Çözümler:

1) $(x,y,z) \in d_1 \cap d_2 \Leftrightarrow$ öyle t ve s reel sayıları vardır ki $(2+3t, 1-t, 4t) = (x,y,z) = (11+6s, -2-2s, 12+8s)$.

$$\exists\, t,s \in \mathbb{R}: \quad \boxed{\begin{aligned} 2+3t &= 11+6s \\ 1-t &= -2-2s \\ 4t &= 12+8s \end{aligned}} \Leftrightarrow \exists\, t,s \in \mathbb{R}: \boxed{\begin{aligned} 3t &= 6s+9 \\ t &= 2s+3 \\ 4t &= 8s+12 \end{aligned}}$$

$\Leftrightarrow \exists\, t,s \in \mathbb{R}: \; t = 2s+3$.

Yani, $(2+3t, 1-t, 4t) = (11+6s, -2-2s, 12+8s) \Leftrightarrow t = 2s+3$, olduğundan $(x,y,z) \in d_1 \Leftrightarrow (x,y,z) \in d_2$'dir ki $d_1 = d_2$ demektir. Dolayısıyla, $d_1 \cap d_2 = d_1 = d_2$'dir.

2) Yukarıdaki gibi $(2+3t, 1-t, 4t) = (6s, -2-2s, 12+8s)$ olan t ve s reel sayıları var mı araştıracağız.

$t = 2s+3$ için $1-t = -2-2s$ ve $4t = 12+8s$ olurken

$2+3t = 2+3(2s+3) = 11+6s \neq 6s$ olur. Yani,

$(2+3t, 1-4, 4t) = (6s, -2-2s, 12+8s)$ olacak s ve t YOK.

$d_1 \cap d_3 = d_2 \cap d_3 = \emptyset$ olur.

GÖZLEM: d_1 doğrusunun doğrultman vektörü $(3,-1,4)$ ve d_3 doğrusununki ise 2 katı olan $(6,-2,8)$'dir.

3-) $(11+6s, -2-2s, 12+8s) = (3r, -2-r, 2+3r)$ olacak $r, s \in \mathbb{R}$ varsa

$11+6s = 3r$ ve $12+8s = 3r+2$ olur. Bu durumda

ise $3r+2 = 13+6s = 12+8s$ olur ki $s = \frac{1}{2}$ ve dolayısıyla

$3r+2 = 16 \Rightarrow r = 14/3$ olur. Ancak, bu r ve s için

$-2-2s = -2-r$ sağlanmadığından $d_2 \cap d_4 = \emptyset$ olur.

$d_1 = d_2$ olduğundan $d_1 \cap d_4 = \emptyset$.

$(6s, -2-2s, 12+8s) = (3r, -2-r, 2+3r) \Leftrightarrow 6s = 3r,$

$-2-2s = -2-r$ ve $12+8s = 2+3r$ olduğundan

$r = 2s$ ve $12+8s = 2+3r = 2+6s$ olan $s = -5$ ve

$r = -10$ bulunur. Yani $d_3 \cap d_4$'ün TEK elemanı:

$$(6s, -2-2s, 12+8s)\Big|_{s=-5} = (-30, 8, -28) \text{ yani}$$

$$(3r, -2-r, 2+3r)\Big|_{r=-10} = (-30, 8, -28) \text{ noktasıdır.}$$

GÖZLEM: 1) d_2 ve d_3'ün doğrultman vektörleri aynı olduğu halde $d_2 \cap d_4 = \emptyset$ iken $d_3 \cap d_4 = \{\text{NOKTA}\}$ oldu.

2) d_2'nin doğrultman vektörü $(6, -2, 8)$ ile d_4'ün doğrultman vektörü $(3, -1, 3)$ birbirinin katı değil!

Ör: $\mathcal{D} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 3x+4y-2z=0\}$ ve

$A=(2,3,5)$ ise $A \notin \mathcal{D}$, çünkü $3\cdot2+4\cdot3-2\cdot5 \neq 0$.

Şimdi $d \subseteq \mathcal{D}$ olacak şekilde bir d doğrusu bulalım:

$$d = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid \underbrace{3x+4y-2z=0}_{\mathcal{D}\text{'nin denklemi}} \text{ ve } \underbrace{z=9}_{\mathcal{D} \text{ dışında herhangi bir düzlem denklemi}}\}$$

$$\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 3x+4y-2z=0 \text{ ve } 6x+8y-4z=0\} = \mathcal{D}$$

$$\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 3x+4y-2z=0 \text{ ve } 6x+8y-4z+1=0\} = \emptyset$$

Peki, $\tilde{d} = \{(2t+1, t-3, 9) \mid t \in \mathbb{R}\}$ doğrusu $\mathcal{D}$ üzerinde yatar mı? Yani, $\tilde{d} \subseteq \mathcal{D}$ mi?

$3(2t+1)+4(t-3)-2(9) = 10t-27 = 0$ olan sadece bir $t = \frac{27}{10} \in \mathbb{R}$ olduğundan $\tilde{d}$'nin sadece bir noktası $\mathcal{D}$ düzlemi üzerindedir; $\tilde{d} \not\subseteq \mathcal{D}$ olur.

Aslında biz $\tilde{d} \cap \mathcal{D} = \{(\frac{32}{5}, \frac{-3}{10}, 9)\}$ olduğunu görmüş olduk.

Ör: $A=(2,3,5)\in\mathcal{D}$ ve $d=\{(2t+1,t-3,9)\mid t\in\mathbb{R}\}\subseteq\mathcal{D}$ olacak kaç $\mathcal{D}$ düzlemi vardır, bulunuz.

$\mathcal{D}=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid ax+by+cz+d=0\}$ olsun.

$A\in\mathcal{D} \iff 2a+3b+5c+d=0$

$d\subseteq\mathcal{D} \iff \forall t\in\mathbb{R}$ için $\underbrace{a(2t+1)+b(t-3)+c(9)+d}=0$.

$$t(2a+b)+(a-3b+9c+d)=0 \quad (*)$$

$t=0$ için $a-3b+9c+d=0 \Rightarrow 2a+b=0$, çünkü $t\neq 0$ iken de $(*)$ geçerli.

$$\begin{array}{lll} L_1 & 2a+3b+5c+d=0 \\ L_2 & a-3b+9c+d=0 \\ L_3 & 2a+b=0 \end{array} \iff \begin{array}{ll} -4a+5c+d=0 & L_1-3L_3=L_4 \\ 7a+9c+d=0 & L_2+3L_3=L_5 \\ 2a+b=0 & L_3 \end{array}$$

$$\iff \begin{array}{ll} -4a+5c+d=0 & L_4 \\ 11a+4c=0 & -L_4+L_5 \\ 2a+b=0 & L_3 \end{array} \iff \begin{array}{l} b=-2a \\ c=-11/4\,a \\ d=4a-5c=71/4\,a \end{array}$$

$$ax+by+cz+d=0 \iff a\left(x-2y-11/4\,z+71/4\right)=0$$

$$\overset{a\neq 0}{\iff} \boxed{x-2y-11/4\,z+71/4=0}$$

TEK $\mathcal{D}$ düzlemi var ve denklemi

$x-2y-11/4\,z+71/4=0$!

2.yol: $A=(2,3,5)$, $B=(1,-3,9)$ ve $C=(7,0,9)$

$\overrightarrow{AB}=(-1,-6,4)$ $\quad$ $\overrightarrow{AC}=(5,-3,4)$

$$\vec{N}=\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & k \\ -1 & -6 & 4 \\ 5 & -3 & 4 \end{vmatrix}=\vec{i}\begin{vmatrix} -6 & 4 \\ -3 & 4 \end{vmatrix}-\vec{j}\begin{vmatrix} -1 & 4 \\ 5 & 4 \end{vmatrix}$$

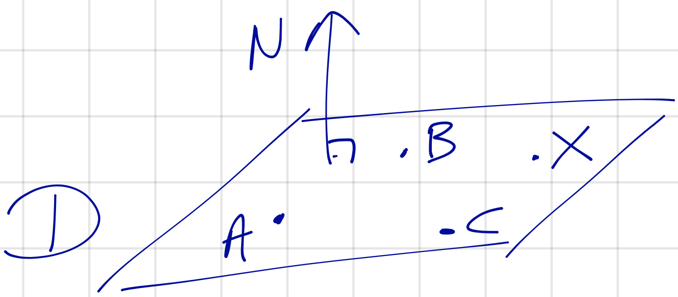
$$+k\begin{vmatrix} -1 & -6 \\ 5 & -3 \end{vmatrix}=-12\vec{i}+24\vec{j}+33k=(-12,24,33)$$

$\overrightarrow{AX}=(x-2,y-3,z-5)$ için $\overrightarrow{AX}\perp\vec{N}\iff$

$\overrightarrow{AX}\cdot\vec{N}=0\iff -12(x-2)+24(y-3)+33(z-5)=0$

$\iff -12x+24y+33z-213=0$

$\iff \boxed{x-2y-\frac{11}{4}z+\frac{71}{4}=0}$ $\rightsquigarrow$ $\mathcal{D}$ düzlemi



TEKLİK: A,B ve C'den geçen bir düzlem $\mathcal{D}'$ ise $\mathcal{D}\cap\mathcal{D}'$, hem $d=BC$ doğrusunu hem de bu doğru üzerinde bulunmayan A noktasını içerir. Teoreme göre $\mathcal{D}\cap\mathcal{D}'\neq\emptyset$, $\mathcal{D}\cap\mathcal{D}'\neq d$ olduğundan $\mathcal{D}=\mathcal{D}'$!