Tanım: Teorem (iii)'deki gibi iki düzlemin kesişimine uzayda bir doğru denir. Yani, her doğru, tanım gereği birbirinin katı olmayan $(a_1, b_1, c_1) \neq 0 \neq (a_2, b_2, c_2)$ için

$$d = \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^2 \mid a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0 \text{ ve } a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0 \}$$

kümesi şeklindedir.

Uyarı: 1) Düzlemin bir kapalı denklemi varken doğrunun iki kapalı denklemi var. Ancak iki denklem her zaman doğru vermez. (Teorem (i) ve (ii)!)

2) Teorem (iii)'den $(x,y,z) \in d \Rightarrow$

$$(*)\quad \boxed{\begin{aligned} x &= \alpha t + \alpha_0 \\ y &= \beta t + \beta_0 \\ z &= \gamma t + \gamma_0 \end{aligned}}$$

d'nin parametrik denklemi

olduğunu biliyoruz. Bunun tersi de doğrudur. Yani $(\alpha, \beta, \gamma) \neq (0,0,0)$ ise parametrik denklemi $(*)$ olan küme bir doğrudur: $\alpha \neq 0$ iken

$$\left.\begin{aligned} \beta x - \alpha y &= \beta\alpha_0 - \alpha\beta_0 \\ \gamma x - \alpha z &= \gamma\alpha_0 - \alpha\gamma_0 \end{aligned}\right\} \text{ olur.}$$

$$\left.\begin{aligned} L_1(x,y,z) &= \beta x - \alpha y + 0z + (\alpha\beta_0 - \beta\alpha_0) = 0 \\ L_2(x,y,z) &= \gamma x + 0y - \alpha z + (\alpha\gamma_0 - \gamma\alpha_0) = 0 \end{aligned}\right\} \text{ olduğundan}$$

$(*)$'ı sağlayan noktalar kümesi $\{ P \in \mathbb{R}^3 \mid L_1(P) = 0 = L_2(P) \}$ doğrusudur. $(\beta, -\alpha, 0)$ ve $(\gamma, 0, -\alpha)$ birbirinin katı değil.

$t(u_1,u_2,u_3)+(a_1,a_2,a_3)$

Teorem: $\ell: \mathbb{R}\to\mathbb{R}^3$, $\ell(t)=(u_1t+a_1, u_2t+a_2, u_3t+a_3)$ ise

$\ell(\mathbb{R})=d$ olacak şekilde d doğrusu vardır.

d bir doğruysa $d=\ell(\mathbb{R})$ olacak şekilde $\ell:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^3$ vardır.

$x=u_1t+a_1 \quad y=u_2t+a_2 \quad z=u_3t+a_3 \to$ d'nin param. denklemi

İspat: önceki sayfadaki açıklamalar

Kısaca: birbirinin katı olmayan iki denklemin ortak çözümleri kümesi boş değilse doğru belirtir.

Örnek: d'nin kapalı denk. $\begin{matrix} 2x+3y-5z+4=0 \\ x-y+7z-6=0 \end{matrix}$ ise parametrik denklemi?

$$z=\frac{2}{5}x+\frac{3}{5}y+\frac{4}{5}$$

$$y=x+7z-6 \Rightarrow x+7\left(\frac{2}{5}x+\frac{3}{5}y+\frac{4}{5}\right)-6=y$$

$$\Rightarrow 0=\frac{19}{5}x+\frac{16}{5}y-\frac{2}{5} \Rightarrow y=\left(-\frac{19}{5}x+\frac{2}{5}\right)\cdot\frac{5}{16}=\frac{-19x+2}{16}$$

$$x=t \Rightarrow y=\frac{-19t+2}{16} \text{ ve } z=\frac{2}{5}t+\frac{3}{5}\left(\frac{-19+2}{16}\right)+\frac{4}{5} \to \text{parametrik bir denklemi}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -5 & -4 \\ 1 & -1 & 7 & 6 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 7 & 6 \\ 2 & 3 & -5 & -4 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 7 & 6 \\ 0 & 5 & -19 & -16 \end{array}\right]$$

$$\to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 7 & 6 \\ 0 & 1 & \frac{-19}{5} & \frac{-16}{5} \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \frac{16}{5} & \frac{14}{5} \\ 0 & 1 & -\frac{19}{5} & -\frac{16}{5} \end{array}\right]$$

$$x+\frac{16}{5}z=\frac{14}{5} \qquad x=-\frac{16}{5}t+\frac{14}{5}$$

$$y-\frac{19}{5}z=\frac{-16}{5} \qquad y=\frac{19}{5}t-\frac{16}{5}$$

$z=t$ dersek $\qquad z=t$

Bu da farklı bir parametrik denklemi

Örnek: (Doğru ile düzlemin farkı / ilişkisi)

Parametrik denklemi, $\left.\begin{array}{l} x = 2t+3 \\ y = t-5 \\ z = 3t+s \\ t,s \in \mathbb{R} \end{array}\right\}$ olan geometrik nesne nedir?

Kaç kapalı denklemi vardır?

$d_s = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = 2t+3,\ y = t-5$ ve $z = 3t+s$ olacak bir $\underline{t \in \mathbb{R}}$ vardır$\}$

$\mathcal{D} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = 2t+3,\ y = t-5$ ve $z = 3t+s$ olacak birer $\underline{t,s \in \mathbb{R}}$ vardır$\}$

Uyarı: İlgili teoremlerden dolayı sabit bir s değeri için d_s bir doğru ancak $\mathcal{D}$ bir düzlemdir.

İddia: $\mathcal{D} = \bigcup_{s \in \mathbb{R}} d_s$ (Yani $\mathcal{D}$, bu d_s doğrularının birleşimidir).

İspat: $(x,y,z) \in \mathcal{D} \Rightarrow x = 2t+3,\ y = t-5,\ z = 3t+s$ olacak $t,s \in \mathbb{R}$ vardır. Bu $s \in \mathbb{R}$ için $(x,y,z) \in d_s$ olduğu açıktır. Yani $\mathcal{D} \subseteq \bigcup_{s \in \mathbb{R}} d_s$.

Tersine, $(x,y,z) \in \bigcup_{s \in \mathbb{R}} d_s$ ise sabit bir $s \in \mathbb{R}$ için $(x,y,z) \in d_s$ olur. Yani, bir $t \in \mathbb{R}$ için $x = 2t+3,\ y = t-5,\ z = 3t+s$ olur ki $(x,y,z) \in \mathcal{D}$ demektir. Bu da $\bigcup_{s \in \mathbb{R}} d_s \subseteq \mathcal{D}$ olmasını gerektirir.

Gözlem: $\mathcal{D}_s = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z - 3y - 15 - s = 0\}$ için $d_s = \mathcal{D} \cap \mathcal{D}_s$'dir. Yani, d_s doğrusu $\mathcal{D}$ ve $\mathcal{D}_s$ düzlemlerinin kesişimidir. Dolayısıyla d_s'yi tanımlayan iki kapalı denklem $\mathcal{D}$ ve $\mathcal{D}_s$'nin kapalı denklemleridir.

İspat: $(x,y,z) \in d_s \Rightarrow (x,y,z) \in \mathcal{D}$ olduğunu biliyoruz. Ayrıca uygun $t,s \in \mathbb{R}$ için

$\left.\begin{array}{l} x = 2t+3 \\ y = t-5 \\ z = 3t+s \end{array}\right\}$ olduğundan $\underline{z = 3t+s = 3(y+5)+s = 3y+15+s}$ elde edilir.

$\Downarrow$

$z - 3y - 15 - s = 0$ olduğundan $(x,y,z) \in \mathcal{D}_s$ olur.

Yani, $d_s \subseteq \mathcal{D} \cap \mathcal{D}_s$ olur. Tersi için, $\mathcal{D}_s = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid y = t-5,\ z = 3t+s$ olacak $t \in \mathbb{R}$ var$\}$ olduğuna dikkat ediniz: $t = y+5$ alırsak $y = t-5$ olur. $\underbrace{z = 3y+15+s}_{\mathcal{D}_s\text{'nin kapalı denkleminden}} = 3(t-5)+15+s = 3t+s$!

Yani, $(x,y,z) \in \mathcal{D}_s$ için x üzerinde hiç bir şart yoktur. Şimdi, $(x,y,z) \in \mathcal{D}_s \cap \mathcal{D}$ alırsak, $y = t-5$ ve $z = 3t+s$ olmasının yanısıra $x = 2t+3$ de olur. $(x,y,z) \in d_s$'dir.

Dolayısıyla, $\mathcal{D}_s \cap \mathcal{D} \subseteq d_s$ elde edilir ve ispat biter.

Böylece, sabit her $s \in \mathbb{R}$ değeri için d_s doğrusunun kapalı denklemlerini bulma problemi $\mathcal{D}$'nin denklemini bulmaya indirgendi. Şimdi $\mathcal{D}$'nin kapalı denkleminin $x-2y-13=0$ olduğunu görelim: $(x,y,z) \in \mathcal{D} \iff \begin{aligned} x &= 2t+3 \\ y &= t-5 \\ z &= 3t+s \end{aligned}$ olacak $t,s \in \mathbb{R}$ vardır.

$y=t-5$ ise $t=y+5$ olur. $x=2t+3=2(y+5)+3=2y+13$ olduğundan $(x,y,z) \in \mathcal{D}$ ise $x-2y-13=0$ sağlanır.

Tersine, $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ ve $x-2y-13=0$ olsun. $t=y+5 \in \mathbb{R}$ için $y=t-5$ olur. $x=2y+13=2(t-5)+13=2t-3$'dür. Son olarak, $s=z-3t \in \mathbb{R}$ için $z=3t+s$ olacağından $\begin{aligned} x &= 2t-3 \\ y &= t-5 \\ z &= 3t+s \end{aligned}$ olacak t ve s reel sayıları vardır ve $(x,y,z) \in \mathcal{D}$ olur.

Böylece, $\boxed{\mathcal{D} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x-2y-13=0\}}$ olduğu görülür.

$d_s = \mathcal{D}_s \cap \mathcal{D} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x-2y-13=0 \text{ ve } z-3y-15-s=0\}$ olduğundan d_s'nin kapalı denklemleri $x-2y-13=0$ ve $z-3y-15-s=0$'dır.

<u>$s=0$ özel durumu için bütün yaptıklarımızın özeti:</u>

$\mathcal{D}_0 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z-3y-15=0\} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid \underbrace{y=t-5,\ z=3t \text{ olacak } t \in \mathbb{R} \text{ var}}\}$

Sadece t olması yanıltmasın! $x=s \in \mathbb{R}$ serbest değişkeni üzerinde bir şart YOK.

$d_0 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x-2y-13=0 \text{ ve } z-3y-15=0\}$
$= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x=2t+3,\ y=t-5,\ z=3t \text{ olacak } t \in \mathbb{R} \text{ vardır}\}.$
$= \mathcal{D} \cap \mathcal{D}_0$.

Uzayda Vektörler

$A,B \in \mathbb{R}^3$ için $\overline{AB}$ doğru parçasının $(1-t)A+tB$

$$\overline{AB} \sim \overline{CD} \Leftrightarrow (b_1-a_1, b_2-a_2, b_3-a_3) = (d_1-c_1, d_2-c_2, d_3-c_3)$$

denklik bağıntısına göre denklik sınıfına $\vec{AB}$ vektörü denir.

Böylece $\mathbb{R}^3$'teki vektörleri, $\mathbb{R}^3$'ün noktalarıyla 1-1 ve örten bir şekilde eşlemiş oluruz.

$$\varphi : \{\mathbb{R}^3\text{'teki vektörler}\} \to \mathbb{R}^3$$

φ_{1-1}: $\varphi(\vec{OP}) = \varphi(\vec{OQ}) \Leftrightarrow P=Q$

φ örten: $\forall P \in \mathbb{R}^3$ için $\varphi(\vec{OP}) = P$ olacak $\vec{OP}$ vardır.

UYARI: Bu eşlemeden ötürü $\mathbb{R}^3$'ün elemanlarına (yani noktalara) vektör denilmektedir.

- VEKTÖRLER CEBİRİ

Toplama $\vec{u}+\vec{v} = (u_1+v_1, u_2+v_2, u_3+v_3)$

Skaler Çarpma $c.\vec{u} = (cu_1, cu_2, cu_3)$

iç çarpım $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle$ veya $\vec{u}.\vec{v} = u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3$

Vektörel çarpım

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} i & -j & k \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix} i - \begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix} j + \begin{vmatrix} & \end{vmatrix} k$$

$i = (1,0,0)$ $\vec{j} = (0,1,0)$ $\vec{k} = (0,0,1)$

Ödev $(\mathbb{R}^3, +, .)$ bir vektör uzayıdır, gösteriniz.

LİNEER BAĞIMLILIK

$U = \{\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_k\}$ kümesi için

$a_1\vec{u}_1 + \dots + a_k\vec{u}_k = 0$ 'ın TEK çözümü $a_1 = \dots = a_k = 0$ ise U'ya lineer bağımsız denir.

Aksi taktirde, yani birden fazla (sonsuz) çözüm varsa, U'ya lineer bağımlı denir.

..../..../....

Örnek: $U=\{u_1, u_2\}$ lin. bağlı $\iff$ $u_2 = c \cdot u_1$ olacak bir $\underset{\neq 0}{c} \in \mathbb{R}$ vardır. ($u_1 \neq 0$, $u_2 \neq 0$)

$\Rightarrow$: U lineer bağımlı ise $a_1u_1 + a_2u_2 = 0$ olacak şekilde $(a_1, a_2) \neq (0,0)$ vardır. [redacted]

$a_2 \neq 0$ ise $a_2u_2 = -a_1u_1 \Rightarrow u_2 = \underbrace{\left(-\frac{a_1}{a_2}\right)}_{c} u_1$

$a_2 = 0$ ise $\boxed{\begin{matrix} a_1u_1 = 0 \\ a_1 \neq 0 \end{matrix}} \Rightarrow u_1 = 0$, çelişki. [redacted]

$\Leftarrow$: $u_2 = cu_1$ ise $cu_1 - u_2 = 0 \Rightarrow (a_1, a_2) = (c, -1) \neq (0,0)$ için $a_1u_1 + a_2u_2 = 0$ olur.

Örnek: $A = (-6, 7, 1)$ $B = (1, -3, -4)$ $C = (3, -2, 1)$

$\{D \in \mathbb{R}^3 \mid \vec{AB}$ ile $\vec{CD}$ lineer bağımlı$\} = ?$

$\vec{AB} = (7, -10, 3)$

$\vec{CD} = (x-3, y+2, z-1)$

$\vec{AB}$, $\underset{\neq 0}{\vec{CD}}$ lineer bağımlı $\iff \exists t \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$: $\vec{CD} = t.\vec{AB}$

$x - 3 = 7t$ $x = 7t + 3$
$y + 2 = -10t$ yani $y = -2 - 10t$
$z - 1 = 3t$ $z = 1 + 3t$

$\vec{CD} = \vec{0}$ iken $\vec{AB}$ ile $\vec{CD}$ lineer bağımlı olduğu için $D = C$ bu kümenin elemanıdır. Bu kümenin elemanları;

$$d = \{(3 + 7t, -2 - 10t, 1 + 3t) \mid t \in \mathbb{R}\}$$ olur.

d bir doğrudur ve $\vec{AB}$ ile $\vec{CD}$ vektörlerinin lineer (doğrusal) bağımlı olmaları, D'nin bu doğru üzerinde bulunmasına denktir.

İki noktadan geçen doğru:

$A, B \in \mathbb{R}^3$, $d = \{\underbrace{t\vec{AB} + A}\ \mid t \in \mathbb{R}\}$ doğrusu A ve B'den geçer. ($t=0$, $t=1$) VARLIK

$(1-t)A + tB$

ÖDEV: $B \in d' = \{s\vec{u} + A \mid s \in \mathbb{R}\} \Rightarrow \boxed{d = d'}$ TEKLİK

Örnek $\{\vec{u_1}=(1,2,3),\ \vec{u_2}=(2,3,4),\ \vec{u_3}=(3,4,5)\}$ lineer bağımlı mıdır?

$a_1\vec{u_1}+a_2\vec{u_2}+a_3\vec{u_3} = a_1(1,2,3)+a_2(2,3,4)+a_3(3,4,5) =$

$\vec{0} = (a_1+2a_2+3a_3,\ 2a_1+3a_2+4a_3,\ 3a_1+4a_2+5a_3)=(0,0,0)$

$$\begin{aligned} a_1+2a_2+3a_3&=0\\ 2a_1+3a_2+4a_3&=0\\ 3a_1+4a_2+5a_3&=0 \end{aligned}$$

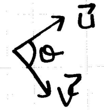
$$\begin{bmatrix}1&2&3\\2&3&4\\3&4&5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix} \quad \text{ya da} \quad \begin{vmatrix}1&2&3\\2&3&4\\3&4&5\end{vmatrix}=0 \Rightarrow \text{sonsuz çözüm}$$

$\Downarrow$

Lin. bağımlı

İç çarpım $\mathbb{R}^2$'de olduğu gibi diklik hakkında bilgi verir.

$\vec{u}\perp\vec{v} \iff \langle\vec{u},\vec{v}\rangle=0$



iki vektör arasındaki açı iç çarpım ile bulunabilir.

$$\cos\theta = \frac{\langle\vec{u},\vec{v}\rangle}{\|\vec{u}\|\cdot\|\vec{v}\|}$$

Özellikleri

1) $\vec{u}\times\vec{v} = -\vec{v}\times\vec{u}$
2) $(c.\vec{u})\times\vec{v} = \vec{u}\times(c.\vec{v}) = c\,(\vec{u}\times\vec{v})$
3) $\vec{u}\times\vec{v}$ vektörü hem u'ya hem v'ye diktir. (ispatı aşağıda)
4) $\vec{u}\times(\vec{v}+\vec{w}) = \vec{u}\times\vec{v}+\vec{u}\times\vec{w}$ ve $(u+v)\times w = u\times w + v.w$
5) $\vec{u}\times(\vec{v}\times\vec{w}) = \langle\vec{u},\vec{w}\rangle.\vec{v} - \langle\vec{u},\vec{v}\rangle\vec{w}$
6) $(\vec{u}\times\vec{v})\times\vec{w} = \langle\vec{u},\vec{w}\rangle\vec{v} - \langle\vec{v},\vec{w}\rangle\vec{u}$

Karma çarpım

$u.(v \times w)$ sayısına karma çarpım denir

$\boxed{\text{iddia:}}$ $u.(v \times w) = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}$

İspat:

$$= u_1 \begin{vmatrix} v_2 & v_3 \\ w_2 & w_3 \end{vmatrix} - u_2 \begin{vmatrix} v_1 & v_3 \\ w_1 & w_3 \end{vmatrix} + u_3 \begin{vmatrix} v_1 & v_2 \\ w_1 & w_2 \end{vmatrix}$$

$$= (u_1, u_2, u_3) . \left(\begin{vmatrix} v_2 & v_3 \\ w_2 & w_3 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} v_1 & v_3 \\ w_1 & w_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} v_1 & v_2 \\ w_1 & w_2 \end{vmatrix} \right)$$

$$= u.(v \times w).$$

İddia: $u \perp u \times v$

İspat: $u.(u \times v) = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$ $\boxed{\text{$u \times v$ u'ya diktir çünkü iç çarpımları sıfır}}$

Lagrange Eşitliği: $(\vec{a} \times \vec{b}).(\vec{c} \times \vec{d})$

$$(a.c)(b.d) - (a.d)(b.d)$$

(ispat ödev)

Sonuç:

1) $\|\vec{a} \times \vec{b}\| = \|a\|.\|b\|.\sin\theta$

2) $(\vec{a} \times \vec{b})^2 = \vec{a}^2 \vec{b}^2 - (\vec{a}\vec{b})^2$

İspat:

1) $a = c$, $b = d$ iken lagrange eşitliğinden çıkar.

2) $\vec{a}.\vec{b} = \|a\|.\|b\|.\cos\theta$

$\vec{a}^2 \vec{b}^2 = \|a\|^2 \|b\|^2 . \cos^2\theta = \|a\|^2 . \|b\|^2 . \underbrace{(1 - \cos^2\theta)}_{\sin^2\theta}$

Sonuç: $\{u, v, w\}$ lineer bağımlıdır $\Leftrightarrow u.(v \times w) = 0$

İspat: $c_1 u + c_2 v + c_3 w = \vec{0}$ olacak $(c_1, c_2, c_3) \neq (0,0,0)$ vardır $\Leftrightarrow$
$\begin{aligned} c_1 u_1 + c_2 v_1 + c_3 w_1 &= 0 \\ c_1 u_2 + c_2 v_2 + c_3 w_1 &= 0 \\ c_1 u_3 + c_2 v_3 + c_3 w_1 &= 0 \end{aligned}$ sisteminin $(0,0,0)$ dışında bir (c_1, c_2, c_3) çözümü vardır.

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} u_1 & v_1 & w_1 \\ u_2 & v_2 & w_2 \\ u_3 & v_3 & w_3 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow u.(v \times w) = 0$$

Geometrik Yorum

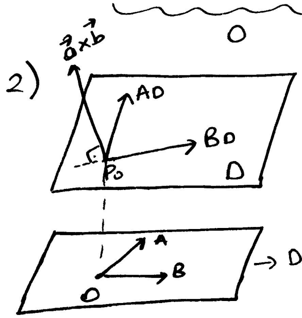
1) $\underbrace{\vec{a}\times\vec{b}}$ her t ve s reel sayısı için $s\vec{a}+t\vec{b}$ vektörüne diktir.

w dersek

$\langle w, s\vec{a}+t\vec{b}\rangle$

$\| $

$s\,\underbrace{\langle w,\vec{a}\rangle + t\,\langle w,b\rangle}_{0}$ çünkü $\langle w,a\rangle=0$ ve $\langle w,b\rangle=0$.

2) 

→ D'ye paralel orijinden geçen düzlem

$\vec{a}=\vec{OA}$
$b=\vec{OB}$

$P_0\in\mathbb{R}^3$ ve birbirinin katı olmayan $\vec{a},\vec{b}$ için

$D=\{P\in\mathbb{R}^3 \mid \vec{P_0P}=s.\vec{a}+t\vec{b}\}$ kümesi P_0'dan geçen bir düzlem?

$\vec{a}=\vec{P_0A_D}$ $b=\vec{P_0B_D}$

$P=P_0+s.\vec{a}+t\vec{b}=(x_0,y_0,z_0)+s(a_1,a_2,a_3)+t(b_1,b_2,b_3)$

$X = x_0+sa_1+tb_1$
$Y=y_0+s\,a_2+t\,b_2$
$Z=z_0+s\,a_3+t\,b_3$

D bir düzlemdir $s=t=0$ için $P=(x_0,y_0,z_0)=P_0$ olduğu için P_0'dan geçen bir düzlemdir.

örnek: Doğrudaş olmayan üç nokta bir düzlem belirtir. → $\boxed{A,B,C\in\mathbb{R}^3 \text{ doğrudaş}}$ $\Longleftrightarrow$ $\boxed{\vec{AB}=t\vec{AC} \text{ olacak } t\in\mathbb{R} \text{ vardır.}}$

$\Downarrow$

1. yol: A,B,C doğrudaş değilken, $\vec{u}$ ile $\vec{v}$ birbirinin katı olmayacağından $X=A+s\vec{u}+t\vec{v}$ noktaları düzlem belirtir.

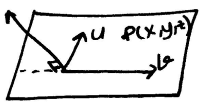
$A_D=(1,2,3)$ $B_D=(2,3,4)$ $C_D=(3,4,6)$

2. yol:
$\vec{u}=\vec{A_DB_D}=(1,1,1)$
$\vec{v}=\vec{A_DC_D}=(2,2,3)$

$u\times v=\begin{vmatrix} i & j & k\\ 1 & 1 & 1\\ 2 & 2 & 3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&1\\2&3\end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix}1&1\\2&3\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}1&1\\2&2\end{vmatrix}\vec{k}$

$u\times v=\vec{i}-\vec{j}+0.\vec{k}=(1,0,0)-(0,1,0)+0.(0,0,1)$

$u\times v=(1,-1,0)$



$\vec{A_DP}=s.\vec{u}+t.\vec{v}$ vektörü $u\times v$'ye diktir, bunu sağlayan P lerin kümesi düzlemdir.

$\vec{A_D.P}.(\vec{u}\times\vec{v})=0$

$(x-1,y-2,z-3)(1,-1,0)=0$

$x-1-(y-2)+0\,(z-3)=0$

$\boxed{x-y+1=0}$ → D'nin kapalı denklemi

$D=\{P\in\mathbb{R}^3 \mid \vec{A_DP}.(\vec{u}\times\vec{v})=0\}$ bir düzlem

ve $A_D, B_D, C_D\in D$'dir.

Bu örnekte

i) $u=\vec{BA}$ $\quad v=\vec{BC}$ / $u=\vec{BC}$ $\quad v=\vec{BA}$ ii)

iii) $u=\vec{CA}$ $\quad v=\vec{CB}$ / iv) $u=\vec{CB}$ $\quad v=\vec{CA}$

olmanın $u\times v$ üzerine etkisini gösteriniz.

ipucu: i) i'nin $u\times v$'si ii'ninkinin tersi

iii)'ün $u\times v$'si iv'nın tersi

Soru: Bunlar birbirinin katı mıdır, hep aynı düzlem midir?

Ödev: Doğrudaş olmayan 3 noktadan tek bir düzlem geçer, ispatlayınız.

3) $D'=\{P\in\mathbb{R}^3 \mid \vec{A_DP}\perp(\vec a\times\vec b)\}$, A_D, B_D ve C_D'yi içeren bir düzlemdir.

$P\in D' \Leftrightarrow \{P\in\mathbb{R}^3 \mid \underbrace{\vec{A_DP}}_{w}\perp(\vec a\times\vec b)\} \Leftrightarrow \underbrace{\vec{A_DP}}_{w}\perp(\vec a\times\vec b)$

$w\perp\vec a\times\vec b \Leftrightarrow w(\vec a\times\vec b)=0 \Leftrightarrow$ Karma çarpım $=0$

$\Leftrightarrow 0=\begin{vmatrix} w_1 & w_2 & w_3\\ a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\end{vmatrix} \Leftrightarrow$ $\boxed{\text{Bu üç vektör}}$ lineer bağımlı, yani $c_1w+c_2\vec a+c_3\vec b=0$ olacak $(c_1,c_2,c_3)\neq(0,0,0)$ var.

$\boxed{\text{Burada } c_1=0 \text{ olsaydı, } \vec a \text{ ve } \vec b \text{ doğrusal bağımlı yani birbirinin katı olurdu.}}$

$\Rightarrow c_1\neq 0$ ve $w=\left(\frac{-c_2}{c_1}\right)\vec a+\left(\frac{-c_3}{c_1}\right)\vec b$

$A_DP = s\vec a + t\vec b$

$\Leftrightarrow P\in\underbrace{\{P\in\mathbb{R}^3 \mid P=A_D+s\vec a+t\vec b \text{ olacak } s,t\in\mathbb{R} \text{ var}\}}_{D \text{ düzlemi}}$

4) $\vec u=(a,b,c)$ ve $P_0=(x_0,y_0,z_0)\in\mathbb{R}^3$ verilsin.

$\mathcal{D}=\{P=(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid \vec{P_0P}\perp\vec u\}=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid ax+by+cz\;(ax_0+by_0+cz_0)=0\}$

$\vec{P_0P}\perp\vec u \Leftrightarrow \langle\vec{P_0P},\vec u\rangle=0 \Leftrightarrow a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0$

$\Leftrightarrow ax+by+cz-(ax_0+by_0+cz_0)=0$

Yani, $d=-(ax_0+by_0+cz_0)\in\mathbb{R}$ ($\vec u$ ve P_0 tarafından TEK türlü belirli) sayısı için $\mathcal{D}=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid ax+by+cz+d=0\}$ düzlemidir.