(\sqrt{3}x' + y') \quad y = \frac{1}{2}(-x' + \sqrt{3}y')$$

$$\frac{1}{4}(3x'^2 + 2\sqrt{3}x'y' + y'^2) + \frac{2\sqrt{3}}{4}(-\sqrt{3}x'^2 + 3x'y' - x'y' + \sqrt{3}y'^2) + \frac{3}{4}(x'^2 - 2\sqrt{3}x'y' + 3y'^2)$$

devamı arkada

$-\sqrt{3}\left(\sqrt{3}x'+y'\right)-3\left(-x'+\sqrt{3}y'\right)-9=0$ olur.

Denklem: $4y'^2-4\sqrt{3}y'-9=0$ şeklini alır.

$\Delta=(-2\sqrt{3})^2-4(-9)=12+36=48>0$

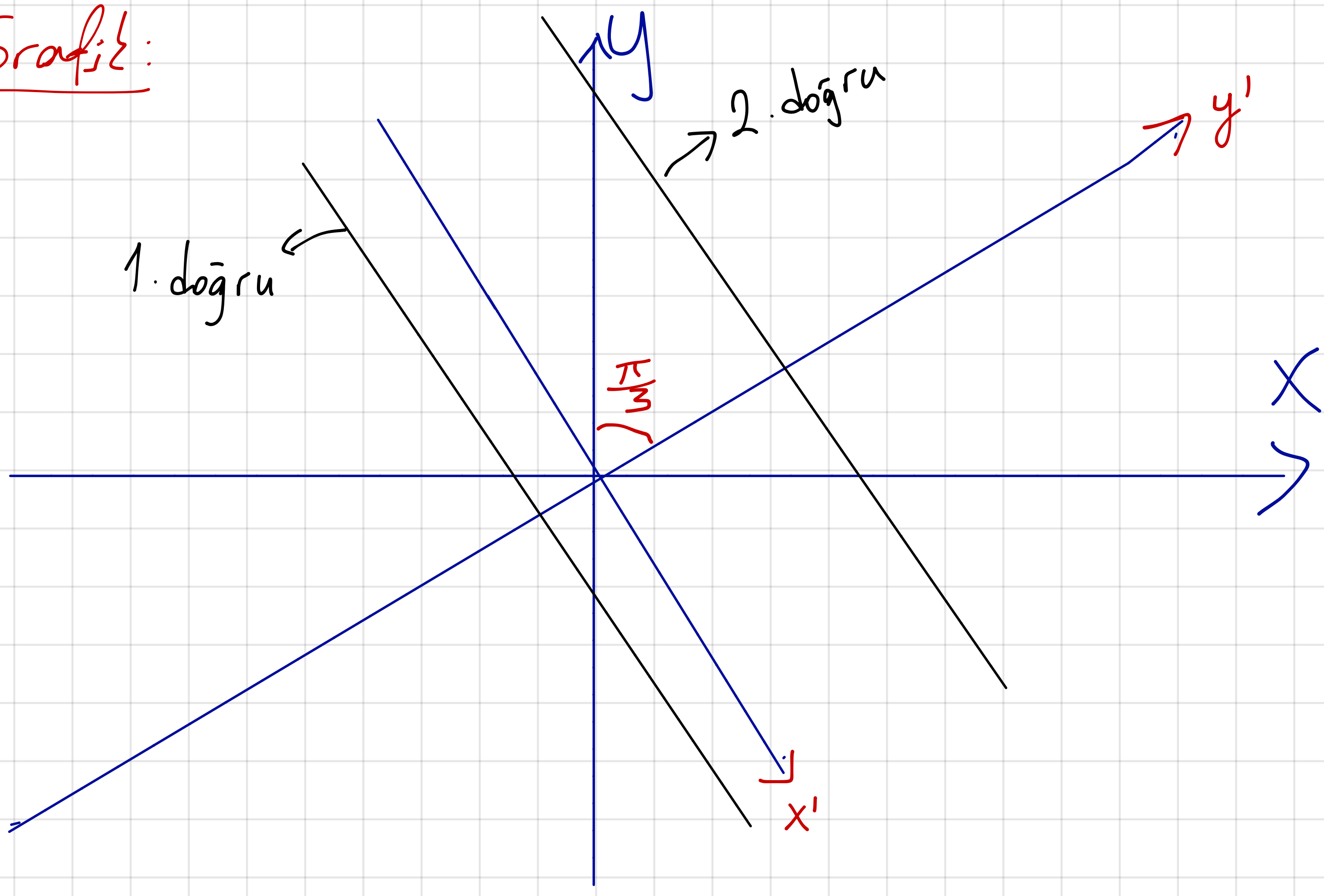
$y'_{1,2}=\dfrac{2\sqrt{3}\mp4\sqrt{3}}{4}=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ veya $\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$ olur.

$\underline{4\left(y'+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(y'-\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)=0} \Leftrightarrow \boxed{y'=-\frac{\sqrt{3}}{2} \text{ doğrusu}}$ veya $\boxed{y'=\frac{3\sqrt{3}}{2} \text{ doğrusu}}$

Denklemin son hali

Soruda verilen denklem geometrik olarak iki doğrunun birleşimidir, çünkü dönme şeklin tipini korur.

Grafik:



Soru2: $x^2+2\sqrt{3}xy-y^2-2\sqrt{3}x+2y+3=0$ denklemi hangi geometrik şekli belirtir bulup grafiğini çiziniz.

$\tan 2\theta = \frac{2\sqrt{3}}{1-(-1)} = \sqrt{3} \Rightarrow 2\theta = \frac{\pi}{3} \Rightarrow \boxed{\theta = \frac{\pi}{6}}$

$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{3}/2 & -1/2 \\ 1/2 & \sqrt{3}/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$ yani $x = \frac{1}{2}(\sqrt{3}x'-y')$ ve $y = \frac{1}{2}(x'+\sqrt{3}y')$

$\frac{1}{4}(3x'^2-2\sqrt{3}x'y'+y'^2)+\frac{2\sqrt{3}}{4}(\sqrt{3}x'^2+3x'y'-x'y'-\sqrt{3}y'^2)-\frac{1}{4}(x'^2+2\sqrt{3}x'y'+3y'^2)-$

$-\frac{2\sqrt{3}}{2}(\sqrt{3}x'-y')+\frac{2}{2}(x'+\sqrt{3}y')+3=0$ denklemi

$\boxed{2x'^2-2y'^2-2x'+2\sqrt{3}y'+3=0}$ şeklini alır.

$\begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & \sqrt{3} \\ -1 & \sqrt{3} & 3 \end{bmatrix}$ $\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = -4 \neq 0$ olduğu için öteleme ile hem x' hem de y' yok edilebilir.

$\begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & \sqrt{3} \end{bmatrix} \Leftrightarrow \left. \begin{array}{l} 2x_0+0y_0-1=0 \\ 0x_0-2y_0+\sqrt{3}=0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} 2x_0=1 \\ 2y_0=\sqrt{3} \end{array}$ yani $\begin{array}{l} x_0 = 1/2 \\ y_0 = \sqrt{3}/2 \end{array}$

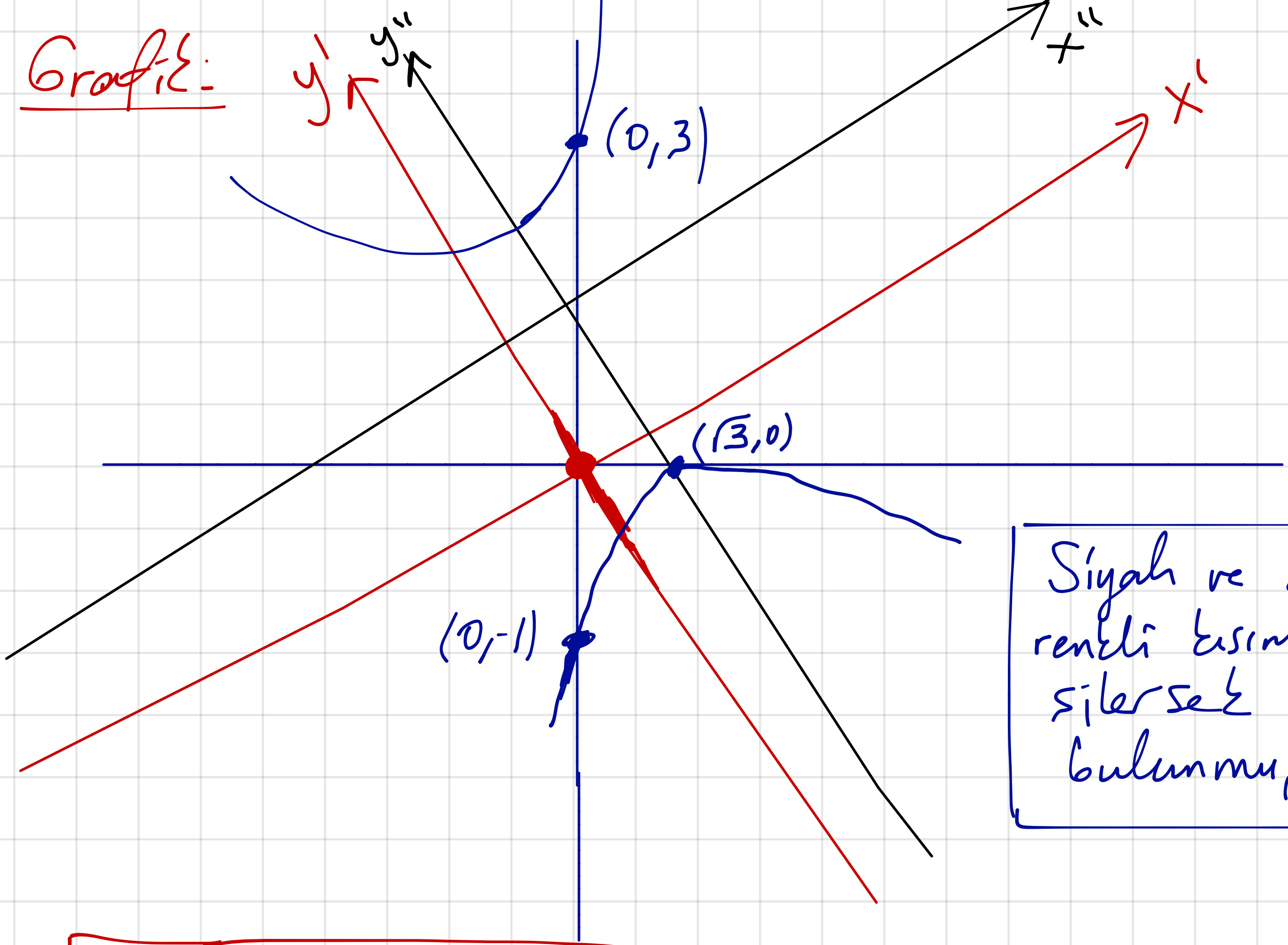
$\left. \begin{array}{l} x' = x''+x_0 = x''+1/2 \\ y' = y''+y_0 = y''+\sqrt{3}/2 \end{array} \right\}$ yazarsak denklem

$2(x''^2+x''+1/4)-2(y''^2+\sqrt{3}y''+3/4)-2(x''+1/2)+2\sqrt{3}(y''+\sqrt{3}/2)+3=0,$

$\boxed{2x''^2-2y''^2+4=0} \Leftrightarrow \boxed{\frac{-x''^2}{2}+\frac{y''^2}{2}=1}$ şeklini alır.

Dönme ve öteleme geometriyi koruduğu için denklem hiperbol belirtir.

Grafik:



Siyah ve kırmızı renkli kısımları silersek grafik bulunmuş olur.

$$\boxed{x^2+2\sqrt{3}xy-y^2-2\sqrt{3}x+2y+3=0}$$

$x=0 \Rightarrow -y^2+2y+3=0 \quad \Delta=1^2-(-1)3=4>0 \quad y_{1,2}=\frac{-1\mp 2}{-1}$

yani y-kesenleri: $y_1=3 \quad y_2=-1$.

$y=0 \Rightarrow x^2-2\sqrt{3}x+3=0 \Leftrightarrow (x-\sqrt{3})^2=0 \Rightarrow$ x-keseni $x_{1,2}=\sqrt{3}$.

NOT: Yukarıdaki soruyu önce öteleme sonra dönme uygulayarak çözersek:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & \sqrt{3} & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & -1 & 1 \end{array}\right] \leftrightarrow \begin{aligned} x_0+\sqrt{3}y_0 &= \sqrt{3} \\ \sqrt{3}x_0-y_0 &= -1 \end{aligned} \Leftrightarrow \begin{aligned} x_0+\sqrt{3}y_0 &= \sqrt{3} \\ 3x_0-\sqrt{3}y_0 &= -\sqrt{3} \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \begin{aligned} x_0+\sqrt{3}y_0 &= \sqrt{3} \\ 4x_0+0y_0 &= 0 \end{aligned} \Leftrightarrow \begin{aligned} x_0+\sqrt{3}y_0 &= \sqrt{3} \\ x_0 &= 0 \end{aligned} \Leftrightarrow \begin{aligned} y_0 &= 1 \\ x_0 &= 0 \end{aligned}.$$

$\left.\begin{array}{l} x = x' + x_0 = x' \\ y = y' + y_0 = y' + 1 \end{array}\right\}$ formülünü denkleme uygularsak

$$x'^2 + 2\sqrt{3}(x'y' + x') - (y'^2 + 2y' + 1) - 2\sqrt{3}x' + 2(y'+1) + 3 = 0$$

$$\boxed{x'^2 + 2\sqrt{3}x'y' - y'^2 + 4 = 0} \qquad \tan 2\theta = \frac{2\sqrt{3}}{1-(-1)} = \sqrt{3}$$

yine $\theta = \frac{\pi}{6}$ radyan dönme yapılacak.

$x' = \frac{1}{2}(\sqrt{3}x'' - y'')$ ve $y' = \frac{1}{2}(x'' + \sqrt{3}y'')$

$$\frac{1}{4}\left(3x''^2 - 2\sqrt{3}x''y'' + y''^2\right) + \frac{2\sqrt{3}}{4}\left(\sqrt{3}x''^2 + 2x''y'' - \sqrt{3}y''^2\right) - \frac{1}{4}\left(x''^2 + 2\sqrt{3}x''y'' + 3y''^2\right) + 4 = 0$$

$$\boxed{2x''^2 - 2y''^2 + 4 = 0}$$ aynı denklem elde edilir.

$$T_{\left(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)} \circ R_{\frac{\pi}{6}} = R_{\frac{\pi}{6}} \circ T_{(0,-1)} \text{ !}$$

olduğundan hiperbolün grafiğini farklı $x'y'$ ve $x''y''$ eksenlerini kullanarak da çizebiliriz.