17 mart 2016

Uzaydaki Eğriler

$|A| = \infty$ (A'nın eleman sayısı sonsuz)

Tanım: $A \subseteq \mathbb{R}$ ve $\ell: A \to \mathbb{R}^3$, $\ell(t) = (f(t), g(t), h(t))$ için $\ell(A) = E$ olacak f, g ve h sürekli fonks. varsa ve ℓ, 1-1 ise $E \subseteq \mathbb{R}^3$'e uzayda bir eğri denir. (UYARI! : Bu standart olmayan bir tanım)

ÖRNEK: $E = \{(1,2,3)\}$ eğri değil, çünkü $\ell(A) = E$ olacak birebir ℓ varsa $|A| = 1$ olur, $|A| = \infty$ olmaz.

ÖRNEK: Her doğru bir eğridir.

İspat: $d = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = a_1t + b_1,\ y = a_2t + b_2,\ z = a_3t + b_3\}$ olacak $t \in \mathbb{R}$ vardır.

$$\left.\begin{aligned} f(t) &= a_1t + b_1 \\ g(t) &= a_2t + b_2 \\ h(t) &= a_3t + b_3 \end{aligned}\right\}$$

polinomları $A = \mathbb{R}$ üzerinde sürekli, 1-1 ??

→ A'nın eleman sayısı sonsuz

$\ell(A) = d$ olduğu için d bir eğridir.

(küme olarak iki küme eşit, çakışıyorlar.)

NOT (1-1'lik hakkında)

* $\ell(t) = \ell(s)$ ise

↓

$$\left.\begin{aligned} f(t) &= f(s) \\ g(t) &= g(s) \\ h(t) &= h(s) \end{aligned}\right\}$$ birinin birebir olması yeterli, mesela f, 1-1 ise $t = s$'dir.

mesela;

$\ell(t) = (t, t^2, 0)$

$\ell(s) = (s, s^2, 0)$

$t = s$ ve $t^2 = s^2 \Rightarrow t = s$

$g(t) = t^2$ 1-1 değil

ℓ'nin 1-1'liği:

$\ell(t) = \ell(s) \Longrightarrow$

$(a_1t + b_1, a_2t + b_2, a_3t + b_3)$

$\|$

$(a_1s + b_1, a_2s + b_2, a_3s + b_3)$

$\Downarrow$

$t(a_1, a_2, a_3) = s(a_1, a_2, a_3)$

$(a_1, a_2, a_3) \neq (0,0,0)$ old.

$\Downarrow$

$a_1 \neq 0$ ise $ta_1 = sa_1 \Rightarrow \boxed{t = s}$

⇒ 1-1'lik hakkında...

* f'nin birebir olması gerekir, f, g, h'ın 3'ünün birden birebir olması şart değil en az birinin birebir olması yeter

Soru ① $\{(x,y,\underset{ç}{z}) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2=1\}$ eğri mi?

$\boxed{\text{ve } z=2 \text{ şeklinde söylenmemiz gerekir}}$

② $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x+y=\underset{d}{z}\}$ eğri mi?

$\boxed{\text{ve } z=0}$

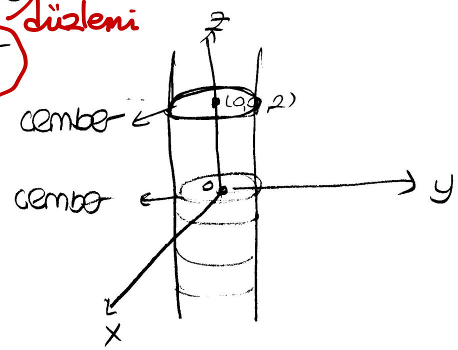
① cevabı

→ ve $z=0$ yazsaydık xy düzlemi üzerinde çember elde ederdik

z üzerinde şart yoksa → Bu bir silindir ve yüzeydir

→ Eğri değildir

→ 1-1 değildir



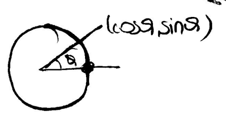
② cevabı

Doğru değil, düzlemdir

* Bu dersteki amacımız eğriyi yüzeyden, doğruyu düzlemden ayırt etmek

Değiştirdiğimiz halleriyle; (kırmızı kalemle)

Cevap 1: C bir eğridir çünkü $A=[0,2\pi)$ için



$f(t)=(\cos t, \sin t, 2)$

sürekli fonksiyonlar

② 1-1 fonksiyon

$f(A)=C$

$|A|=\infty$

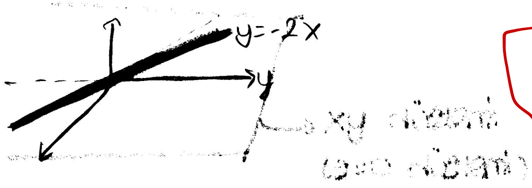
çünkü, $\ell(t)=(t,-2t,0)=(a_1t+b_1, a_2t+b_2, a_3t+b_3)$ ve $(a_1,a_2,a_3)\neq(0,0,0)$?

cevap ↳ ② d bir $\boxed{\text{doğru}}$ olduğu için eğridir

$d=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid y=-2x \text{ ve } z=0\}$

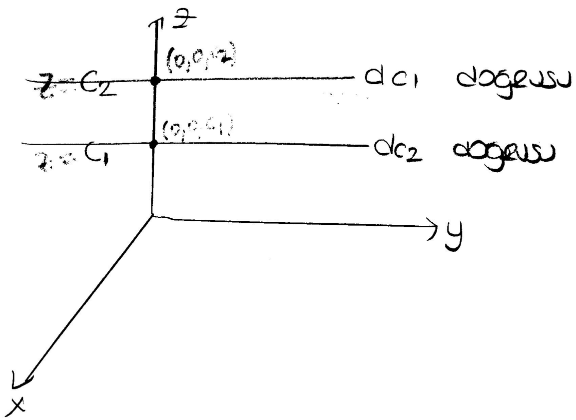
çünkü $y=-2x$ düzleminin denklemi $2x+y=0$ olarak da yazılabilir. $(a,b,c)=(2,1,0)$

$(a,b,c)=(0,0,1)$ → birbirinin katı değil ⇓ d bir doğru.



Örnek $\mathcal{D}=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x=0\}$ → Beyaz tahta, yz düzlemi

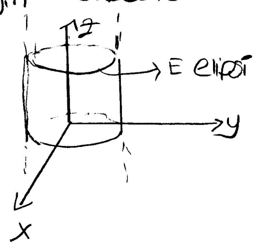
$d_c=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x=0 \text{ ve } z=c\}$



* Tek denklem düzlemi tanımlar
* Doğru için en az birbirinin katı olmayan 2 denklem gerekir (2 düzlemin kesişimi) (çakışık olmayan)

Örnek $E=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1 \text{ ve } z=0\}$ eğridir

çünkü $A=[0,2\pi)$ için $\ell(t)=(\underbrace{2\cos t}_{f}, \underbrace{3\sin t}_{g}, \underbrace{0}_{h})$ 1-1'dir ve f,g,h süreklidir. $|A|=\infty$



$x'=\frac{x}{2}$ $y'=\frac{y}{3}$ için

$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$

⇕

$x'^2+y'^2=1$ → birim çember

$\Rightarrow \frac{x}{2}=x'=\cos t$ ve $\frac{y}{3}=y'=\sin t$

NOT: Uzayda eğri elde etmenin kolay bir yolu $\mathbb{R}^2$'deki eğrileri $\mathbb{R}^3$'e taşımaktır. Aslında $\mathbb{R}^3$'te bir düzlemde yatan her eğri bu şekilde elde edilebilir.

Örnek: $P_{\mathcal{D}} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid y = x^2 \text{ ve } z = x+y\}$ kümesi $\mathcal{D} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x+y-z=0\}$ düzlemindedir.

P'nin bir eğri olduğunu görmek için parametrik denklemini bulalım: $x=t \Rightarrow y=x^2=t^2$ ve $z=x+y=t+t^2$.

Yani, $(x,y,z) \in P \Leftrightarrow (x,y,z) = (t,t^2,t+t^2)$ olacak $t \in \mathbb{R}$ var.

Bu yüzden $\alpha: \mathbb{R} \to P$, $\alpha(t) = (t,t^2,t+t^2)$ örten bir fonksiyon olur. $\alpha(t) = \alpha(t') \Rightarrow t = t'$ olduğundan α 1-1'dir. $\alpha_1(t) = t$, $\alpha_2(t) = t^2$ ve $\alpha_3(t) = t+t^2$ polinom oldukları için sürekli ve son olarak $|A| = |\mathbb{R}| = \infty$ olduğu için $P_{\mathcal{D}} \subseteq \mathbb{R}^3$ bir eğridir.

Şimdi; $P_{\mathcal{D}}$'nin $\mathbb{R}^2$'deki bir parabolün görüntüsü olduğunu gösterelim:

Önce, $\mathcal{D}$ düzlemi ile $\mathbb{R}^2$ arasındaki 1-1 eşlemeyi bulmak için $\mathcal{D}$'nin parametrik denklemini elde edelim:

$(x,y,z)\in\mathcal{D} \iff z=x+y \iff (x,y,z)=(s,t,s+t)$ olacak

s ve t reel sayıları vardır.

Böylece; $\varphi:\mathbb{R}^2\longrightarrow\mathcal{D}$, $\varphi(s,t)=(s,t,s+t)$ 1-1 ve örten fonksiyonuna ulaşırız.

$\mathbb{R}^2$'deki $P=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid y=x^2\}=\{(a,a^2)\mid a\in\mathbb{R}\}$ parabolü

φ altında $\varphi(P)=\{\varphi(a,a^2)\mid a\in\mathbb{R}\}=\{(a,a^2,a+a^2)\mid a\in\mathbb{R}\}=P_{\mathcal{D}}$

altkümesine taşındığı için, $P_{\mathcal{D}}$ parabolüne P'nin $\mathcal{D}$ düzlemine bir "gömülüşü" denmektedir.

Ör: $\mathcal{D}=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x+y-z=0\}$ düzlemine $d=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid y=2x\}$ doğrusunu gömelim.

Yukarıdaki örnekte $\mathcal{D}$'nin parametrik denklemini ve $\varphi:\mathbb{R}^2\longrightarrow\mathcal{D}$, $\varphi(s,t)=(s,t,s+t)$ 1-1 ve örten fonksiyonunu bulmuştuk.

$\varphi(d)=\{\varphi(x,y)\mid (x,y)\in d\}$ olduğundan d'nin parametrik denklemini bulmalıyız.

$(x,y)\in d \iff y=2x \iff (x,y)=(a,2a)$ olacak $a\in\mathbb{R}$ var.

$\varphi(d)=\{\varphi(a,2a)\mid a\in\mathbb{R}\}=\{(a,2a,3a)\mid a\in\mathbb{R}\}$ doğrusu d'nin $\mathcal{D}$ düzlemine bir gömülüşü olur.

Ör: $E=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid y=\cos x\}$ eğrisini

$\mathcal{D}=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid 3x+5y-7=0\}$ düzlemine

gömelim.

$$\varphi:\mathbb{R}^2\longrightarrow\mathbb{R}^3,\quad \varphi(t,s)=\left(t,\frac{-3t+7}{5},s\right)$$

için $\varphi(\mathbb{R}^2)=\mathcal{D}$ olur.

$$\varphi(t,\cos t)=\left(t,\frac{-3t+7}{5},\cos t\right) \text{ olduğundan}$$

$\varphi(E)=\left\{\left(t,\frac{-3t+7}{5},\cos t\right) \mid t\in\mathbb{R}\right\}$ eğrisi E'nin

$\mathcal{D}$ düzlemine bir gömülüşüdür.

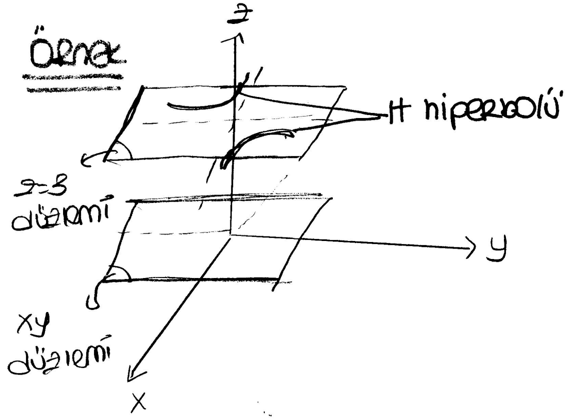
Hatırlatma: $\mathcal{D}$ düzleminin parametrik

denklemi: $\boxed{\begin{array}{l} x=t \\ y=\dfrac{-3t+7}{5} \\ z=s \end{array}}$ şeklindedir.

$E\subseteq\mathbb{R}^2$'nin parametrik denklemi: $\boxed{\begin{array}{l} x=t \\ y=\cos t \end{array}}$

$\varphi(E)\subseteq\mathbb{R}^3$'nin parametrik denklemi: $\boxed{\begin{array}{l} x=t \\ y=\dfrac{-3t+7}{5} \\ z=\cos t \end{array}}$

Örnek



$H=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid xy=1 \text{ ve } z=3\}$

$A=\mathbb{R}\setminus\{0\}$ için $|A|=\infty$,

$\ell(t)=(t,\frac{1}{t},3)$ 1-1 ve

sürekli ve $\ell(A)=H$ olduğu

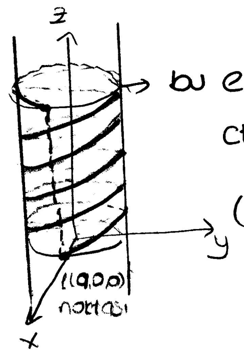
için H bir eğridir.

Örnek. (Düzlemsel olmayan bir eğri: Helis)

$$\mathcal{H}_{a,b,c}=\{(\underset{\underset{f}{\parallel}}{\overset{\text{1e bir değil}}{a.\cos t}},\ \underset{\underset{g}{\parallel}}{b\sin t},\ \underset{\underset{h}{\parallel}}{\overset{\text{birebir}}{ct}}) \mid t\in\mathbb{R}\}$$

$$= \ell(\underset{\underset{A}{\parallel}}{\mathbb{R}}) \ ! \quad (\ell(t)=(f(t),g(t),h(t)) \text{ için})$$

$\left.\begin{array}{l} x=a.\cos t \\ y=b.\sin t \end{array}\right\}$ iken $\left(\frac{x}{a}\right)^2+\left(\frac{y}{b}\right)^2=1$ olduğu için



bu elips $z=z_0$ düzleminde ise

$ct=z_0 \iff t=\frac{z_0}{c}$ ($c\neq 0$ iken)

$(x,y,z_0)\in\mathcal{H}_{a,b,c} \iff \left.\begin{array}{l} x=a.\cos(\frac{z_0}{c}) \\ y=b.\sin(\frac{z_0}{c}) \\ z=z_0 \end{array}\right\}$ NOKTA olur

$\mathcal{H}_{a,b,c}$'nin $z=20$ düzlemindeki her

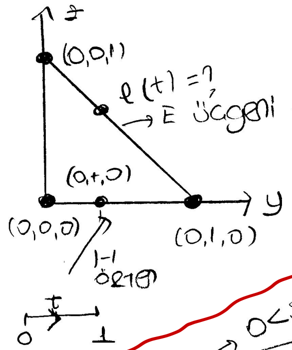
$$\left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \text{ ve } z=20 \right\}$$

elipsi üzerinde bir noktası vardır.

$\boxed{\text{Ödev:}}$ $\mathcal{H}_{a,b,c}$ üzerinde öyle 4 nokta bulunuz ki 4. nokta diğer 3'ünün belirttiği düzlemde olmasın.

$\Rightarrow$ $\mathcal{H}_{a,b,c} \subseteq \mathcal{D}$ olan düzlem yoktur.

ÖRNEK



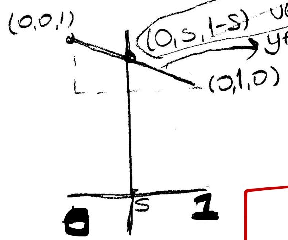
$A=(0,1,0)$ $B=(0,0,1)$ ise

$\overrightarrow{AB} = B-A = (0,-1,1)$

$\underbrace{s\overrightarrow{AB}+A}_{\parallel} = s(0,-1,1)+(0,1,0)$

$(1-s)A+sB = (0,1-s,s) = \ell(s)$

$\ell(0)=A$ ve $\ell(1)=B$ olur.



$0<s\leq 1$ $(0,s,1-s)$ veya $(0,1-s,s)$ veya $\boxed{1<t\leq 2 \quad (0,2-t,t-1)}$

$\to y+z=1$ ve $x=0$

$1\leq t<2$ için $\ell(t-1)=(0,2-t,t-1)$

0 — s — 1

$s=t-1$

1 — t — 2

X$(0,0,s)$ (0,0,1)
X$(0,0,1-t)$ — s
V$(0,0,3-t)$ (0,1,0)

$s=1-t$ t' $t=t'+$

$$\ell(t)=\begin{cases} (0,t,0), & t\in[0,1) \\ (0,2-t,t-1), & t\in[1,2) \\ (0,0,3-t), & t\in[2,3) \end{cases}$$

$A=[0,3)=[0,1)\cup[1,2)\cup[2,3) \rightarrow [0,1)$ olsaydık

5 ℓ 1-1 olmazdı

$f(t)=0$

$$g(t)=\begin{cases} t, & t\in[0,1) \\ 2-t, & t\in[1,2) \\ 0, & t\in[2,3) \end{cases}$$

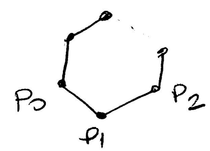
$$h(t)=\begin{cases} 0, & t\in[0,1) \\ t-1, & t\in[1,2) \\ 3-t, & t\in[2,3) \end{cases}$$

A üzerinde sürekli !

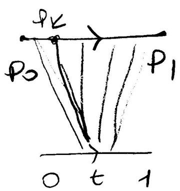
$$\ell(t)=(f(t),g(t),h(t))$$

Ödev: Uzaydaki her çokgenin bir eğri olduğunu gösteriniz.

İpucu



Buradaki her parçayı parametrize edip, uygun bir biçimde birleştirince sürekli bir ℓ elde edilir.



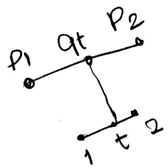
(1) $\underbrace{(1-t)P_0+tP_1}_{P_t} \xrightarrow{t=0} P_0$

$\xrightarrow{t=1} P_1$

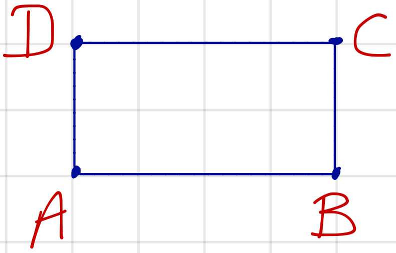
(2) $(1-t')P_1+t'P_2, \quad 0\le t'<1 \quad t'=t-1$

$\quad \| \qquad\qquad\qquad\qquad 1\le s<2$

$q_t=(2-t)P_1+(t-1)P_2$



Örnek: Köşeleri $(0,0,0), (0,2,0), (0,2,1)$ ve $(0,0,1)$ olan



şeklindeki dikdörtgen eğridir.

$(1-t)A + tB$, $t \in [0,1)$ için AB doğru parçasını tarar.

$(1-s)B + sC$, $s \in [0,1)$ için BC //

$s+1 = t \in [1,2)$

$(1-s)C + sD$, $s \in [0,1)$ için CD //

$s+2 = t \in [2,3)$

$(1-s)D + sA$, $s \in [0,1]$ için DA //

$s+3 = t \in [3,4)$

$$\ell(t) = \begin{cases} (1-t)A + tB = (0, 2t, 0), & t \in [0,1) \\ (2-t)B + (t-1)C = (0, 2, t-1), & t \in [1,2) \\ (3-t)C + (t-2)D = (0, 6-2t, 1), & t \in [2,3) \\ (4-t)D + (t-3)A = (0, 0, 4-t), & t \in [3,4). \end{cases}$$

$(*)$

$$f(t) = 0, \quad t \in [0,4)$$

$$g(t) = \begin{cases} 2t, & t \in [0,1) \\ 2, & t \in [1,2) \\ 6-2t, & t \in [2,3) \\ 0, & t \in [3,4) \end{cases}$$

$$h(t) = \begin{cases} 0, & t \in [0,1) \\ t-1, & t \in [1,2) \\ 1, & t \in [2,3) \\ 4-t, & t \in [3,4) \end{cases}$$

$\ell(t) = (f(t), g(t), h(t))$ için

$\ell : [0,4) \to \mathbb{R}^3$ fonksiyonu

1-1, çünkü $\ell(t) = \ell(t')$

ise $(*)$'dan 4 durum var.

Örneğin $(0,2t,0) = (0,2t',0) \Rightarrow t = t'$.

ℓ sürekli, çünkü f, g ve h öyle!

Bu yüzden, $\ell([0,4)) = \overline{ABCD}$ bir eğri!