25 Şubat 2016

Uzayda Doğru ve Düzlem

Uzay: (R^3, u) ikilisine uzay denir.

Burada $u(P,Q) = \sqrt{(p_1-q_1)^2 + (p_2-q_2)^2 + (p_3-q_3)^2}$

iki nokta arası uzaklık fonksiyonudur.

Yorum: $(R^2, u) \longrightarrow$ (afin) düzlem

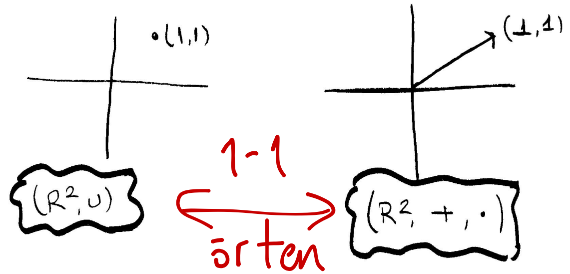
noktalar kümesi (1,1)

$(R^2, +, \cdot) \longrightarrow$ vektör uzayı

vektörler kümesi (1,1)

2 vektörün toplamı

1 vektörün skalerle (sabitle) çarpımı



$\Rightarrow$ $D: \{(x,y,z) \in R^3 \mid ax+by+cz+d=0\}$ kümesini düşünelim.

* $(a,b,c,d) = (0,0,0,0)$ iken $\boxed{D = R^3}$ olur
* $(a,b,c) = (0,0,0)$ ve $d \neq 0$ $\boxed{D = \emptyset}$ olur

Kabul: * $(a,b,c) \neq (0,0,0)$ olsun.

D'ye bir düzlem denir. $\rightarrow$ (R^2 ile birebir eşlenen küme)

SORU: D'nin doğası $(\mathbb{R}^2, u)$'nın doğasına benziyor mu?

$$D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = 0\} = \{(x,y,0) \mid x,y \in \mathbb{R}^2\}$$

$*$ $p = (p_1, p_2, 0)$, $q = (q_1, q_2, 0)$ $\in D \longleftrightarrow$ $p' = (p_1, p_2)$, $q' = (q_1, q_2)$ $\in \mathbb{R}^2$

$*$ $u(p,q) = u(p', q')$, çünkü $p_3 = q_3 = 0$

--- Demek ki $z=0$ düzlemi tıpkı $(\mathbb{R}^2, u)$ düzlemi gibi

$*$ $c \neq 0$ iken D'nin denklemi $\Rightarrow$ $\boxed{z = \frac{-a}{c}x + \frac{-b}{c}y + \frac{-d}{c}}$ 'dir.

$\ell : \mathbb{R}^2 \longrightarrow D \subseteq \mathbb{R}^3$ olsun

$(x,y) \longrightarrow \left(x, y, \frac{-a}{c}x - \frac{b}{c}y - \frac{d}{c}\right)$.

ℓ örten!

ℓ, 1-1

$$\left(x, y, \frac{-a}{c}x - \frac{-b}{c}y - \frac{d}{c}\right) = \left(x', y', \frac{-a}{c}x' - \frac{b}{c}y' - \frac{d}{c}\right) \Leftrightarrow x = x' \text{ ve } y = y'$$

olduğu için ℓ iyi tanımlı ve 1-1'dir.

$*$ $P = (p_1, p_2, p_3)$ ve $q = (q_1, q_2, q_3)$, D'nin iki noktası olsun.

$p' = \ell^{-1}(p) = (p_1, p_2)$ $q' = \ell^{-1}(q) = (q_1, q_2)$ olduğundan

$$u(p,q) = \sqrt{(p_1-q_1)^2 + (p_2-q_2)^2 + (p_3-q_3)^2} = \sqrt{(p_1-q_1)^2 + (p_2-q_2)^2} = u(p', q')$$

olması için gerek ve yeter şart $p_3 = q_3$ olmasıdır.

$(p_1, p_2, p_3) \neq (q_1, q_2, q_3)$ iken bu; $D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z = p_3\}$ olması demek!

Yani, uzaklığın korunduğu düzlemler sadece $\boxed{z = z_0}$ olanlar!

(a_1,a_2,a_3) ve (b_1,b_2,b_3) birbirinin katı olmasın. [redacted]
$(a_1,a_2,a_3)\neq(0,0,0)\neq(b_1,b_2,b_3)$ olsun.

Teorem: $\ell : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ $\qquad s(a_1,a_2,a_3)+t(b_1,b_2,b_3)+(c_1,c_2,c_3)$

$$\ell(s,t) = (a_1s+b_1t+c_1,\ a_2s+b_2t+c_2,\ a_3s+b_3t+c_3) \text{ olsun}$$

* $\ell(\mathbb{R}^2)=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x=a_1s+b_1t+c_1,\ y=a_2s+b_2t+c_2,\ z=a_3s+b_3t+c_3$ olacak şekilde $s,t\in\mathbb{R}$ vardır.$\}$ bir düzlemdir.

* Her $\mathcal{D}$ düzlemi uygun bir ℓ fonksiyonu için $\ell(\mathbb{R}^2)$'ye eşittir.

İspat (Örnek üzerinden ispatın ana fikrini yakalayalım:)

Örnek:
$x=s+t$
$y=s-t$
$z=s+3$
} Bu hangi düzlem, nasıl bulunur? (s'yi t'yi yok etmeliyiz.)

$\ell(s,t)=(s+t,\ s-t,\ s+3)$ $\qquad s=z-3 \Rightarrow x=z-3+t$

$y=z-3-t$

$x+y=2(z-3)$

$\mathcal{D}=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x+y-2z+6=0\}$ dersek, $\ell(\mathbb{R}^2)\subseteq\mathcal{D}$ olur.

$\Rightarrow \mathcal{D}=\ell(\mathbb{R}^2)$ olduğunu görmek için $\mathcal{D}\subseteq\ell(\mathbb{R}^2)$'yi kanıtlayalım:

$(\subseteq)$: $x+y-2z+6=0$

$x=s$, $y=t$, $z=\frac{x+y}{2}+3=\frac{s}{2}+\frac{t}{2}+3$

$y=s$, $z=t \Rightarrow x=-s+2t-6$

$x=s+t$, $y=s-t \Rightarrow z=\frac{x+y+6}{2}$, $z=\frac{2s+6}{2}=s+3$! $\Rightarrow (x,y,z)\in\ell(\mathbb{R}^2)$.

Başlangıçtaki ←

parametrizasyonlarından her biri geçerlidir.

İspata dönersek:

(1. kısım) Öyle $a,b,c,d\in\mathbb{R}$ bulmalıyız ki $a(a_1s+b_1t+c_1)+b(\dots)+c(\dots)+d=0$.
Bu, $\mathcal{D}=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid ax+by+cz+d=0\}\supseteq\ell(\mathbb{R}^2)$ olduğunu gösterir. Sonra, $\mathcal{D}\subseteq\ell(\mathbb{R}^2)$'yi gösteririz.

İspatın ilk kısmı için $(x,y,z)\in \ell(\mathbb{R}^2)$ ise

$$\left.\begin{aligned} x-c_1&=sa_1+tb_1\\ y-c_2&=sa_2+tb_2\\ z-c_3&=sa_3+tb_3\end{aligned}\right\}$$ parametrik denklemi sağlanır.

$$\begin{vmatrix} i & j & k\\ a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_2 & a_3\\ b_2 & b_3\end{vmatrix} i-\begin{vmatrix} a_1 & a_3\\ b_1 & b_3\end{vmatrix} j+\begin{vmatrix} a_1 & a_2\\ b_1 & b_2\end{vmatrix} k$$ formülünden

$(a,b,c)=(a_2b_3-a_3b_2,\ a_3b_1-a_1b_3,\ a_1b_1-a_2b_1)$ dersek

$$a(x-c_1)+b(y-c_2)+c(z-c_3)=s(\underbrace{aa_1+ba_2+ca_3}_{0})+t(\underbrace{ab_1+bb_2+cb_3}_{0})=0$$

olacağından parametrik denklemi verilen kümenin kapalı denklemi $ax+by+cz-(ac_1+bc_2+cc_3)=0$ olan bir $\mathcal{D}$ düzleminde yattığını görürüz: $\underline{\ell(\mathbb{R}^2)\subseteq\mathcal{D}}$.

Tersine, $(x,y,z)\in\mathcal{D}$ ise $(a,b,c)\neq(0,0,0)$ olduğundan yukarıdaki parametrik denklemi elde etmek kolaydır. Şöyle ki; örneğin $a=\begin{vmatrix} a_2 & a_3\\ b_2 & b_3\end{vmatrix}\neq 0$ ise

$$\begin{aligned} a_2s+b_2t&=y-c_2\\ a_3s+b_3t&=z-c_3\end{aligned}$$ veya $$\begin{bmatrix} a_2 & b_2\\ a_3 & b_3\end{bmatrix}\begin{bmatrix} s\\ t\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} y-c_2\\ z-c_3\end{bmatrix}$$ denkleminin

çözümü olan $s,t\in\mathbb{R}$ vardır. Bunları kapalı denklemde yerine koyunca $x-c_1=sa_1+tb_1$ elde edilir.

[redacted] $\mathcal{D} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid ax+by+cz+d=0\}$.

→ (2. kısım) $\mathcal{D}$ verilince $c \neq 0$ $l_1(x,y) = \left(x, y, -\frac{a}{c}x - \frac{b}{c}y - \frac{d}{c}\right)$ için $\mathcal{D} \subseteq l_1(\mathbb{R}^2)$ olur.

$b \neq 0$ → l_2

$a \neq 0$ → l_3

$l_i(\mathbb{R}^2) \subseteq \mathcal{D}$ de olur, çünkü

$ax+by+c\left(-\frac{a}{c}x - \frac{b}{c}y - \frac{d}{c}\right)+d=0$

denklemi sağlanır.

Verilen $\mathcal{D}$'de ya $a \neq 0$ ya $b \neq 0$ ya da $c \neq 0$ olacağından $\mathcal{D} \subseteq l_i(\mathbb{R}^2)$, olacak bir $i \in \{1,2,3\}$ bulunur. Daha sonra, $l_i(\mathbb{R}^2) \subseteq \mathcal{D}$ olduğu görülür.

Örnek $\mathcal{D} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 3y = 2z+5\}$

$\mathcal{D}$'nin bir parametrik denklemini bulunuz.

1. parametrizasyon

$x = s$

$y = t$

$z = \frac{3t-5}{2}$

2. parametrizasyon

$x = s$

$y = \frac{2t+5}{3}$

$z = t$

! Uyarı !

$x = s^2$, $y = \frac{2t+5}{3}$, $z = t$ olsaydı $(x,y,z) \in \mathcal{D}$ olurdu. Bu şekilde hala düzlemin içinde ama düzlemdeki her nokta bu şekilde yazılamaz:

$(-1,5,5) \in \mathcal{D}$ ama $s^2 = -1$ olacak $s \in \mathbb{R}$ yok!

Örnek

parametrik denklemi

$x = 2s - 3t + 5$

$y = 4s - t + 1$

$z = -s + 2t - 3$

Olan düzlemin kapalı denklemi nedir?

şöyle yaparak görebiliriz

$x - 5 = 2s - 3t$

$y - 1 = 4s - t$

$z + 3 = -s + 2t$

ya da direkt buradan açabiliriz.

$s = 2t - z - 3 \Rightarrow x = 2(2t - z - 3) - 3t + 5 = 4t - 2z - 6 - 3t + 5$

$y = 4(\quad) - t + 1 = 8t - 4z - 12 - t + 1$

$\boxed{\begin{aligned} x+2z+1 &= t \\ y+4z+1 &= 7t \end{aligned}} \to 7(x+2z+1) = 1(y+3z+1)$

$7x - y + 10z - 4 = 0$

Parametrik denklem = ?

$x = 2s - 3t + 5$

$z = -s + 2t - 3$ alıp

$y = 7x + 10z - 4$

$= 4s - t + 1$ bulunur.

Böylece, $l(\mathbb{R}^2) = \mathcal{D}$ olur.

* metod: 3. denklem ile s yerine + koyma imkanı sağlar

kalan 2 denklem t'yi yok etmemizi sağlar

(katsayıları kullanarak) (2)

NOT

$\langle v_1, v_2 \rangle$ iç çarpım

$\langle v, v \rangle = \|v\|^2$ (norm)

P, Q $\quad \vec{PQ} = u$ iken

$U(P,Q) = \boxed{\|\vec{PQ}\|}$

Önemli değil hatırlatma amaçlı

* Düzlem, R^2 ile birebir eşleniyor.
(Uzaklığı koruyabilir, korumayabilir.)

İki Düzlemin Kesişimi

ÖRNEK

$$\left.\begin{aligned} D_1 &= \{(x,y,z) \in R^3 \mid x+y-z=0\} \\ D_2 &= \{(x,y,z) \in R^3 \mid 2x+2y-2z=0\} \\ D_3 &= \{(x,y,z) \in R^3 \mid 2x+2y+2z=0\} \end{aligned}\right\} \text{ ise } \quad D_1 \cap D_2 ? \quad D_1 \cap D_3 ?$$

→ $(x,y,z) \in D_1 \cap D_2 \Leftrightarrow x+y-z=0$ ve $2x+2y-2z=0$

→ Ama $z = x+y$ ise $2z = 2(x+y)$'dir. Tersine $2z = 2x+2y$ ise $z = x+y$'dir

→ O zaman $x+y-z=0 \Leftrightarrow 2x+2y-2z=0$'dır

→ yani $(x,y,z) \in D_1 \Leftrightarrow (x,y,z) \in D_2$'dir Böylece $D_1 = D_2$ ve $D_1 \cap D_2 = D_1 = D_2$'dir. Kesişim, düzlem!

—o—

→ Öte yandan $(x,y,z) \in D_1 \cap D_3 \Leftrightarrow x+y-z=0$ ve $2x+2y+2z=0$

$\Leftrightarrow 2x+2y-2z=0$ ve $2x+2y+2z=0$

$\Leftrightarrow 2x+2y-2z=0$ ve $2x+2y+2z=0$

$\Leftrightarrow 2x+2y=2z$ ve $2z=-2z$

$\Leftrightarrow 2x+2y=2z$ ve $4z=0$

$\Leftrightarrow 2x+2y-2z=0$ ve $z=0$

$\Leftrightarrow \boxed{x+y=0 \text{ ve } z=0}$

$D_1\cap D_3$, $\mathbb{R}^2$'deki bir doğruyla 1-1 eşlenebilir:

yani $D_1 \cap D_3 = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x+y=0 \text{ ve } z=0\} = \{(x,-x,0)\mid x\in\mathbb{R}\}$.

$D=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 / z=0\}$ düzleminden $\mathbb{R}^2$'ye

$\varphi:(x,y,0)\to(x,y)$ fonksiyonunu $D_1\cap D_3$'e kısıtlarsak

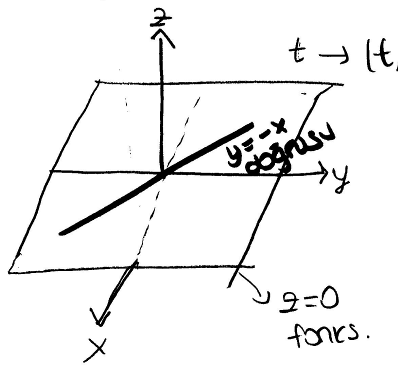
$\varphi: D_1\cap D_3 \to \mathbb{R}^2$ olur $\quad \underbrace{\varphi(D_1\cap D_3)}_{D_1\cap D_3\text{'ün görüntüsü}} = \underbrace{\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid -x=y\}}_{\mathbb{R}^2\text{'de } y=-x \text{ doğrusu}}$

$\varphi(x,-x,0)=(x,-x)$

— o —

Öte yandan $\mathbb{R}\to D_1\cap D_3$ fonks. 1-1, örtendir

$t\to(t,-t,0)$



NOT: Bu doğru aynı zamanda

$D_4=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x+y=0\}$

$D_5=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid z=0\}$

düzlemlerinin bir kesişimidir

$\boxed{D_1\cap D_3 = D_2\cap D_3 = D_4\cap D_5}$ [redacted]

Örnek $D_6=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x+y-z+5=0\}$ $\quad D_1\cap D_6$?

$(x,y,z)\in D_1\cap D_6 \Leftrightarrow \begin{cases} x+y-z=0 \\ x+y-z=-5\end{cases}$ → ikisinin ortak çözümü yok $\quad \boxed{0\neq -5}$

(4)

$\boxed{D_1\cap D_6=\emptyset}$

Teorem: $\mathcal{D}_1 = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid a_1x+b_1y+c_1z+d_1=0\}$ ve

$\mathcal{D}_2 = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid a_2x+b_2y+c_2z+d_2=0\}$ iki düzlem olsun.

(i) $\mathcal{D}_1=\mathcal{D}_2 \Leftrightarrow \exists k\in\mathbb{R}\setminus\{0\} : (a_1,b_1,c_1,d_1)=k(a_2,b_2,c_2,d_2)$

(ii) $\mathcal{D}_1\cap\mathcal{D}_2=\emptyset \Leftrightarrow \exists k\in\mathbb{R}\setminus\{0\} : (a_1,b_1,c_1)=k(a_2,b_2,c_2)$ ve $d_1\neq kd_2$.

(iii) $\mathcal{D}_1\cap\mathcal{D}_2=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x=\alpha t+\alpha_0,\ y=\beta t+\beta_0,\ z=\gamma t+\gamma_0\}$

$\Leftrightarrow (a_1,b_1,c_1)=k(a_2,b_2,c_2)$ olacak $k\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$ yoktur.

İspat: L_1 ve L_2 sırasıyla $\mathcal{D}_1$ ve $\mathcal{D}_2$'nin denklemi olsun. $P\in D_1\cap D_2 \Leftrightarrow L_1(P)=0$ ve $L_2(P)=0$'dır.

Öte yandan, $\boxed{\begin{array}{l} L_1(P)=0 \\ (L_1-kL_2)(P)=0 \end{array}} \underset{k\neq 0}{\Leftrightarrow} \boxed{\begin{array}{l} L_1(P)=0 \\ L_2(P)=0 \end{array}} \Leftrightarrow \boxed{\begin{array}{l} (L_1-kL_2)(P)=0 \\ L_2(P)=0 \end{array}}$ olur.

$(a_2,b_2,c_2)\neq(0,0,0)$ olduğundan genelliği bozmadan $a_2\neq 0$ kabul edebiliriz. $k=\dfrac{a_1}{a_2}\in\mathbb{R}$ dersek $a_1=ka_2$ ve

$\underline{(L_1-kL_2)(x,y,z)=(b_1-kb_2)y+(c_1-kc_2)z+(d_1-kd_2)}$ olur.

$\mathcal{D}_3=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid (L_1-kL_2)(x,y,z)=0\}$ dersek

$$\mathcal{D}_1\cap\mathcal{D}_3 \overset{k\neq 0}{=} \mathcal{D}_1\cap\mathcal{D}_2 = \mathcal{D}_3\cap\mathcal{D}_2$$ olur. ($k=0$ iken $\mathcal{D}_3=\mathcal{D}_1$)

1. Durum: $(a_1,b_1,c_1,d_1)=k(a_2,b_2,c_2,d_2)$ ise $\mathcal{D}_3=\mathbb{R}^3$ ve dolayısıyla $\mathcal{D}_1=\mathcal{D}_1\cap\mathcal{D}_3=\mathcal{D}_2\cap\mathcal{D}_3=\mathcal{D}_2$ olur. $(k\neq 0)$

2. durum: $(a_1, b_1, c_1) = k(a_2, b_2, c_2)$ ama $d_1 \neq k d_2$ ise

$\mathcal{D}_3 = \emptyset$ ve dolayısıyla $\mathcal{D}_1 \cap \mathcal{D}_2 = \emptyset$ olur. $(k \neq 0)$

3. durum: $(a_1, b_1, c_1) = k(a_2, b_2, c_2)$ olacak $k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ yok

ise $a_1 = k a_2$ olduğundan $b_1 \neq k b_2$ veya $c_1 \neq k c_2$'dir.

Genelliği bozmadan $b_1 \neq k b_2$ kabul edelim.

$a_1 = 0$ iken $k = 0$ olduğundan $b_1 \neq 0$'dır ve $L_1(x,y,z) = 0$

eşitliğinden $y = \underbrace{\left(-\frac{c_1}{b_1}\right)}_{\beta} z \underbrace{\left(-\frac{d_1}{b_1}\right)}_{\beta_0} = \boxed{\beta z + \beta_0}$ elde edilir.

$L_2(P) = 0$'dan $x = -\frac{b_2}{a_2} y - \frac{c_2}{a_2} z - \frac{d_2}{a_2} = \alpha z + \alpha_0$ olur.

Dolayısıyla $(x,y,z) \in \mathcal{D}_1 \cap \mathcal{D}_2 \Rightarrow z = t = \gamma t + \gamma_0$ dersek

$y = \beta t + \beta_0$ ve $x = \alpha t + \alpha_0$ elde edilir.

$a_1 \neq 0$ iken $k \neq 0$ olduğundan $\mathcal{D}_1 \cap \mathcal{D}_2 = \mathcal{D}_1 \cap \mathcal{D}_3$'tür.

$(x,y,z) \in \mathcal{D}_1 \cap \mathcal{D}_3 \Rightarrow L_3(x,y,z) = 0$'dan $y = \underbrace{\left(\frac{k c_2 - c_1}{b_1 - k b_2}\right)}_{\beta} z + \underbrace{\left(\frac{k d_2 - d_1}{b_1 - k b_2}\right)}_{\beta_0}$

$L_1(x,y,z) = 0$'dan $x = \left(-\frac{b_1}{a_1}\right) y + \left(-\frac{c_1}{a_1}\right) z + \left(\frac{-d_1}{a_1}\right) = \alpha z + \alpha_0$ elde edilir.

$z = t = \gamma t + \gamma_0$ dersek $y = \beta t + \beta_0$ ve $x = \alpha t + \alpha_0$ elde edilir.

Her iki durumda da $\mathcal{D}_1 \cap \mathcal{D}_2 = \{(\alpha t + \alpha_0, \beta t + \beta_0, \gamma t + \gamma_0) \mid t \in \mathbb{R}\}$ olur.