GENEL FİZİK I
DERS NOTLARI

Hazırlayanlar:

Dr. Mustafa POLAT
Dr. Leyla TATAR YILDIRIM

2012

BÖLÜM-1
Ölçme

Bu bölüm kapsamında aşağıdaki başlıklar üzerinde durulacaktır:

- **Bir fiziksel niceliğin ölçülmesi**
- **Birimler, birim sistemleri**
- **Mekanikte temel birimler**
- **Birim dönüşümleri**
- **Ölçümlerdeki duyarlılık**

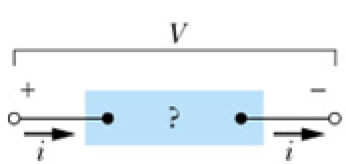
Ölçme: miktar belirleme işlemidir.

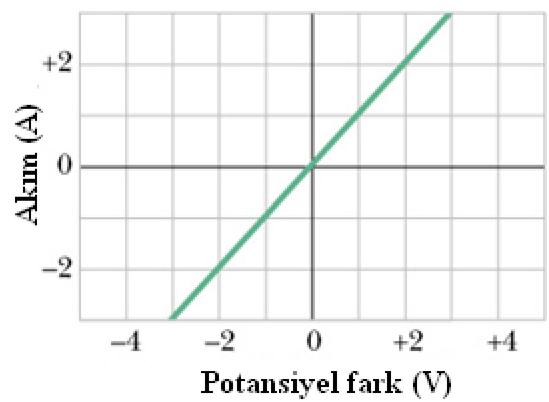
Fizikte, nicelikleri ölçmek için birtakım deneyler yapar ve ölçülen nicelikler arasında bir bağ kurmaya çalışırız. Bu bağlar genellikle matematiksel eşitlikler yoluyla ifade edilir.

Buna en iyi örnek Ohm Yasası' dır. Bu yasanın özü, bir iletkenin iki ucu arasına uygulanan potansiyel fark ile iletken üzerinden akan elektrik akımının ölçülmesi esasına dayanır.

Uygulanan potansiyel fark (*V*) ile elektrik akımı (*I*) arasındaki ilişki çizgiseldir ve aşağıdaki matematiksel form ile verilir

$$\boxed{R = \frac{V}{I} = \text{ sabit}}$$





Bu eşitlik "Ohm Yasası" olarak bilinir.
Eşitlikteki *R*, iletkenin "direnci" dir.

Birimler: Fiziksel bir büyüklüğü tam olarak tanımlayabilmek için o büyüklüğün nasıl ölçüleceğini bir kurala bağlamak ve bir birim ile ifade etmek gerekir. Böylece büyüklükleri bir standarda bağlamış oluruz.

Temel Büyüklükler: Büyüklüklerin tümü birbirinden bağımsız değildir. Bazı büyüklükler temel büyüklük, diğerleri ise bu temel büyüklüklerden türetilmiş büyüklüklerdir.

Temel büyüklükler için bir standart saptanır ve diğer büyüklükler temel büyüklükler cinsinden birimlendirilir.

Temel büyüklüklerin belirlenmesi amacı ile, 1875 yılında kurulan ve halen Paris'te bulunan **Uluslararası Ağırlık ve Ölçmeler Bürosu** (IBWM = International Bureau of Weights and Measurements) 1971 yılında bir toplantı yapmış ve Tablo 1'de verilmiş olan 7 büyüklüğü temel büyüklük olarak seçmiştir.

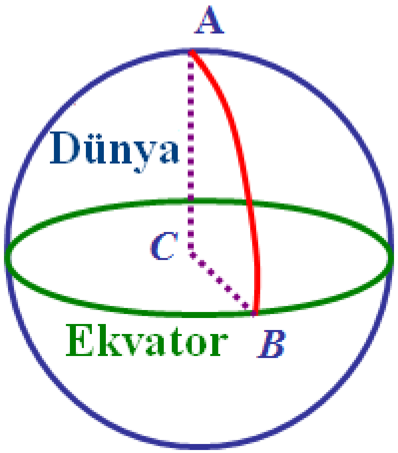
Bu 7 büyüklük uluslararası birim sistemini (The International Systems of Units = SI) oluşturur.

Tablo 1. SI temel büyüklükleri

Büyüklük	Adı	Sembolü
Uzunluk	Metre	m
Kütle	Kilogram	kg
Zaman	Saniye	s
Elektrik akımı	Amper	A
Sıcaklık	Kelvin	K
Madde miktarı	Mol	mol
Işık şiddeti	Kandela	Cd

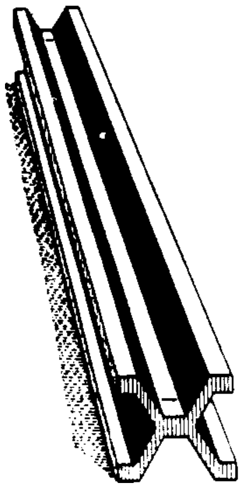
Mekanikte sadece üç tane niceliğe ihtiyaç duyulur. Bunlar uzunluk, zaman ve kütledir.

Metre:



Başlangıçta metre, kuzey kutbu ile ekvator arasındaki mesafenin on-milyonda biri olarak tanımlanmıştır (1792).

$$1\ \text{m} \equiv \frac{AB}{10^7} \quad ; \quad (R_{Dünya} = 6370\ \text{km})$$



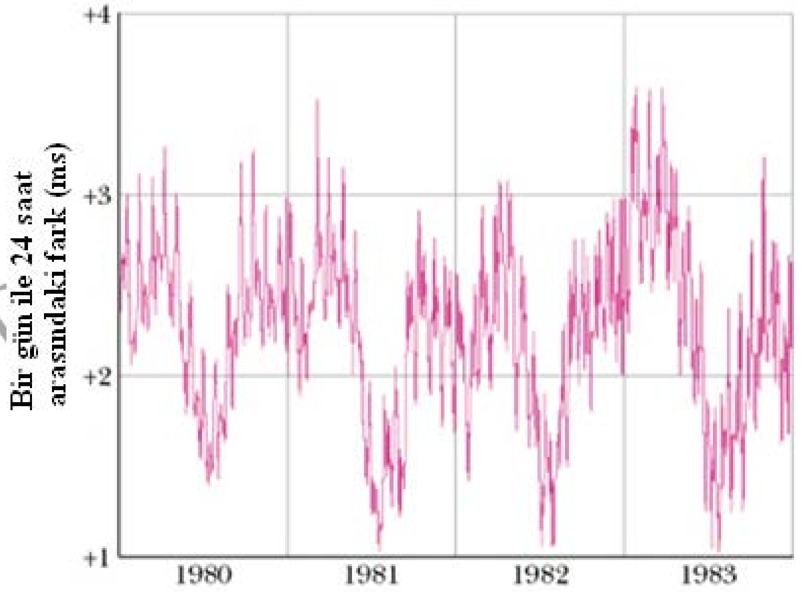
Pratik nedenlerden ötürü daha sonra metre, platin-iridyumdan yapılmış standart bir ölçüm çubuğu üzerindeki iki çizgi arasındaki mesafe olarak tanımlanmıştır.

1983' ten beri metre, **1/299792458 s**' lik zaman aralığında ışığın boşlukta aldığı yol olarak tanımlanmıştır. Bu yeni tanımın sebebi, ışık hızının çok hassas bir şekilde ölçülebiliyor olmasıdır.

Saniye:

Başlangıçta saniye, Dünya'nın kendi ekseni etrafındaki tam bir dönüş süresinin (24x60x60)' ta biri olarak aşağıdaki gibi tanımlanmıştır.

$$1 \text{ saniye} \equiv \frac{1}{24\times 60\times 60}$$



Bu tanımdaki problem, şekilde gösterildiği gibi, bir günlük sürenin sabit olmayışıdır.

Bu nedenle 1967' den beri saniye, Cessium-133 elementinin yaydığı belli bir dalga-boyundaki ışığın 9192631770 titreşimi için geçen süre olarak tanımlanmaktadır.

Kilogram:

SI birim sisteminde kütle standardı olan bir platin-iridyum silindir aşağıda verilmiştir.

$$h = d = 39.2\ mm$$

Bu silindirin kütlesi 1 kilogram olarak kabul edilmiş ve Paris' teki Uluslararası Kütle Ölçüm Bürosu' nda tutulmaktadır. Hassas kopyaları da başka ülkelere gönderilmiştir.

Birim dönüştürme :

Çoğu zaman fiziksel niceliklerin birimlerini değiştirmeye ihtiyaç duyarız. Bunu yapmak için, iki birim arasındaki dönüşüm faktörünü bilmemiz gerekir.

Örnek: karayolu hız limiti olan 65 mil/saat' i m/s cinsinden ifade ediniz.
1 mil = 1609 m ve 1 saat = 3600 s

Bu durumda,

$$65\ \frac{\text{mil}}{\text{saat}} = \left(65\text{x}\frac{1609\ \text{m}}{3600\ \text{s}}\right) = 29\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

bulunur.

Bu hız limitini km/sa cinsinden bulunuz.

Ölçümlerdeki Duyarlılık :

Belli bir nicelik, örneğin bir cismin uzunluğu L, değişik duyarlılıklarda belirlenebilir. Duyarlılık ölçüm yöntemine ve ölçüm aletine bağlıdır.

En küçük ölçeği 1 mm olan bir cetvel ile ölçüm yapıyorsak L uzunluğunu,
$L = 1.234$ m şeklinde vermek gerekir.
Yani L uzunluğu dört anlamlı sayı ile verilmelidir.

Cetvel üzerindeki en küçük ölçek 1 mm olduğundan,
L' yi $L = 1.2346$ m biçiminde vermek anlamsız olacaktır.

Diğer taraftan, duyarlılığı 0.1 mm olan verniyeli kumpas kullanıyorsak,
$L = 1.2346$ m şeklinde verilebilir ve bu durumda beş anlamlı sayı ile ifade edilir.

Hesaplanan nicelikteki anlamlı sayı, hesaplamalarda kullanılan niceliklerin anlamlı sayılarından fazla olamaz.

Örnek: Sabit v hızıyla hareket eden bir araç $d = 123$ m' lik yolu $t = 7.89$ s' de alıyor. Aracın hızını bulunuz.

Aracın hızı : $$v = \frac{d}{t} = \frac{123 \text{ m}}{7.89 \text{ s}} = 15.5893536 \text{ m/s}$$

v' yi ifade etmek için dokuz rakam kullanmak anlamlı değildir. Çünkü, v' nin hesaplanmasında kullanılan d ve t nicelikleri sadece üç anlamlı sayı ile verilmiştir.

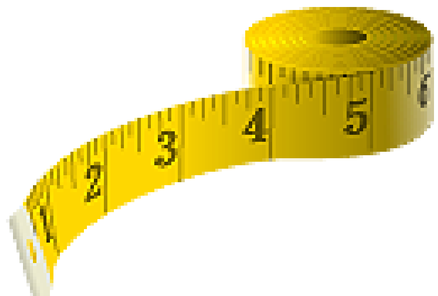
Dolayısıyla v' de üç anlamlı sayı içerecek şekilde verilmelidir:

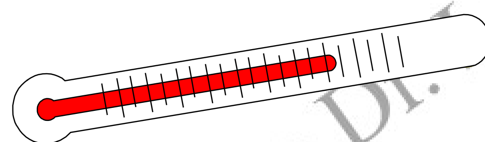
$v = 15.6$ m/s.

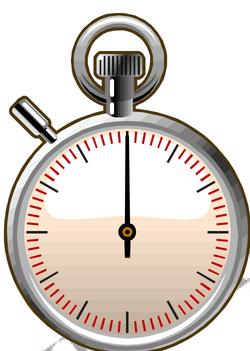
Birimlerin alt ve üst katları: Bazı büyüklükler aynı birim ile ifade edildiği halde sayısal değerleri birbirinden çok farklı olabilir. Örneğin, bir atomun yarıçapı ile Dünya’ nın yarıçapı metre olarak ifade edilir, ancak sayısal değerleri çok farklıdır. Bu nedenle SI birimlerin alt ve üst katlarını gösteren işaretler kullanılır.

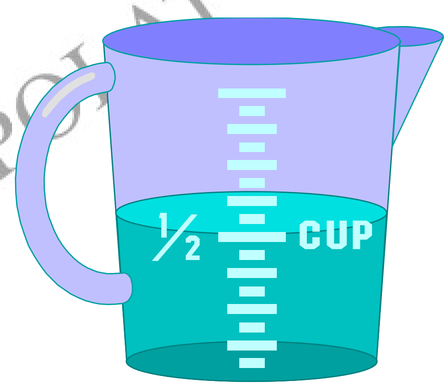
Faktör	İsim	Sembol	Günlük dildeki adı
10^{24}	Yotta	Y	1 septilyon
10^{21}	Zetta	Z	1 sekstilyon
10^{18}	Exa	E	1 kentilyon
10^{15}	Peta	P	1 katrilyon
10^{12}	Tera	T	1 trilyon
10^{9}	Giga	G	1 milyar
10^{6}	Mega	M	1 milyon
10^{3}	Kilo	k	bin
10^{2}	Hecto	h	yüz
10^{1}	Deka	da	on
10^{-1}	Deci	d	onda bir
10^{-2}	Centi	c	yüzde bir
10^{-3}	Milli	m	binde bir
10^{-6}	Micro	m	milyonda bir
10^{-9}	Nano	n	milyarda bir
10^{-12}	Pico	p	trilyonda bir
10^{-15}	Femto	f	katrilyonda bir
10^{-18}	Atto	a	kentilyonda bir
10^{-21}	Zepto	z	sekstilyonda bir
10^{-24}	Yocto	y	septilyonda bir

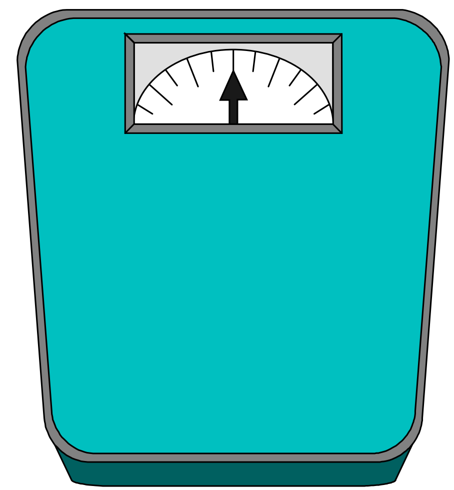
Bazı Ölçme Aletleri



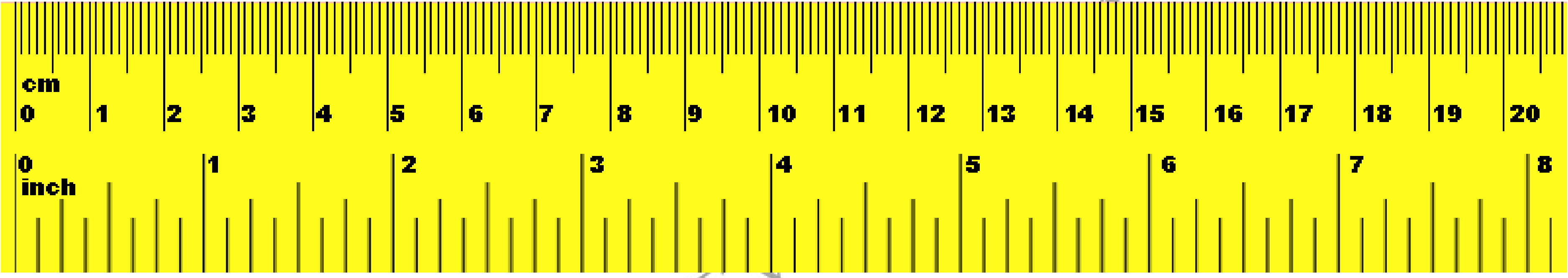




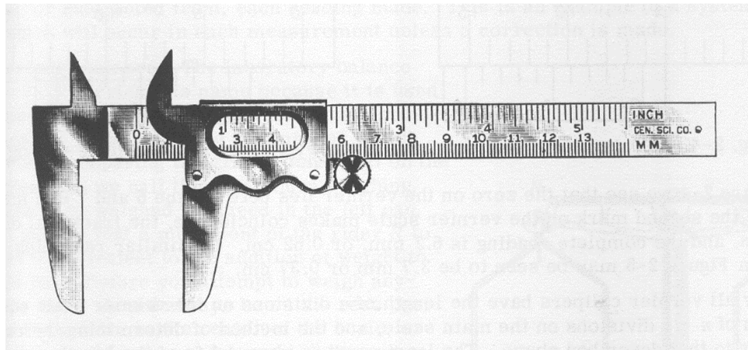


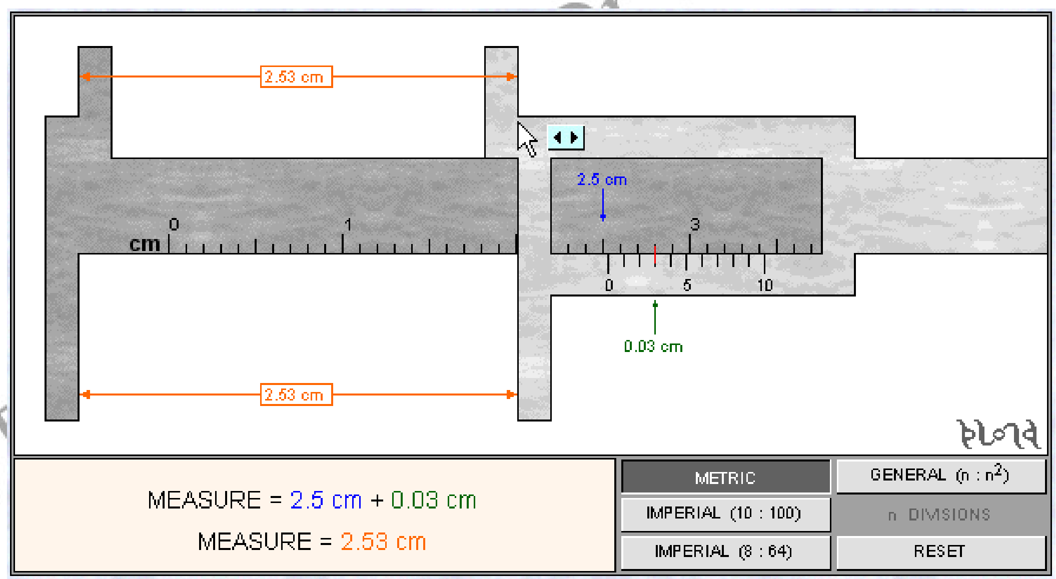


Cetvel

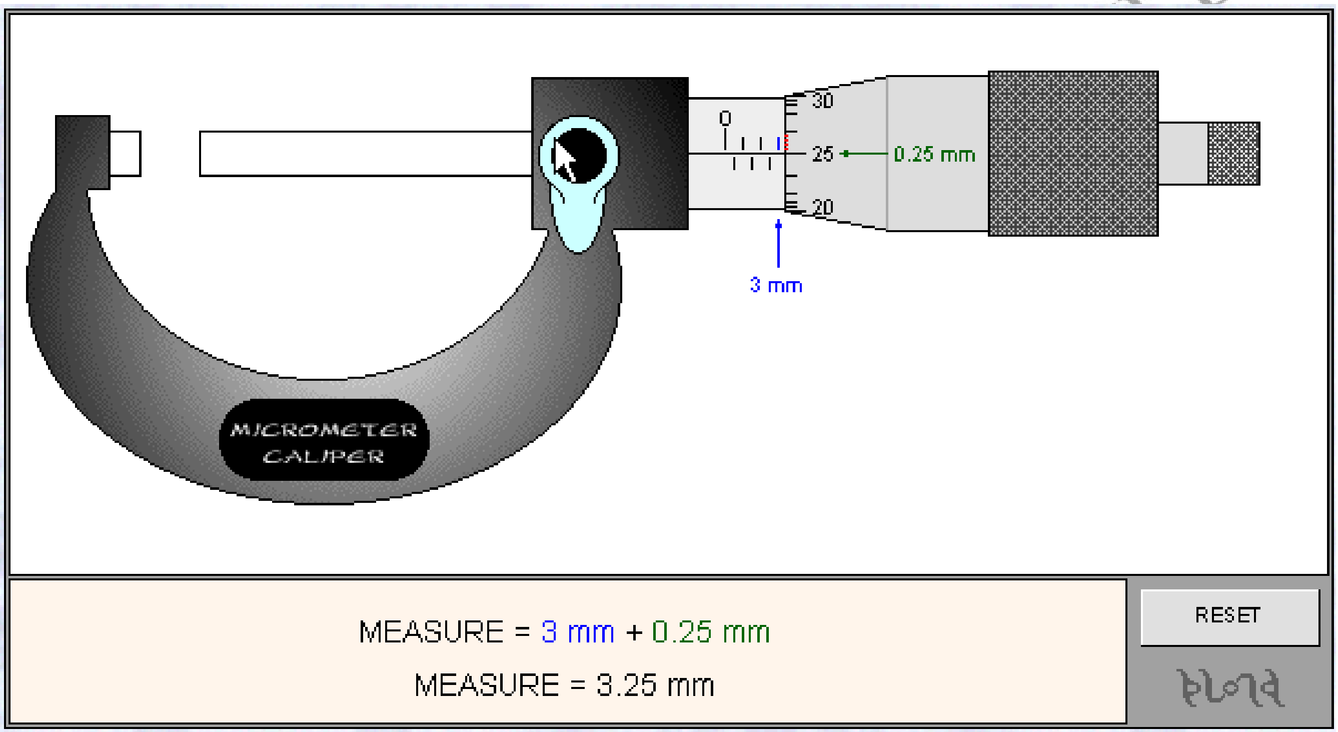


Verniyeli Kumpas





Mikrometre



0
30
25
20
0.25 mm
3 mm
MICROMETER
CALIPER
MEASURE = 3 mm + 0.25 mm
MEASURE = 3.25 mm
RESET

BÖLÜM-2
Vektörler

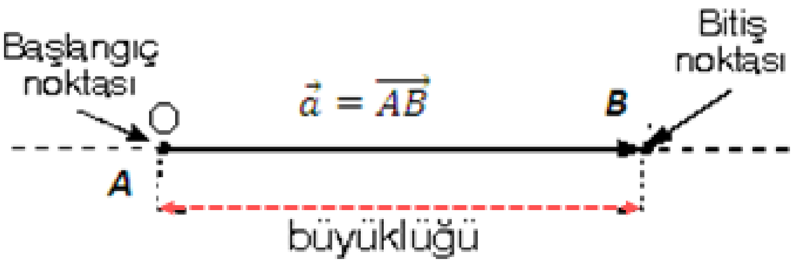
Fizikte sadece büyüklükleri ile tanımlanan niceliklere "**skaler**" nicelikler diyoruz. Sıcaklık, kütle, enerji bunlardan bazılarıdır.

Büyüklük yanında ayrıca yön bilgisi içeren veya gerektiren diğer fiziksel niceliklere ise "**vektörel**" nicelikler diyoruz. Yer-değiştirme, hız, ivme, kuvvet bunlardan bazılarıdır.

Bu bölüm kapsamında, aşağıdaki konulara değineceğiz:

- **Vektörleri geometrik toplama ve çıkarma işlemi**
- **Vektörleri bileşenlerine ayırma ve birim vektör notasyonu**
- **Bileşenler yardımıyla toplama ve çıkarma**
- **Bir vektörün bir skaler ile çarpılması**
- **İki vektörün skaler (dot veya nokta) çarpımı**
- **İki vektörün vektörel (cross) çarpımı**

Bir vektörün üç elemanı vardır.

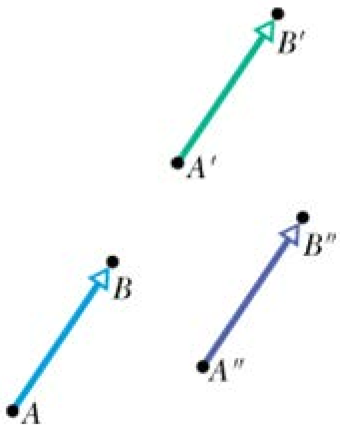


Uygulama Noktası (başlangıç noktası): Vektörel büyüklüğün uygulandığı noktaya uygulama ya da başlangıç noktası denir. Yukarıdaki vektörün uygulama noktası O noktasıdır.

Büyüklüğü: Vektörün sayısal değerine o vektörün büyüklüğü denir.

Şekilde verilen $\vec{a}$ vektörünün büyüklüğü $a = AB$' dir.

Yönü:Vektörel büyüklüğün yönü, doğru parçasının ucuna konulan okun yönündedir. Şekildeki $\vec{a}$ vekötürnün yönü O' dan A' ya yöneliktir veya doğu yönündedir.

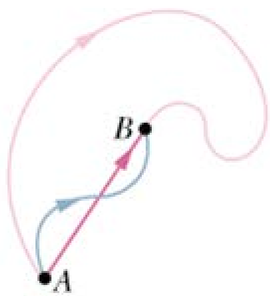


A noktasından *B* noktasına hareket eden bir cismin yer-değiştirme vektörü *A* noktasından *B* noktasına çizilen bir okla gösterilir.

Okun uzunluğu yer-değiştirmenin büyüklüğü ile orantılıdır.

Okun yönü ise yer-değiştirmenin yönü ile ilgilidir.

Şekilde *A* dan *B* ye, *A'* *d*en *B'* *n*e ve *A''* nden *B''* ne çizilen vektörlerin büyüklükleri ve yönleri aynıdır.



Vektörler, büyüklükleri ve doğrultuları değiştirilmeden istenildiği gibi kaydırılabilir.

Kitaplarda vektörler sembolik olarak iki şekilde gösterilir:

$\vec{a}$ (niceliğin üzerine bir ok çizilir)

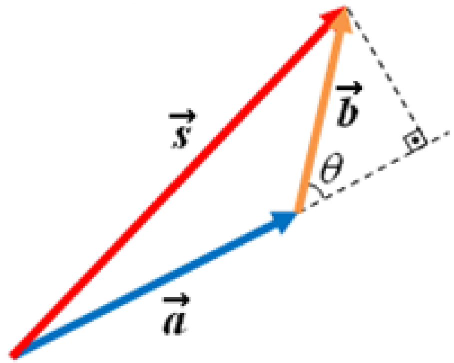
a (nicelik koyu yazılır)

Vektörün büyüklüğü de $|\vec{a}|$ veya a biçiminde sembolize edilir.

Vektör işlemleri

- Vektörlerin Eşitliği
- Bir Vektörün Negatifi
- Vektörün Taşınması
- Vektörlerin Toplanması
- Vektörlerin Çıkarılması
- Vektörün Bileşenlerine Ayrılması
- Vektörün Büyüklüğünün Bulunması
- Vektörün bir eksenle yaptığı açının bulunması
- Vektörlerin bileşenleri cinsinden toplanması
- Vektörlerin Çarpılması
    1. Bir Vektörün Bir Skaler ile Çarpılması
    2. İki Vektörün Skaler (dot veya nokta çarpım) Çarpılması
    3. İki Vektörün Vektörel Çarpılması
- Vektörlerin Skalerle Bölünmesi
- **VEKTÖR VEKTÖRE BÖLÜNMEZ !!!**

Vektörlerde Geometrik Toplama :



$$\vec{s} = \vec{a} + \vec{b}$$

$\vec{b}$ vektörünün başlangıç noktası $\vec{a}$ vektörünün ucuna gelecek şekilde $\vec{b}$ vektörü kaydırılır.

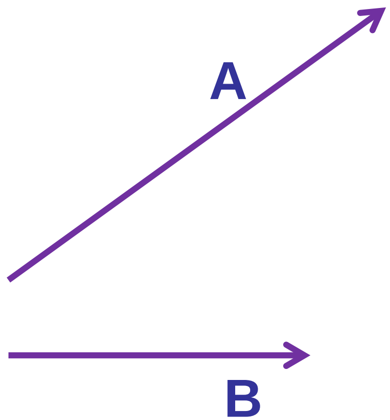
$\vec{a}$ vektörünün başlangıç noktasından $\vec{b}$ vektörünün uç noktasına çizilen vektör $\vec{s}$ vektörüdür.

İki vektör arasındaki açı θ olmak üzere, $\vec{s}$ vektörünün büyüklüğü,

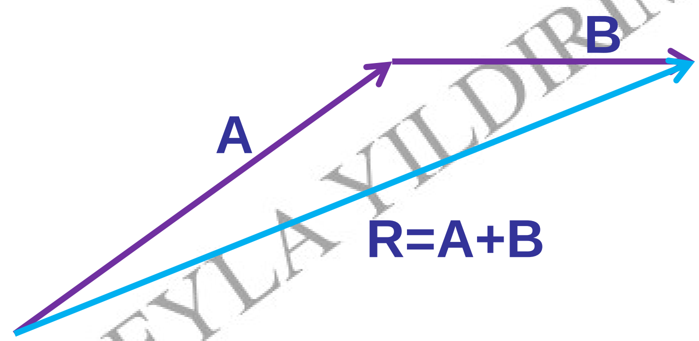
$$s^2 = a^2 + b^2 + 2ab\cos\theta$$

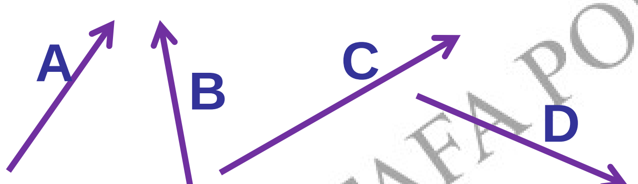
ile verilir (kosinüs teoremi).

Vektörlerde Geometrik Toplama :

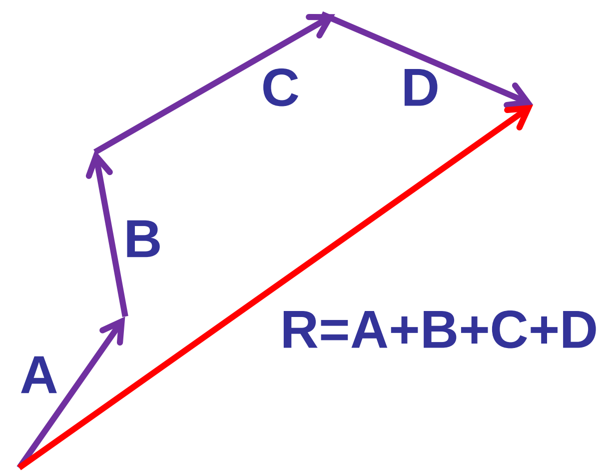


R=A+B=?





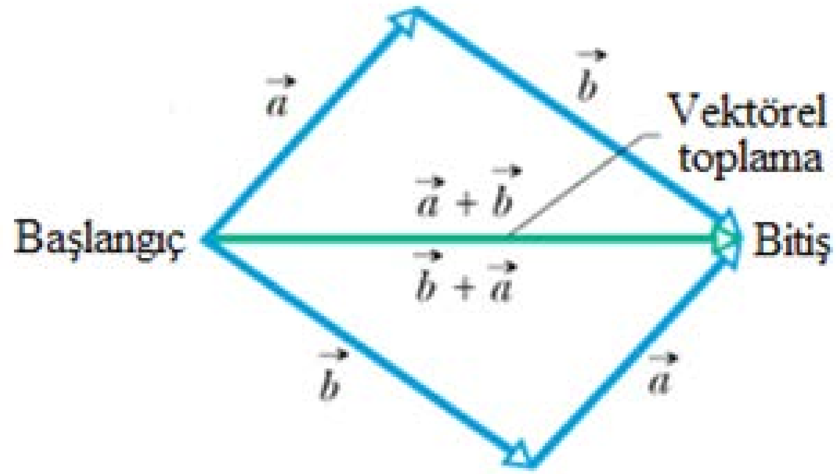
R=A+B+C+D=?



Vektörel toplama işleminin

"değişme özelliği" vardır:

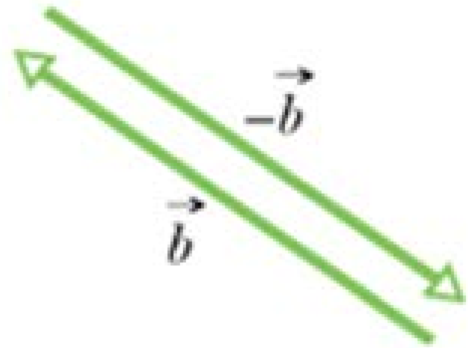
$$\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$$



$\vec{b}$ vektörünün negatifi ($-\vec{b}$),

$\vec{b}$ vektörü ile aynı büyüklükte

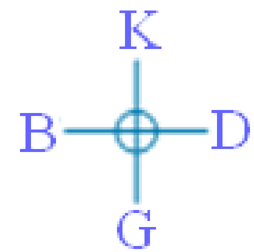
fakat ters yöndedir.



Örnek : Kuzeye doğru yönelmiş 20 km' lik bir vektör ile 60^o kuzey-batıya doğru yönelmiş 35 km' lik vektörün bileşkesini bulunuz.

İki vektör arasındaki açı 60^o ' dir.

Kosinüs teoremine göre bileşke vektörün büyüklüğü,



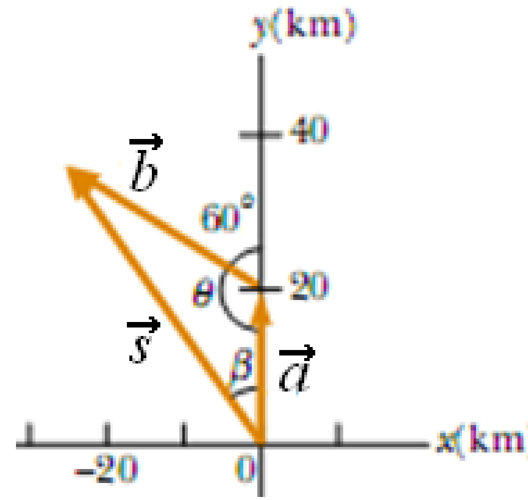
$$s = \sqrt{a^2 + b^2 + 2ab\cos\theta}$$

$$= \sqrt{(20)^2 + (35)^2 + 2(20)(35)\cos(60^o)}$$

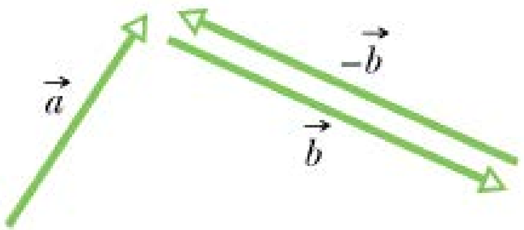
$$= 48.2 \text{ km}$$

$$\frac{\sin\beta}{b} = \frac{\sin\theta}{s} \rightarrow \sin\beta = \frac{b}{s}\sin\theta = \frac{35}{48.2}\sin(120^\circ) = 0.629$$

$$\beta = 38.9^0$$

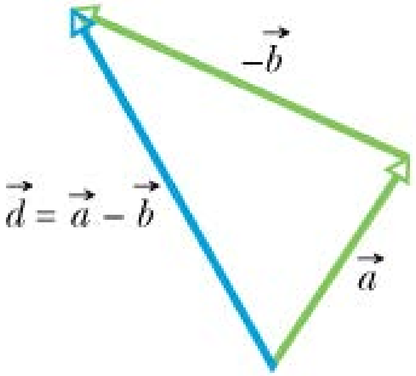


Vektörlerde Geometrik Çıkarma:



$$\vec{d} = \vec{a} - \vec{b}$$

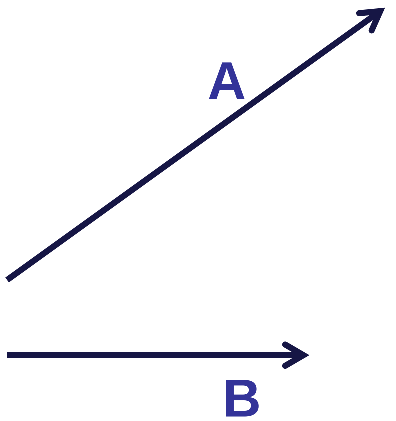
$\vec{d} = \vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + \left(-\vec{b}\right)$ biçiminde yazılabilir.



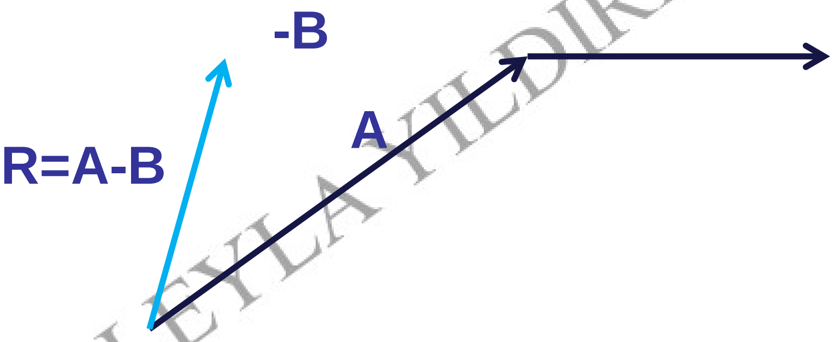
$\vec{b}$ vektöründen $-\vec{b}$ vektörü bulunur ve $\vec{a}$ vektörü ile toplanır.

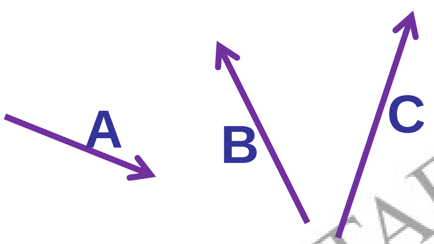
Not: Vektörleri bileşenleri vasıtasıyla toplamak veya çıkarmak mümkündür. Uygulamada bu yöntem çok daha kullanışlı ve kolaydır.

Vektörlerde Geometrik Çıkarma:

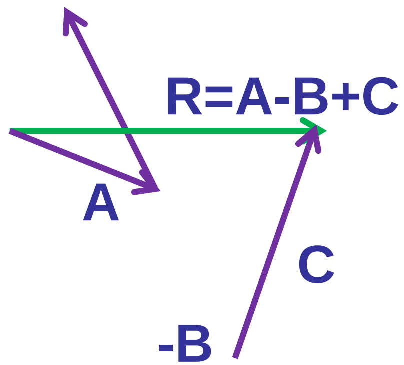


R=A-B=?



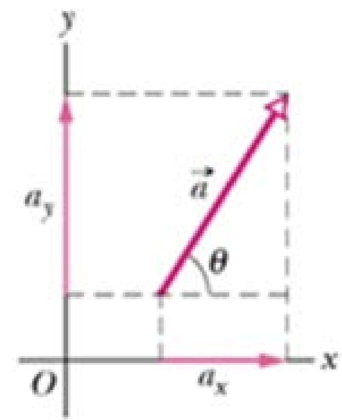


R=A-B+C=?

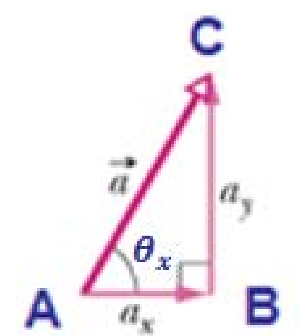


Vektörün bileşenleri ve bir eksenle yaptığı açı:

Bir vektörün bir eksen yönündeki bileşeni, vektörün o eksen üzerindeki izdüşümüdür. Örneğin a_x, $\vec{a}$ vektörünün x - ekseni üzerindeki izdüşümüdür. Vektörün a_x bileşeni, başlangıç ve uç noktalarından x - eksenine çizilen dikmeler arası mesafedir.



$\vec{a}$ vektörünün x- ve y-bileşenleri $a_x = a\cos\theta$ ve $a_y = a\sin\theta$ eşitlikleri ile verilir. Bir vektörün a_x ve a_y bileşenleri biliniyorsa, vektörün büyüklüğü ve sırasıyla x ve y ekseni ile yaptığı açı bulunabilir.

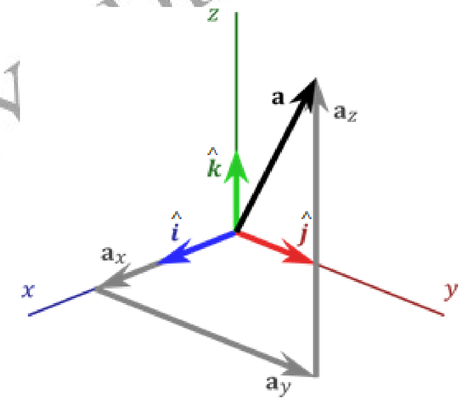


ABC dik üçgeninden:

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} \;;\; \tan\theta_x = \frac{a_y}{a_x} \;;\; \tan\theta_y = \frac{a_x}{a_y}$$

Birim vektörler :

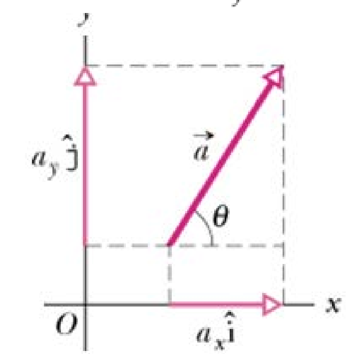
Herhangi bir doğrultuda, büyüklüğü "1" olan vektöre "**birim vektör**" denir. Birimsizdir ve sadece sadece yön göstermek amacıyla kullanılır.



x, y ve z - eksenleri yönündeki birim vektörler, sırasıyla, $\hat{\mathrm{i}}$, $\hat{\mathrm{j}}$ ve $\hat{\mathrm{k}}$ ile gösterilirler.

Tüm vektörler birim vektörler cinsinden yazılabilir.

Şekildeki vektörler: $\vec{a} = a_x\hat{\mathrm{i}} + a_y\hat{\mathrm{j}}$; $\vec{b} = b_x\hat{\mathrm{i}} + b_y\hat{\mathrm{j}}$

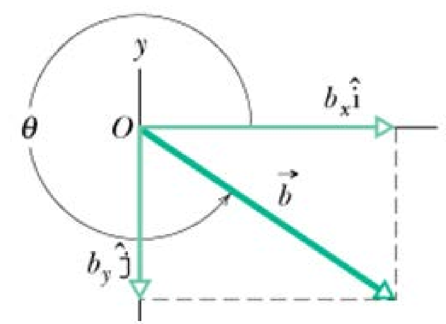


$\vec{a}$ ve $\vec{b}$ yönündeki birim vektörler:

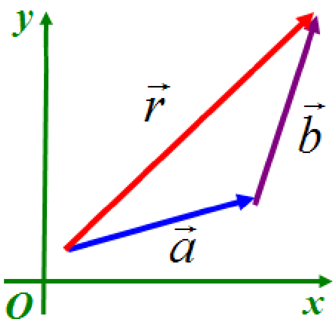
$$\hat{a} = \frac{\vec{a}}{a} \; ; \; \hat{b} = \frac{\vec{b}}{b}$$ ile verilir.

Bu durumda $\vec{a}$ ve $\vec{b}$ vektörleri,

$\vec{a} = a\hat{a} \; ; \vec{b} = b\hat{b}$ biçiminde de yazılabilir.



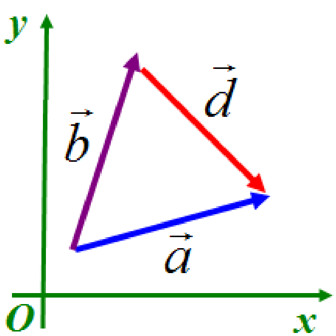
Bileşenleri Yardımıyla Vektörlerin Toplanması:



$$\left.\begin{aligned}\vec{a} &= a_x\hat{\text{i}} + a_y\hat{\text{j}} \\ \vec{b} &= b_x\hat{\text{i}} + b_y\hat{\text{j}}\end{aligned}\right\} \rightarrow \vec{r} = \vec{a} + \vec{b} = ?$$

$$\vec{r} = \left(a_x + b_x\right)\hat{\text{i}} + \left(a_y + b_y\right)\hat{\text{j}}$$

Bileşenleri Yardımıyla Vektörlerin Çıkarılması:



$$\left.\begin{aligned}\vec{a} &= a_x\hat{\text{i}} + a_y\hat{\text{j}} \\ \vec{b} &= b_x\hat{\text{i}} + b_y\hat{\text{j}}\end{aligned}\right\} \rightarrow \vec{d} = \vec{a} - \vec{b} = ?$$

$$\vec{d} = \left(a_x - b_x\right)\hat{\text{i}} + \left(a_y - b_y\right)\hat{\text{j}}$$

Örnek : Bir cisim üç ardışık yer-değiştirme yapıyor. Bunlar sırasıyla, $\vec{d}_1 = 15\hat{\mathrm{i}} + 30\hat{\mathrm{j}} + 12\hat{\mathrm{k}}$ cm, $\vec{d}_2 = 23\hat{\mathrm{i}} - 14\hat{\mathrm{j}} - 5\hat{\mathrm{k}}$ cm ve $\vec{d}_3 = -13\hat{\mathrm{i}} + 15\hat{\mathrm{j}}$ cm olduğuna göre, toplam yer-değiştirme vektörünün bileşenlerini ve büyüklüğünü bulunuz.

$$\vec{R} = \vec{d}_1 + \vec{d}_2 + \vec{d}_3 = (15 + 23 - 13)\hat{\mathrm{i}} + (30 - 14 + 15)\hat{\mathrm{j}} + (12 - 5)\hat{\mathrm{k}}$$

$$= 25\hat{\mathrm{i}} + 31\hat{\mathrm{j}} + 7\hat{\mathrm{k}} \text{ cm}$$

$$R_x = 25 \text{ cm} \ ; \ R_y = 31 \text{ cm} \ ; \ R_z = 7 \text{ cm}$$

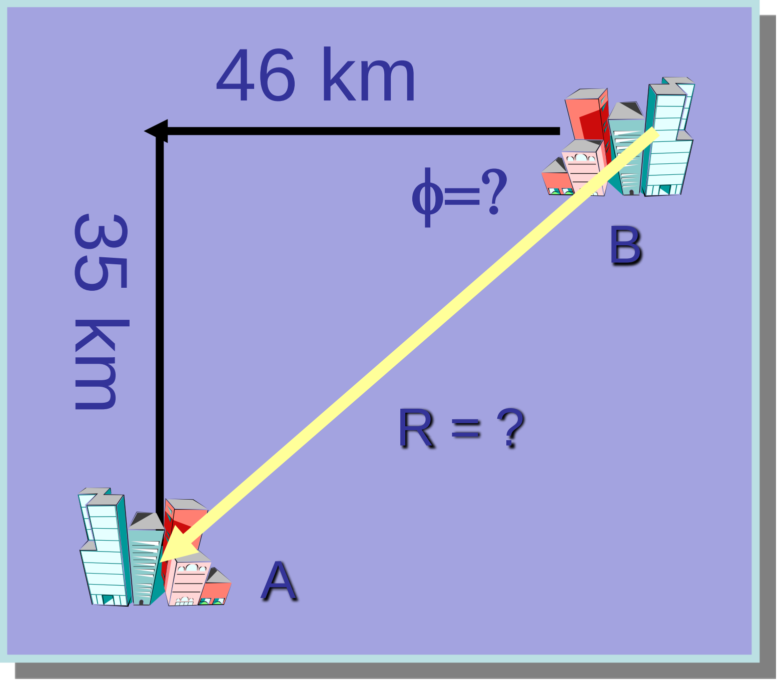
$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2} = \sqrt{(25)^2 + (31)^2 + (7)^2} = 40.4 \text{ cm}$$

Örnek: A şehri B şehrinin 46 km batı ve 35 km güneyinde yer almaktadır. Bu iki şehir arasındaki en kısa mesafenin büyüklüğünü ve yönünü bulunuz.

$$\vec{R} = -46\hat{i} - 35\hat{j}$$

$$R = \sqrt{(46\text{ km})^2 + (35\text{ km})^2}$$

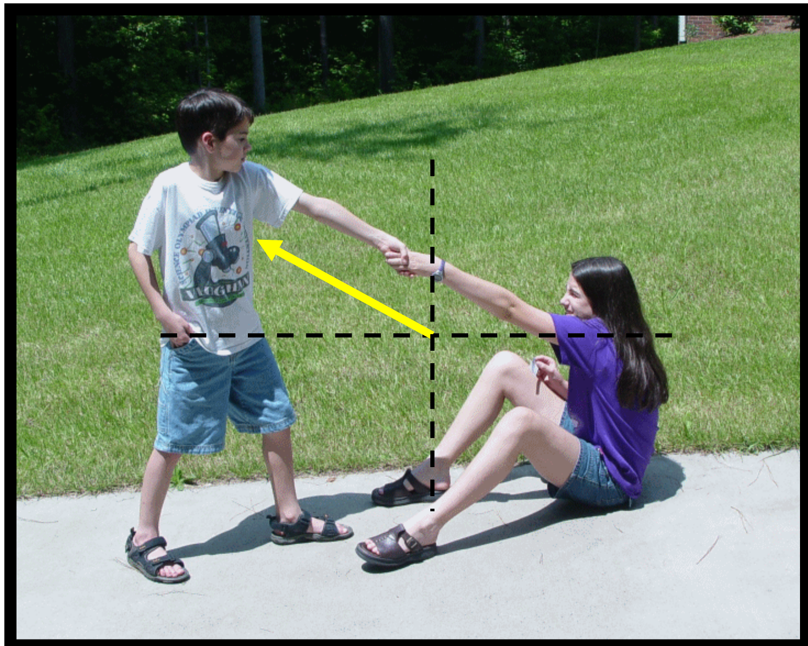
$$\boxed{R = 57.8\text{ km}}$$

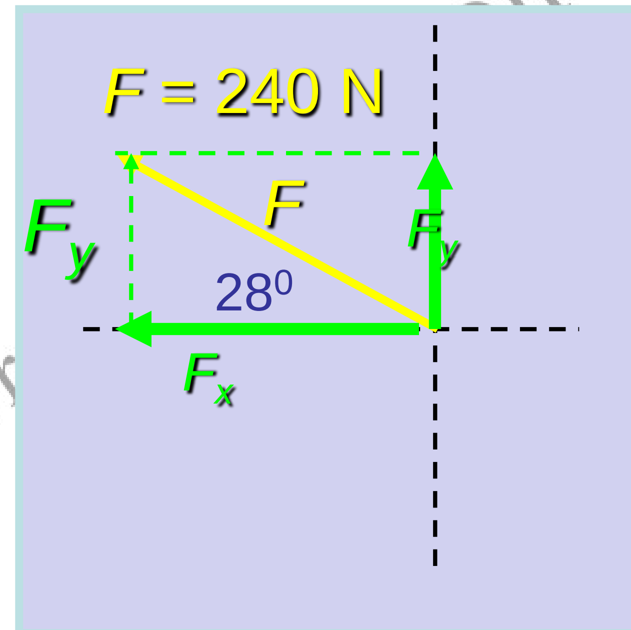


$$\tan\phi = \frac{-35\text{ km}}{-46\text{ km}}$$

$$\boxed{\phi = 37.3^0}$$

Örnek: Bir erkek çocuğu bir kıza, şekildeki gibi, 240 N’ luk bir kuvvet uygulamaktadır. Kızın kolu yatayla 28° açı yaptığına göre bu kuvvetin bileşenlerini bulunuz.





$F_x = -|(240\text{ N})\cos 28^0| = -240*0.88 = -212\text{ N}$

$F_y = +|(240\text{ N})\sin 28^0| = 240*0.47 = +113\text{ N}$

Birim vektörler cinsinden

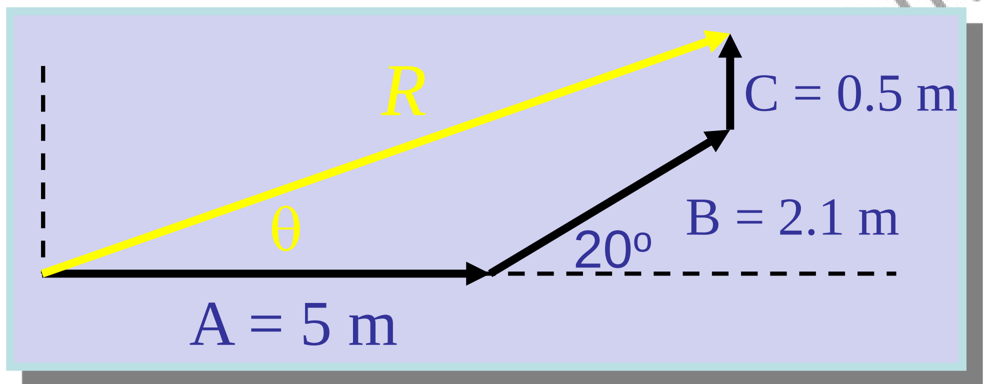
$$\vec{F} = -(212\,N)\,\hat{i} + (113\,N)\,\hat{j}$$

Örnek: Bir kaplumbağa aşağıda verilen ardışık üç yerdeğiştirme ve bu yer değiştirmelerin yatayla yaptığı açı verilmiştir. Kaplumbağanın toplam yer değiştirme vektörü R' nin büyüklüğünü ve yönünü bulunuz.

A = 5 m, 0^o

B = 2.1 m, 20^o

C = 0.5 m, 90^o



$\cos 20^o = 0.94$ $\sin 20^o = 0.34$

Vektör	f	X-bileşeni (i)	Y-bileşeni (j)
A=5 m	0^0	+ 5 m	0
B=2.1m	20^0	$+(2.1\text{ m})\cos 20^o$	$+(2.1\text{ m})\sin 20^o$
C=0.5 m	90^0	0	+ 0.5 m
		$R_x = A_x+B_x+C_x$	$R_y = A_y+B_y+C_y$

Örnek devam: Verilen üç vektörün toplamını bulunuz.

x-bileşeni (i)	y-bileşeni (j)
$A_x = +\ 5.00$ m	$A_y = 0$
$B_x = +1.97$ m	$B_y = +0.718$ m
$C_x = 0$	$C_y = +\ 0.50$ m

$$A = 5.00\ i + 0\ j$$

$$B = 1.97\ i + 0.718\ j$$

$$C = 0\ i + 0.50\ j$$

$$R = 6.97\ i + 1.22\ j$$

Bir Vektörün Bir Skalerle Çarpımı :

s bir skaler nicelik ve $\vec{a}$' da bir vektör olmak üzere, bunların çarpımı $\vec{b} = s\vec{a}$ ile verilen yeni bir vektördür.

Bu yeni vektörün büyüklüğü $b = s|a|$ ile verilir.

$s > 0$ ise, $\vec{b}$ vektörü $\vec{a}$ ile aynı yöndedir.

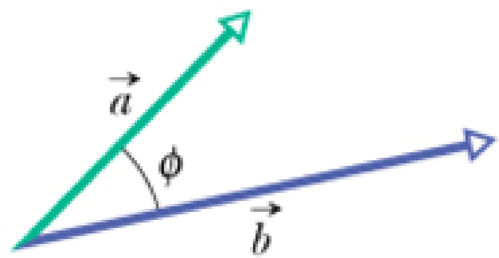
$s < 0$ ise, $\vec{b}$ vektörü $\vec{a}$ ile ters yöndedir.

Örnek : $\vec{F} = m\vec{a}$

İki Vektörün Skaler Çarpımı :

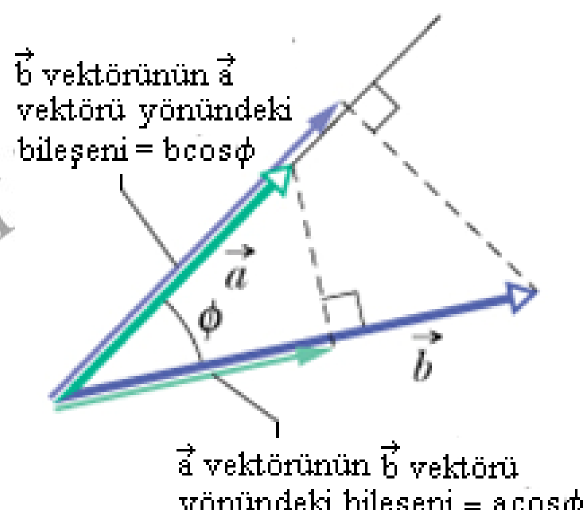
İki vektörün skaler çarpımı, "dot veya nokta" çarpım olarak da bilinir.

$\vec{a}$ ve $\vec{b}$ vektörlerinin skaler çarpımı $\vec{a}\cdot\vec{b} = ab\cos\phi$ ifadesi ile verilir.



Örnek: İş

$$W = \vec{F} \bullet \vec{x}$$



Bileşenleri Cinsinden Skaler Çarpım :

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=\left(a_x\hat{\mathrm{i}}+a_y\hat{\mathrm{j}}+a_z\hat{\mathrm{k}}\right)\cdot\left(b_x\hat{\mathrm{i}}+b_y\hat{\mathrm{j}}+b_z\hat{\mathrm{k}}\right)$$

$\hat{\mathrm{i}}\perp\hat{\mathrm{j}}\perp\hat{\mathrm{k}}$ olduğundan,

$$\left.\begin{array}{l}\hat{\mathrm{i}}\cdot\hat{\mathrm{i}}=\hat{\mathrm{j}}\cdot\hat{\mathrm{j}}=\hat{\mathrm{k}}\cdot\hat{\mathrm{k}}=1\\ \hat{\mathrm{i}}\cdot\hat{\mathrm{j}}=\hat{\mathrm{j}}\cdot\hat{\mathrm{i}}=0\\ \hat{\mathrm{i}}\cdot\hat{\mathrm{k}}=\hat{\mathrm{k}}\cdot\hat{\mathrm{i}}=0\\ \hat{\mathrm{j}}\cdot\hat{\mathrm{k}}=\hat{\mathrm{k}}\cdot\hat{\mathrm{j}}=0\end{array}\right\}\rightarrow\ \vec{a}\cdot\vec{b}=a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z$$

bulunur.

Örnek : $\vec{A} = 2\hat{i} + 3\hat{j} + \hat{k}$ ve $\vec{B} = -4\hat{i} + 2\hat{j} - \hat{k}$ vektörleri arasındaki açıyı bulunuz.

Bu soruda, iki vektör arasındaki açıyı bulmak için vektörlerin iki farklı yolla skaler çarpım işleminden yararlanacağız. İki sonucu birleştirerek açıya geçeceğiz.

$$I.Yol: \vec{A}\cdot\vec{B} = AB\cos\theta = \sqrt{(2)^2+(3)^2+(1)^2}\cdot\sqrt{(-4)^2+(2)^2+(-1)^2}\cdot\cos\theta$$

$$=\sqrt{14}\cdot\sqrt{21}\cdot\cos\theta$$

$$II.Yol: \vec{A}\cdot\vec{B} = A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z = (2)(-4)+(3)(2)+(1)(-1) = -3$$

$$\cos\theta = \frac{\vec{A}\cdot\vec{B}}{AB} = -\frac{3}{\sqrt{14*21}} = -\frac{3}{\sqrt{294}} = -0.175 \rightarrow \theta = 100^{\circ}$$

Örnek : $\vec{A}$ ve $\vec{B}$ vektörlerinin büyüklükleri aynı ve 5 birimdir. $\vec{A}+\vec{B}=6\hat{i}$ olduğuna göre, bu iki vektör arasındaki açıyı bulunuz.

Kosinüs teoremine göre: $\left|\vec{A}+\vec{B}\right| = \sqrt{A^2+B^2+2*A*B*\cos\theta}$ ' dır.

$$6=\sqrt{5^2+5^2+2*5*5*\cos\theta}$$

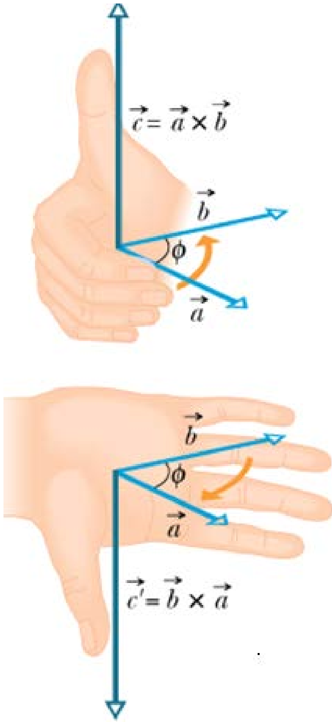
Buna göre,

$$\cos\theta=\frac{(6.0)^2-(5)^2-(5)^2}{2(5)(5)}=-\frac{14}{50}=-0.28 \quad\rightarrow\quad \theta=106.3^{\mathrm{o}}$$ bulunur.

Örnek : $\vec{A}=6\hat{\mathrm{i}}-8\hat{\mathrm{j}}$; $\vec{B}=-8\hat{\mathrm{i}}+3\hat{\mathrm{j}}$ ve $\vec{C}=26\hat{\mathrm{i}}+19\hat{\mathrm{j}}$ vektörleri veriliyor. $a\vec{A}+b\vec{B}+\vec{C}=0$ eşitliğini sağlayan a ve b sayılarını hesaplayınız.

$$a\vec{A}+b\vec{B}+\vec{C}=(6a-8b+26)\hat{\mathrm{i}}+(-8a+3b+19)\hat{\mathrm{j}}=0$$

$$\left.\begin{aligned}6a-8b&=-26\\-8a+3b&=-19\end{aligned}\right\}\quad\rightarrow\quad a=5 \text{ ve } b=7 \text{ bulunur.}$$

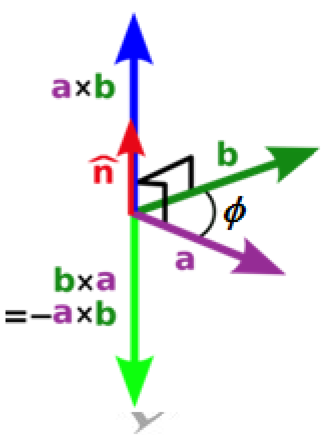


Vektörel Çarpma :

$\vec{a}$ ve $\vec{b}$ vektörleri arasındaki vektörel çarpma işlemi, $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$ ile verilen yeni bir vektör oluşturur. $\vec{c}$ vektörünün büyüklüğü $c = ab\sin\phi$ ile verilir ve $\vec{a}$ ile $\vec{b}$ vektörlerinin oluşturduğu düzleme diktir. Yönü "sağ-el-kuralı" ile belirlenir:

Vektörel çarpım, "cross" çarpım olarak da bilinir.

Sağ el kuralı:



i. $\vec{a}$ ve $\vec{b}$ vektörlerinin başlangıç noktalarını birleştiriniz.

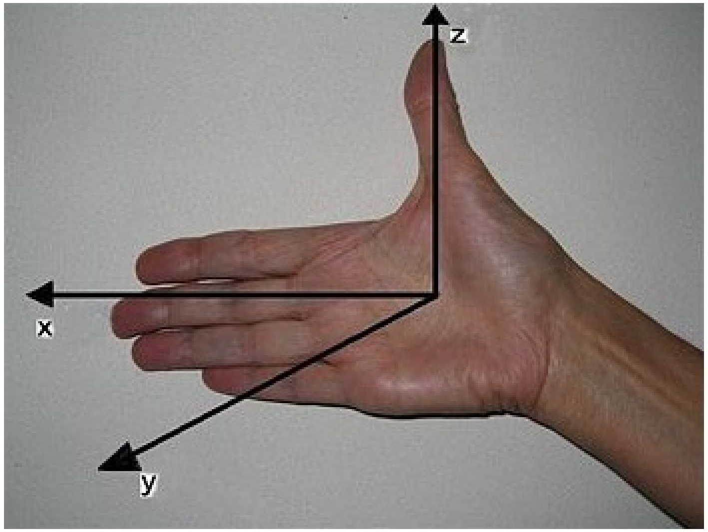
ii. $\vec{a}$ vektörünü parmak uçlarınız onun yönünü gösterecek şekilde sağ avuç içine yatırınız.

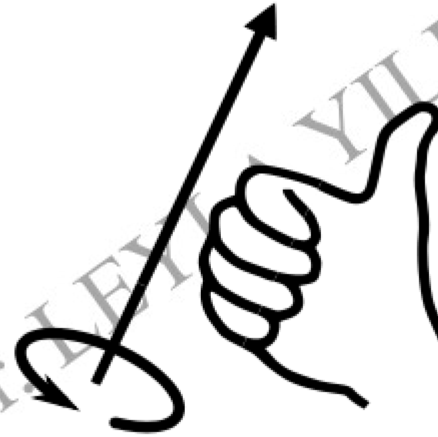
iii. $\vec{a}$ vektörünü küçük açı yönünde $\vec{b}$'nin üzerine süpürünüz.

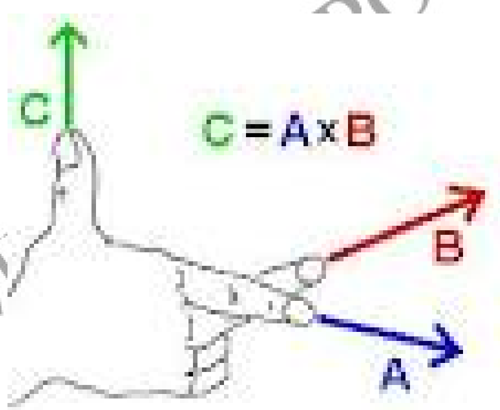
iv. Baş parmağınız $\vec{c}$ vektörünün yönünü verir.

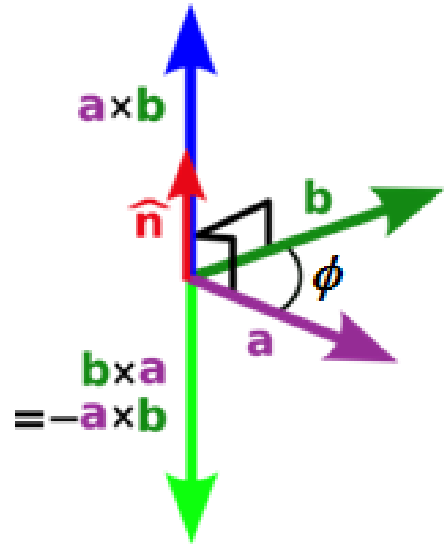
Sağ el kuralı:

$$\hat{k} = \hat{i} \times \hat{j}$$









Vektörel çarpımın özellikleri: $\vec{c} = \vec{a} \text{ x } \vec{b}$

1. $c = ab\sin\theta$

2. $\vec{a}$ ve $\vec{b}$ birbirine paralel veya antiparalel ise $c = 0$'dır.

3. $\vec{c} \perp \vec{a}$

4. $\vec{c} \perp \vec{b}$

$\left.\begin{matrix} \vec{c} \perp \vec{a} \\ \vec{c} \perp \vec{b} \end{matrix}\right\}$ $\vec{c}$ vektörü $\vec{a}$ ve $\vec{b}$'nin bulunduğu düzleme diktir.

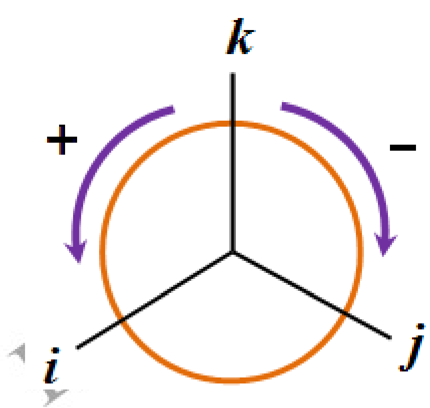
5. $\vec{c} = -(\vec{b} \text{ x } \vec{a})$ vektörel çarpımda değişme özelliği yoktur.

Bileşenleri Cinsinden Vektörel Çarpma :

$$\vec{a}\times\vec{b}=\left(a_x\hat{\imath}+a_y\hat{\jmath}+a_z\hat{k}\right)\times\left(b_x\hat{\imath}+b_y\hat{\jmath}+b_z\hat{k}\right)$$

$$\left.\begin{array}{l}\hat{\imath}\times\hat{\imath}=\hat{\jmath}\times\hat{\jmath}=\hat{k}\times\hat{k}=0\\ \hat{\imath}\times\hat{\jmath}=\hat{k}\ ;\ \hat{\jmath}\times\hat{\imath}=-\hat{k}\\ \hat{k}\times\hat{\imath}=\hat{\jmath}\ ;\ \hat{\imath}\times\hat{k}=-\hat{\jmath}\\ \hat{\jmath}\times\hat{k}=\hat{\imath}\ ;\ \hat{k}\times\hat{\jmath}=-\hat{\imath}\end{array}\right\}\text{olduğundan}$$

$$\vec{a}\times\vec{b}=\left(a_yb_z-a_zb_y\right)\hat{\imath}+\left(a_zb_x-a_xb_z\right)\hat{\jmath}+\left(a_xb_y-a_yb_x\right)\hat{k}$$



Not : $\vec{a}\times\vec{b}$, aşağıdaki determinant yolu ile de belirlenebilir.

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k}\\ a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\end{vmatrix}$$; **Not :** $\vec{a}\times\vec{b}=-\left(\vec{b}\times\vec{a}\right)$

Örnek : $\vec{A} = 2\hat{i} + 3\hat{j} + \hat{k}$, $\vec{B} = -4\hat{i} + 2\hat{j} - \hat{k}$ ve $\vec{C} = 5\hat{i} - 2\hat{j}$ vektörleri verilsin.

$a-)$ $\vec{A}\times\vec{B} = ?$, $b-)$ $\vec{C}\times(\vec{A}+\vec{B}) = \vec{C}\times\vec{A} + \vec{C}\times\vec{B}$ olduğunu gösteriniz.

$$a-)\quad \vec{A}\times\vec{B} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 2 & 3 & 1 \\ -4 & 2 & -1 \end{vmatrix} = -5\hat{i} - 2\hat{j} + 16\hat{k}$$

$$b-)\quad \vec{C}\times(\vec{A}+\vec{B}) = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 5 & -2 & 0 \\ -2 & 5 & 0 \end{vmatrix} = 21\hat{k}$$

$$\vec{C}\times\vec{A} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 5 & -2 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = -2\hat{i} - 5\hat{j} + 19\hat{k} \text{ ve } \vec{C}\times\vec{B} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 5 & -2 & 0 \\ -4 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 2\hat{i} + 5\hat{j} + 2\hat{k}$$

$$\vec{C}\times\vec{A} + \vec{C}\times\vec{B} = \left(-2\hat{i} - 5\hat{j} + 19\hat{k}\right) + \left(2\hat{i} + 5\hat{j} + 2\hat{k}\right) = 21\hat{k} = \vec{C}\times(\vec{A}+\vec{B})$$

Örnek:

$\vec{A} = 2\boldsymbol{i} - \boldsymbol{j} + 3\boldsymbol{k}$

$\vec{B} = -4\boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{j} - \boldsymbol{k}$

a) Vektörlerinin bileşenlerini tanımlayınız.

b) Vektörlerin büyüklüklerini bulunuz.

c) Vektörlerin toplamını bulunuz.

d) Toplam vektörün büyüklüğünü bulunuz.

a) $A_x = 2, \quad A_y = -1, \quad A_z = 3 \quad \text{ve} \quad B_x = -4, \quad B_y = 2, \quad B_z = -1$

b) $|\vec{A}| = \sqrt{{A_x}^2 + {A_y}^2 + {A_z}^2} = \sqrt{2^2 + (-1)^2 + 3^2} = \sqrt{4+1+9} = \sqrt{14}$

$$|\vec{B}| = \sqrt{{B_x}^2 + {B_y}^2 + {B_z}^2} = \sqrt{(-4)^2 + 2^2 + (-1)^2} = \sqrt{16+4+1} = \sqrt{21}$$

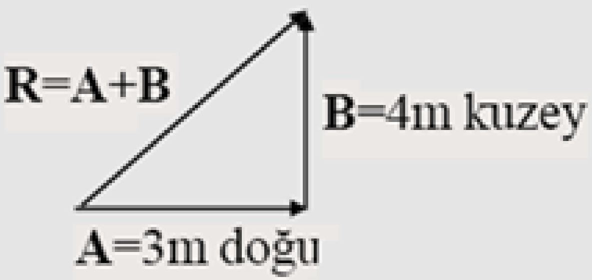
c) $\vec{C} = \vec{A} + \vec{B} = (A_x + B_x)\boldsymbol{i} + (A_y + B_y)\boldsymbol{j} + (A_z + B_z)\boldsymbol{k} = (2-4)\boldsymbol{i} + (-1+2)\boldsymbol{j} + (3-1)\boldsymbol{k}$

$$\vec{C} = -2\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j} + 2\boldsymbol{k}$$

d) $|\vec{C}| = \sqrt{{C_x}^2 + {C_y}^2 + {C_z}^2} = \sqrt{(-2)^2 + 1^2 + 2^2} = \sqrt{4+1+4} = \sqrt{9} = 3$

Örnek: *3 metre doğuya doğru daha sonra 4 metre kuzeye doğru yürüdüğümüzü düşünelim. Son konumumuzu başlangıç noktasına göre belirleyen vektör nedir?*

Çözüm:



A=3m doğu
B=4m kuzey
R=A+B

$$|R| = \sqrt{|A|^2 + |B|^2} = \sqrt{(4m)^2 + (3m)^2} = 5m$$

$$\tan\theta = \frac{|B|}{|A|} = \frac{4m}{3m} = 1{,}33 \qquad \theta = 53^\circ$$

|**R**|=5m, θ=53° olduğu bulunur.

Örnek :

$$\vec{A} = 2i - j + 2k$$

$$\vec{B} = 3i + 4j - k$$

ise

a) $\vec{A}.\vec{B} = ?$

b) $\cos\theta = ?$ ve $\theta = ?$

Çözüm:

a) $\vec{A}.\vec{B} = 2*3 + (-1)*4 + 2*(-1) = 6 - 4 - 2 = 0$

b) $A = \sqrt{2^2 + (-1)^2 + 2^2} = 3$ ve $B = \sqrt{3^2 + 4^2 + (-1)^2} = \sqrt{26}$

$\vec{A}.\vec{B} = A * B * \cos\theta$ olduğuna göre, $\cos\theta = \frac{\vec{A}.\vec{B}}{A*B} = \frac{0}{3*\sqrt{26}} = 0$ öyleyse $\theta = 90^o$

Örnek:

$$\vec{A} = 2\boldsymbol{i} - \boldsymbol{j} + 2\boldsymbol{k}$$

$$\vec{B} = 3\boldsymbol{i} + 4\boldsymbol{j} - \boldsymbol{k}$$

a) $\vec{C} = \vec{A} \times \vec{B} = ?$

b) $\cos\theta = ?$ ve $\theta = ?$

Çözüm: **a-)** $\vec{C} = \vec{A} \times \vec{B} = \boldsymbol{i}(A_y B_z - A_z B_y) - \boldsymbol{j}(A_x B_z - A_z B_x) + \boldsymbol{k}(A_x B_y - A_y B_x)$

$$= \boldsymbol{i}[(-1) * (-1) - 2 * 4] - \boldsymbol{j}[2 * (-1) - 2 * 3] + \boldsymbol{k}[2 * 4 - 3 * (-1)]$$

$$= \boldsymbol{i}[1 - 8] - \boldsymbol{j}[-2 - 6] + \boldsymbol{k}[8 + 3] = -7\boldsymbol{i} + 8\boldsymbol{j} + 11\boldsymbol{k}$$

b-) $A = \sqrt{2^2 + (-1)^2 + 2^2} = 3$

$$B = \sqrt{3^2 + 4^2 + (-1)^2} = \sqrt{26}$$

$$C = \sqrt{(-7)^2 + 8^2 + 11^2} = \sqrt{234} = 3 * \sqrt{26}$$

$$\sin\theta = \frac{C}{A * B} = \frac{\sqrt{234}}{3 * \sqrt{26}} = \frac{3 * \sqrt{26}}{3 * \sqrt{26}} = 1$$

$$\theta = 90^\circ \quad \Rightarrow \quad \cos\theta = 0$$

BÖLÜM-3
Bir Doğru Boyunca Hareket

Bu bölümde, cisimlerin bir doğru boyunca hareketini inceleyeceğiz. Aşağıdaki fiziksel nicelikleri ayrıntılı bir şekilde tanımlayacağız.

- **Konum ve Yer-değiştirme**
- **Ortalama Hız**
- **Ortalama Sürat**
- **Anlık Hız**
- **Ortalama ve Anlık İvme**

Sabit ivmeli hareket için, herhangi bir andaki hızı ve konumu veren bağıntıları türeteceğiz.

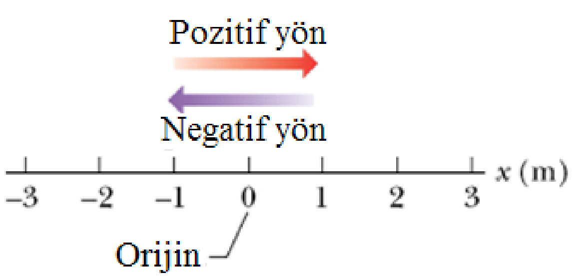
Ayrıca, yer yüzeyine yakın noktalarda yerçekimi etkisi altında cisimlerin hareketini inceleyeceğiz.

Son olarak da, ivmenin sabit olmadığı durumlarda, cismin hareketini eğri altındaki alanın hesaplanması yöntemiyle inceleyeceğiz.

Kinematik, cisimlerin hareketini inceleyen mekaniğin bir alt dalıdır. Bir cismin konumu zamanla değişiyorsa o cisim hareketlidir deriz.

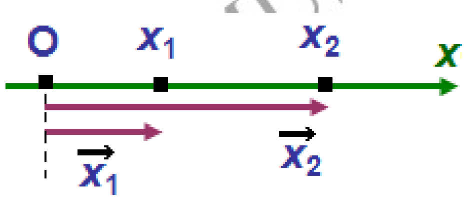
Hareketli cisimlerin noktasal parçacıklardan oluştuğunu ve hepsinin de aynı şekilde hareket ettiğini kabul edeceğiz.

Bu bölümde, harekete neyin sebep olduğuyla ilgilenmeyeceğiz.



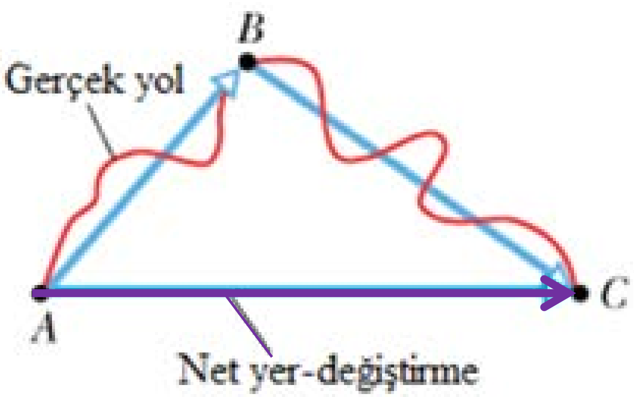
x-ekseni boyunca hareket eden bir cisim düşünelim. Herhangi bir *t* anında, orijine göre cismin konumu *x*(*t*) ile tanımlanır. *x*-ekseninin hangi tarafında bulunduğuna göre, cismin koordinatı negatif veya pozitif olabilir.

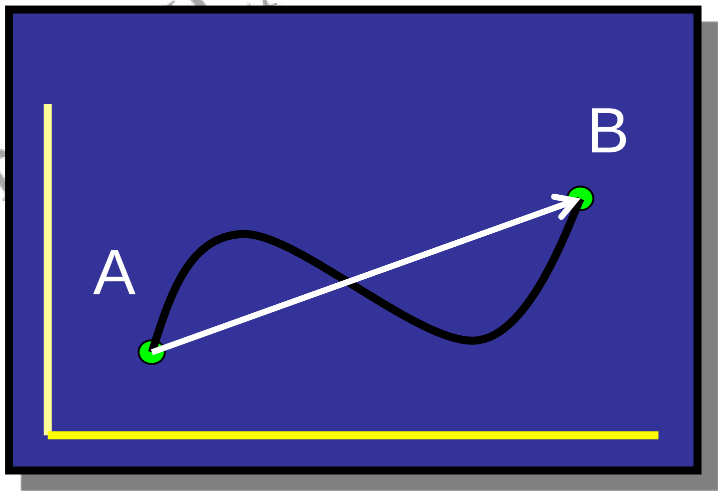
KONUM: Bir cismin yerinin bir referansa göre belirlenmesidir.

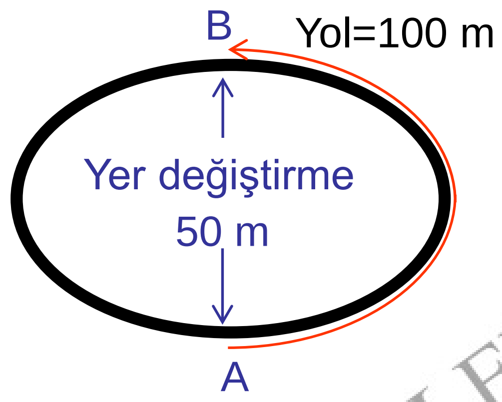


Bir cismin "**konum vektörü**", bulunduğu koordinat sisteminin orijininden cismin bulunduğu noktaya çizilen vektördür.

Not: Yer-değiştirme ile gidilen toplam yol aynı şey değildir !!







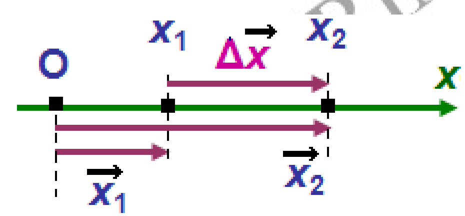
Örnek: $x_1 = 5$ m konumundan pozitif yönde $x_2 = 200$ m konumuna giden ve oradan tekrar başlangıçtaki konumuna dönen bir cisim düşünelim.

Cisim toplam olarak 390 m yol aldığı halde,

yer-değiştirmesi $\Delta x = 0$' dır.

Yer-değiştirme Vektörü: Bir cisim x_1 konumundan x_2 konumuna hareket etmişse, konumundaki değişim yer-değiştirme ile tanımlanır.

$$\underbrace{\Delta\vec{x}}_{\text{yer değiştirme}} = \underbrace{\vec{x}_2}_{\text{son konum}} - \underbrace{\vec{x}_1}_{\text{ilk konum}}$$



SI sisteminde birimi (*m*)

Örneğin, ilk konumu $x_1 = 5$ m ve son konumu $x_2 = 12$ m olan bir cismin yer-değiştirmesi $\Delta x = 12–5 = 7$ m olacaktır. Δx' in pozitif olması, yer-değiştirmenin $+x$ yönünde olduğunu gösterir.

Cisim $x_1 = 5$ m konumundan $x_2 = 1$ m konumuna hareket etseydi, yer-değiştirme $\Delta x = 1–5 = –4$ m olurdu. Δx' in negatif olması, yer-değiştirmenin –x yönünde olduğunu gösterir.

Yer-değiştirme, hem büyüklüğü hem de yönü olan vektörel bir niceliktir.

Tek boyuttaki hareketi incelediğimiz bu bölümde, yer-değiştirme yönü olarak Δx' in işaretini kullanacağız.

Konum-zaman Grafiği ve Ortalama Hız:

Bir cismin hareketini tanımlamanın bir yolu, cismin konumunu zamana bağlı olarak çizmektir.

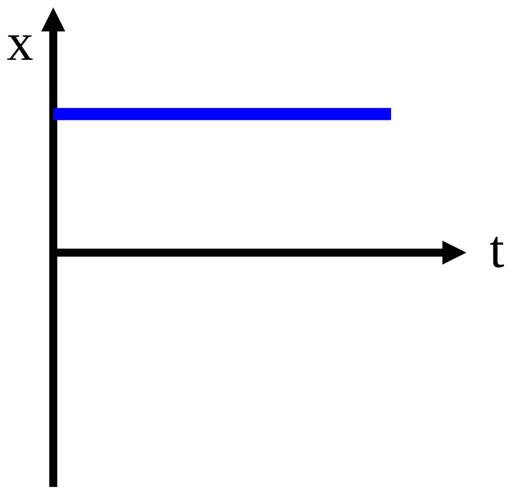
Herhangi bir t_1 anı ile t_2 anı arasında, canlının x_1 konumundan x_2 konumuna ne kadar hızlı gittiği konusunda "**ortalama hız**" bize bir fikir verecektir.

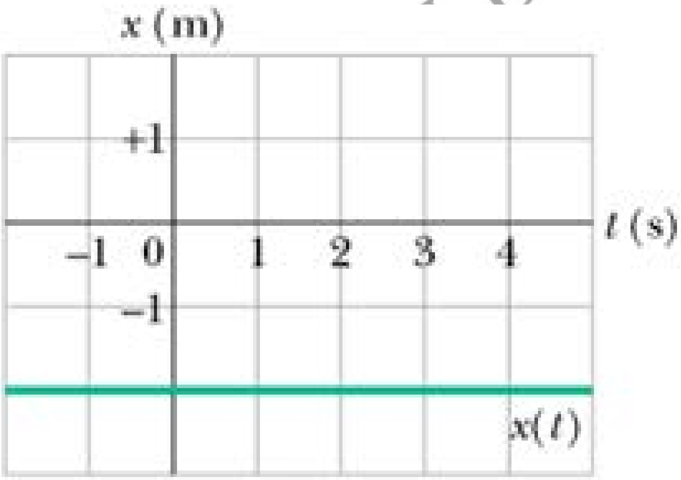
Konum-zaman grafiğinde (t_1, x_1) noktasından (t_2, x_2) noktasına çizilen doğrunun eğimi, cismin t_1 ve t_2 aralığındaki v_{ort} hızına eşittir.

$$\boxed{\vec{v}_{\text{ort}} = \frac{\vec{x}_2 - \vec{x}_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta\vec{x}}{\Delta t}}$$

ortalama hız

Hareket ve konum-zaman grafiği

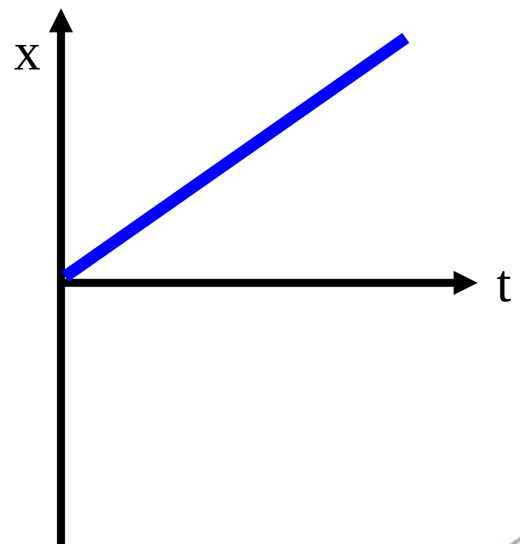




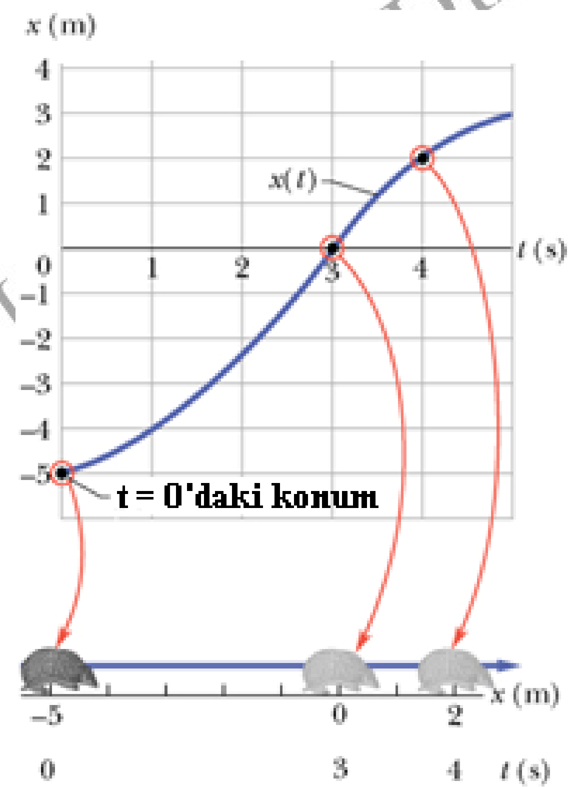
Cismin hareketini tanımlayınız.
Cisim duruyor.

Duran bir cismin konum-zamana grafiği.

Hareket ve konum-zaman grafiği

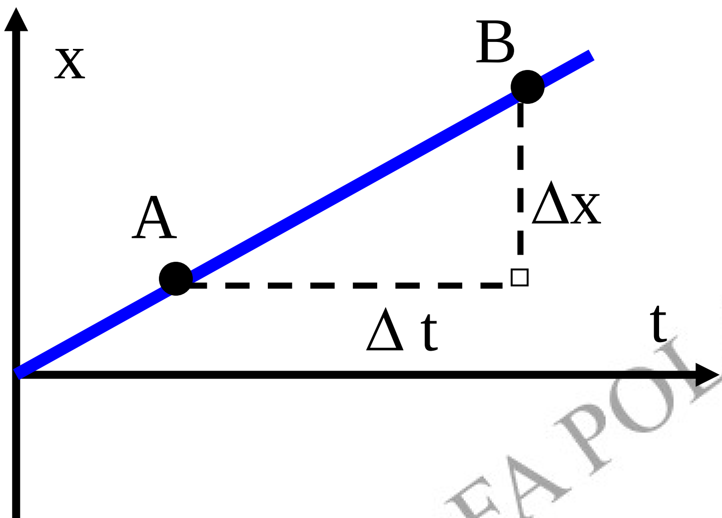


Cismin hareketini tanımlayınız.
Cisim +x yönünde sabit hızla gidiyor.

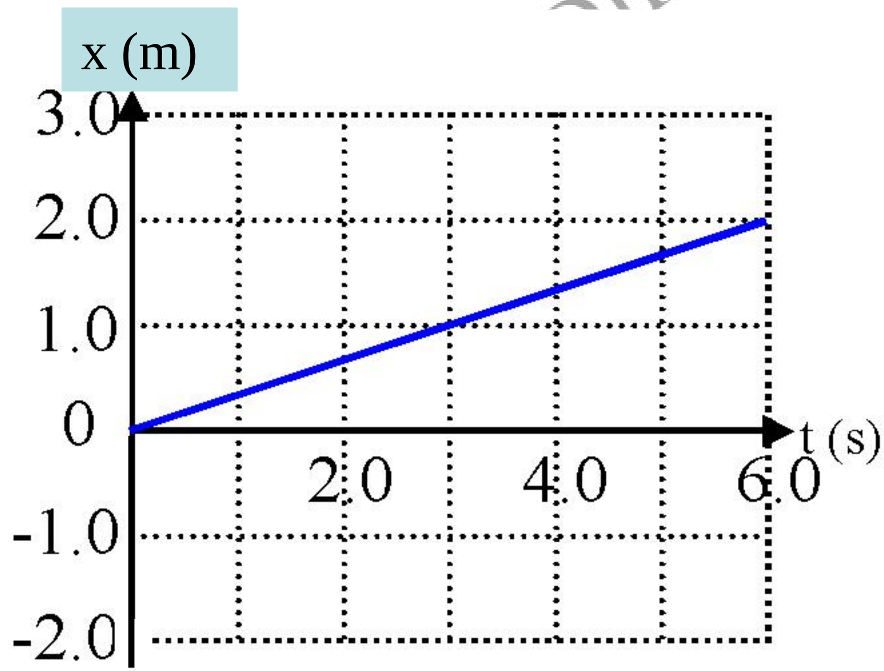


Değişen bir hızla hareket eden bir canlının konum-zaman grafiği

Hareket ve konum zaman grafiği



$$v_{ort} = \Delta x / \Delta t$$

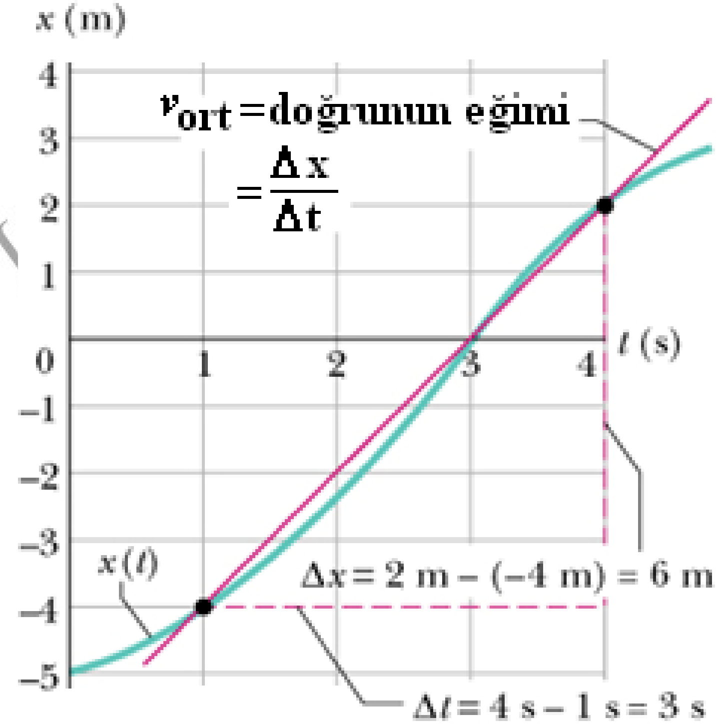


Bir cismin konum-zaman grafiği grafikte verilmiştir. Bu cismin ortalama hızı hesaplayınız.

v_{ort} = Δ x/Δ t=2.0/6.0=1/3 m/s

Örnek: Şekilde bir cismin t_1 = 1 s ve t_2 = 4 s anlarındaki konumları x_1 = – 4 m ve x_2 = 2 m'dir.

Cismin ortalama hızını bulalım.



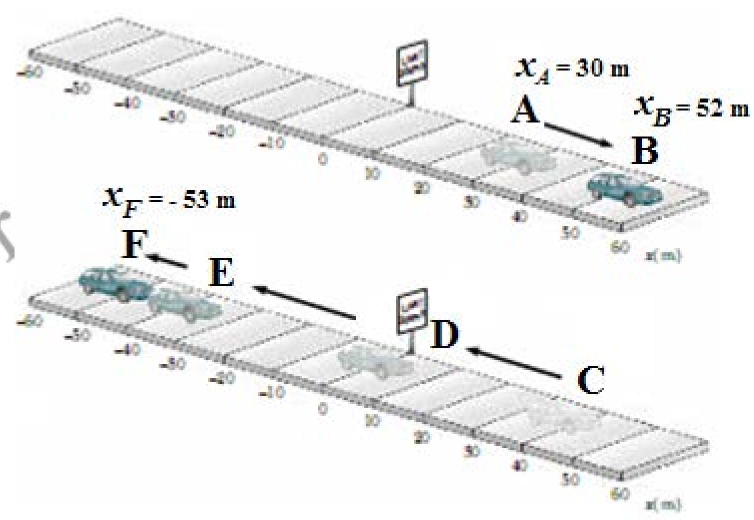
$$v_{ort} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} = \frac{2-(-4)}{4-1} = \frac{6\ \text{m}}{3\ \text{s}} = 2\ \text{m/s}$$

Ortalama Sürat ($v_{\text{sürat\_ort}}$):

$$\boxed{v_{\text{sürat\_ort}} = \frac{\text{toplam yol}}{\Delta t}}$$

Ortalama sürat, Δt zaman aralığında alınan "toplam yol" cinsinden tarif edilir.
Ortalam sürat ortalama hızın büyüklüğü değildir.

Örnek : Şekildeki otomobilin, A ve F noktaları arasındaki, ortalama hızını ve süratini hesaplayınız ($t_A = 0$ ve $x_A = 30$ m ; $t_F = 50$ s ve $x_F = -53$ m).

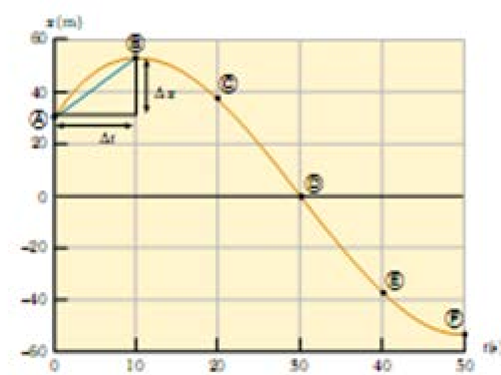


$$v_{\text{ort}} = \frac{x_F - x_A}{t_F - t_A} = \frac{-53 - 30}{50 - 0}$$

$$= -\frac{83}{50} = -1.66 \text{ m/s}$$

$$v_{\text{sürat\_ort}} = \frac{x_{AB} + x_{BD} + x_{DF}}{50} = \frac{22+52+53}{50}$$

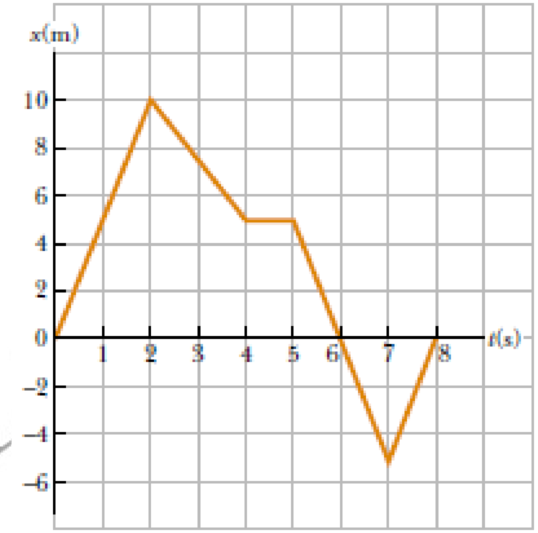
$$= \frac{127}{50} = 2.54 \text{ m/s}$$



Örnek : *x*-ekseni boyunca hareket eden bir cismin konum-zaman grafiği yanda verilmiştir.

Cismin $0-2$ s ; $0-4$ s ; $0-7$ s ; $0-8$ s aralıklarında ortalama hızını bulunuz.

$0-8$ s aralığında cismin hız-zaman grafiğini çiziniz.



Konum-zaman grafiğinden;

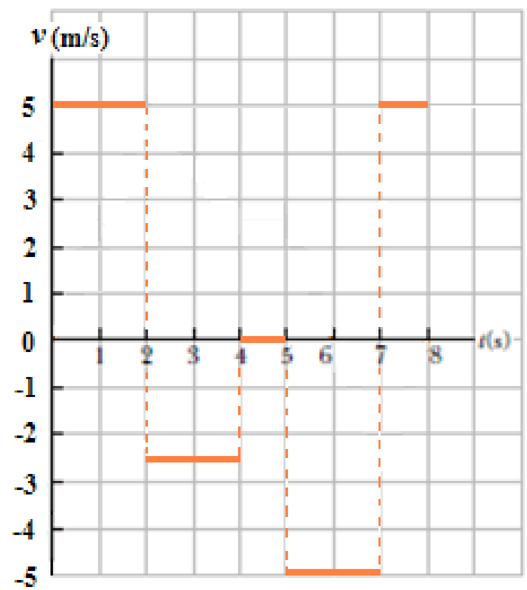
$$v_{\text{ort(0-2)}} = \frac{10-0}{2-0} = 5 \text{ m/s} \quad ; \quad v_{\text{ort(0-4)}} = \frac{5-0}{4-0} = 1.25 \text{ m/s}$$

$$v_{\text{ort(0-7)}} = \frac{-5-0}{7-0} = -0.714 \text{ m/s} \quad ; \quad v_{\text{ort(0-8)}} = \frac{0-0}{8-0} = 0$$

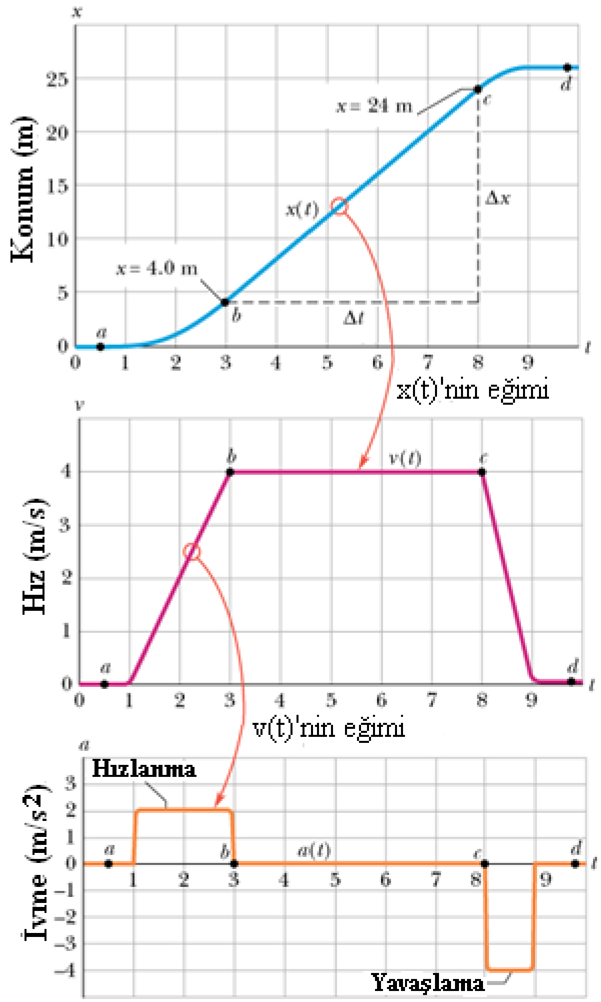
$$v = \frac{dx}{dt} \rightarrow v_{(0\text{-}2)} = \frac{10-0}{2-0} = 5 \text{ m/s} \quad ; \quad v_{(2\text{-}4)} = \frac{5-10}{4-2} = -2.5 \text{ m/s}$$

$$v_{(4\text{-}5)} = \frac{5-5}{5-4} = 0 \quad ; \quad v_{(5\text{-}7)} = \frac{-5-5}{7-5} = -5 \text{ m/s}$$

$$v_{(7\text{-}8)} = \frac{0-(-5)}{8-7} = 5 \text{ m/s}$$



Anlık Hız:



Ortalama hız, bir cismin t_1 ve t_2 zaman aralığında ne kadar hızlı olduğu bilgisini içerir. Herhangi bir t anında cismin ne kadar hızlı olduğu bilgisi "anlık hız" tanımıyla verilir.

Anlık hız, ortalama hızın $\Delta t \rightarrow 0$ durumundaki limitidir.

$$\boxed{v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{dx}{dt}}$$

Bu tanımdan anlık hız, cismin x konumunun zamana göre birinci türevidir.

Yani, konum-zaman grafiğinin herhangi bir andaki eğimidir.

Anlık sürat anlık hızın büyüklüğüdür.

Örnek : x-ekseni boyunca hareket eden bir cismin konumu

$$x(t) = -4t + 2t^2$$

ifadesine göre değişmektedir (t saniye, x metre cinsindendir).

a–) $0-1$ s ve $1-3$ s aralıklarında cismin ortalama hızını bulunuz.

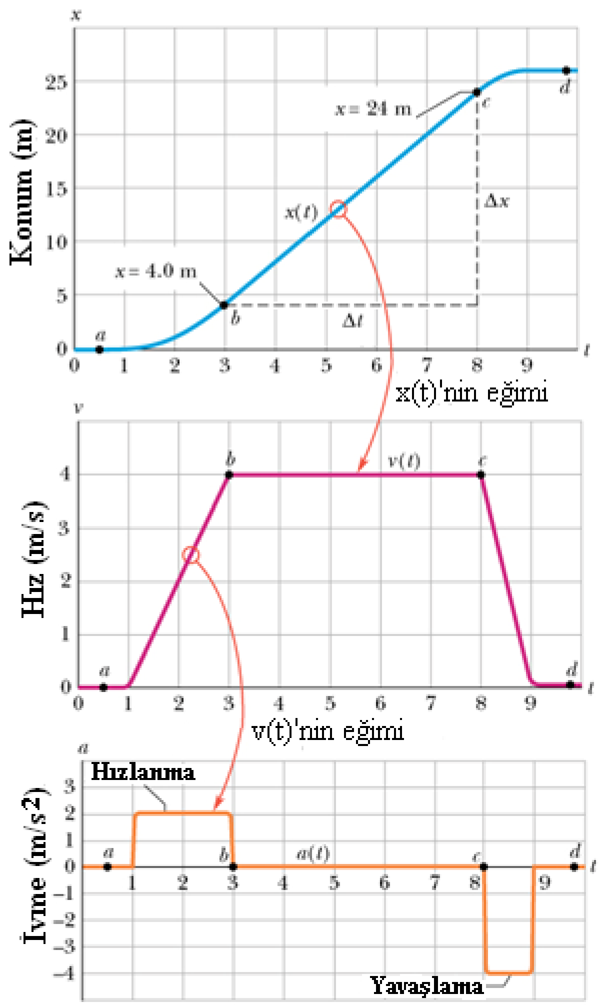
b–) $t = 2.5$ s anındaki hızını bulunuz.

a–) $$v_{\text{ort(0-1)}} = \frac{[-4+2]-[0]}{1-0} = -2 \text{ m/s}$$

$$v_{\text{ort(1-3)}} = \frac{[-12+18]-[-4+2]}{3-1} = 4 \text{ m/s}$$

b–) $$v(t) = \frac{dx}{dt} = -4 + 4t \text{ m/s}$$

$$v(2.5) = -4 + 4(2.5) = 6 \text{ m/s}$$



Ortalama İvme:

t_1 ve t_2 anları arasındaki ortalama ivme:

$$\boxed{a_{ort} = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta v}{\Delta t} \quad \mathrm{m/s^2}}$$

Anlık İvme:

Anlık ivme, ortalama ivmenin $\Delta t \to 0$ durumundaki limitidir ve herhangi bir t anında hızın ne kadar hızlı değiştiğini gösterir.

$$a = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{dv}{dt} \quad ; \quad a = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{dx}{dt}\right) = \frac{d^2 x}{dt^2}$$

Bu tanımdan anlık ivme, cismin hızının zamana göre birinci türevidir. Yani, hız-zaman grafiğinin herhangi bir andaki eğimidir.

Sabit İvmeli Hareket :

$t = 0$'da cismin hızı v_0 ve konumu x_0 olsun.

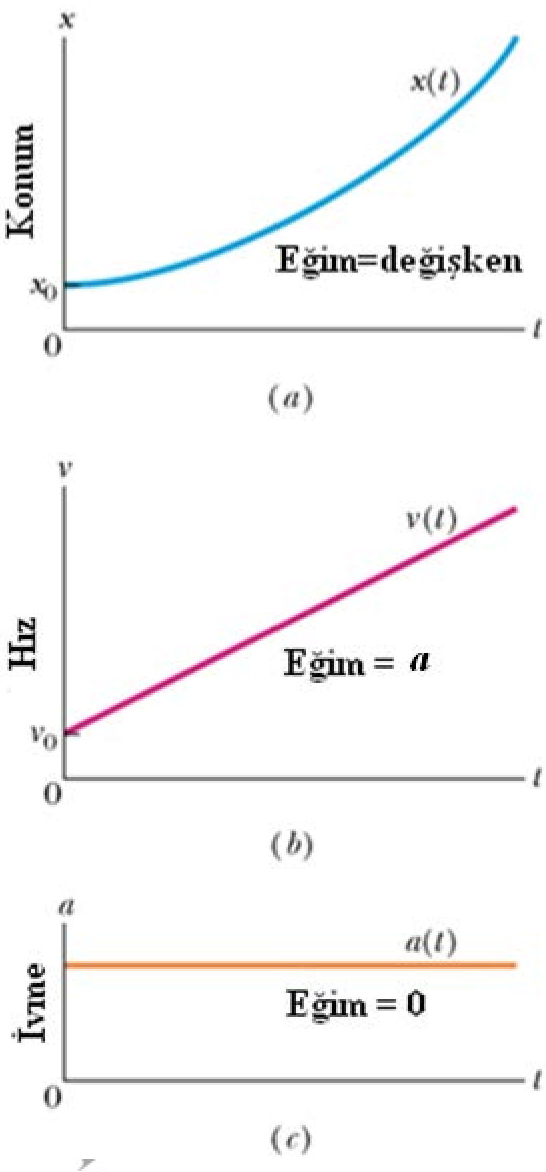
$$a = \frac{dv}{dt} \rightarrow dv = adt \rightarrow \int_{v_0}^{v} dv = \int_0^t adt = a\int_0^t dt \rightarrow v(t) = v_0 + at \qquad \text{(Eş-1)}$$

$$v = \frac{dx}{dt} \rightarrow dx = vdt = \left(v_0 + at\right)dt \rightarrow \int_{x_0}^{x} dx = \int_0^t v_0 dt + a\int_0^t tdt$$

$$x(t) - x_0 = v_0 t + \frac{1}{2}at^2 \qquad \text{(Eş-2)}$$

Bu iki eşitlikten t yok edilirse: $v^2 = v_0^2 + 2a\left(x - x_0\right)$ (Eş-3)

Konum $x(t)$, hız $v(t)$ ve ivmenin $a(t)$ zamanla değişimleri :



Konum-zaman grafiği, düşeyi $x = x_0$' da kesen bir paraboldür.

$$\boxed{x - x_0 = v_0 t + \frac{1}{2} a t^2}$$

Hız-zaman grafiği, düşeyi $v = v_0$' da kesen ve eğimi ivmeye (a) eşit bir doğrudur.

$$\boxed{v = v_0 + at}$$

Burada ivme (a) sabittir.

Sabit İvmeli Hareket Denklemleri :

1. $v = v_0 + at$ ***

$a = \dfrac{v - v_0}{t}$

2. $x - x_0 = v_0 t + \dfrac{1}{2} a t^2$ ***

3. $v^2 = v_0^2 + 2a(x - x_0)$ ***

4. $x - x_0 = v_{ort} t = \dfrac{1}{2}(v_0 + v)t$

Örnek : x-ekseni boyunca ilerleyen bir sürücü, $t = 10$ s içinde hızını düzgün olarak 10 m/s' den 30 m/s' ye çıkarıyor.

$a-$) Sürücünün ivmesini bulunuz.

$b-$) Bu ivmelenme sürecinin ilk yarısında otomobil ne kadar yol alır?

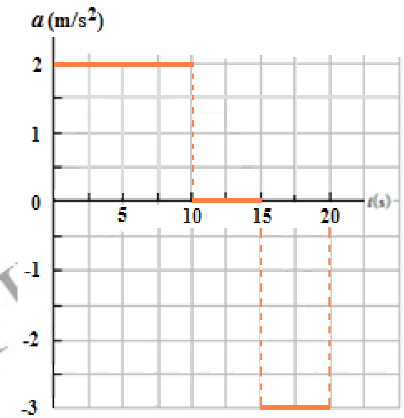
$c-$) Bu ivmelenme sürecinde otomobil ne kadar yol alır?

$$a-)\ a_{\text{ort}} = \frac{30-10}{10-0} = 2\ \text{m/s}^2$$

$$b-)\ \Delta x = x_s - x_i = v_i t + \frac{1}{2}at^2 = (10)*(5) + \frac{1}{2}*(2)*(5)^2 = 75\ \text{m}$$

$$c-)\ \Delta x = x_s - x_i = v_i t + \frac{1}{2}at^2 = (10)*(10) + \frac{1}{2}*(2)*(10)^2 = 200\ \text{m}$$

Örnek : Durgun halden harekete başlayan bir cismin ivme-zaman grafiği yanda verilmiştir.



$a-)$ $t=10$ s ve $t=20$ s anlarında cismin hızı nedir?

$b-)$ İlk 20 s içinde cisim ne kadar yol almıştır?

$a-)$ $t=0-10$ s $\rightarrow$ $a=2\ \text{m/s}^2 \rightarrow v=v_0+at \rightarrow v=20$ m/s

10-15 s aralığında $a=0$ olduğundan hız sabittir ve 20 m/s' dir.

15-20 s aralığında $a=-3\ \text{m/s}^2$ ve ilk hız 20 m/s' dir.

$$v=v_0+at \quad \rightarrow \quad v=20+(-3)*(5)=5\ \text{m/s}$$

$b-)$ 0-10 s aralığında: $v^2-v_0^2=2a\left(x-x_0\right) \rightarrow \Delta x_1=\dfrac{(20)^2-(0)^2}{2(2)}=100$ m

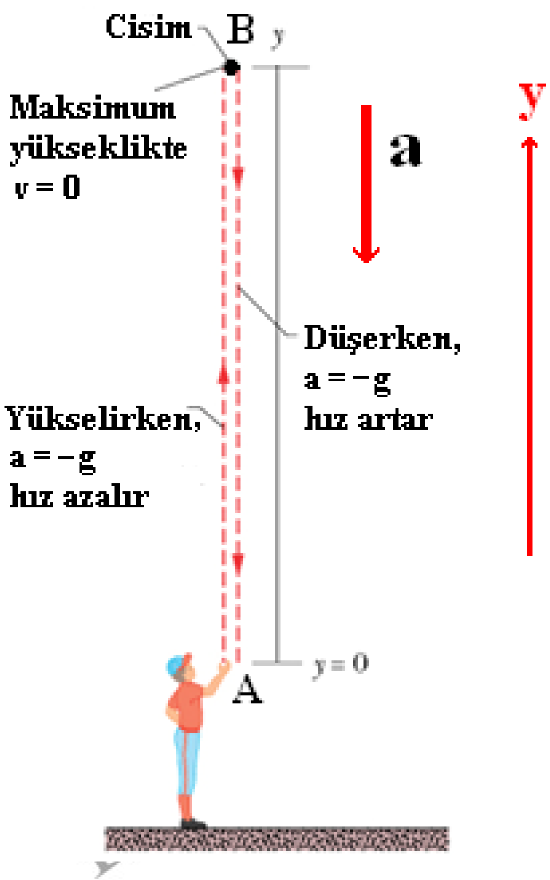
10-15 s aralığında: $a=0$ ve $v=20$ m/s $\rightarrow \Delta x_2=20*(5)=100$ m

15-20 s aralığında: $v^2=v_0^2+2a\left(x-x_0\right) \rightarrow \Delta x_3=\dfrac{(5)^2-(20)^2}{2*(-3)}=62.5$ m

$$\Delta x=\Delta x_1+\Delta x_2+\Delta x_3=262.5\ \text{m}$$

Serbest Düşme:

Dünya yüzeyinin yakınlarında tüm cisimler büyüklüğü 9.8 m/s^2 ve yönü dünyanın merkezine doğru olan bir ivmenin etkisinde hareket ederler. Serbest düşmede cisimlerin ivmesi sembolik olarak "***g***" ile gösterilir.



y-ekseni düşeyde ve yukarı yönde alınırsa, serbest düşmede cismin ivmesi $a = -g$ olur.

$$v = v_0 - gt \qquad \text{(Eş-1)}$$

$$y - y_0 = v_0 t - \frac{1}{2} g t^2 \qquad \text{(Eş-2)}$$

$$v^2 = v_0^2 - 2g\left(y - y_o\right) \qquad \text{(Eş-3)}$$

Örnek : 50 m yüksekliğinde bir binanın tepesinden bir taş düşey doğrultuda yukarı doğru 20 m/s hızla fırlatılıyor. ($g = 10 \text{ m}/s^2$)

$a-$) Taş maksimum yüksekliğe ne kadar zamanda çıkar?

$b-$) Bu nokta yerden ne kadar yüksektedir?

$c-$) Taş fırlatıldığı seviyeye ne kadar zamanda gelir? Bu noktada hızı ne olur?

$d-$) $t = 5$ s anında taşın hızı ve konumu nedir?

$a-$) Maksimum yükseklikte cismin hızı sıfırdır: $v = v_0 - gt \rightarrow t = 2 \text{ s}$

$$b-)\ v^2 = v_0^2 - 2g\left(y - y_o\right) \rightarrow \left(y - y_o\right) = 20 \text{ m} \rightarrow h = 70 \text{ m}$$

$$c-)\ y - y_0 = 0 = v_0 t - \frac{1}{2} g t^2 \rightarrow t(v_0 - \frac{1}{2} g t) = 0 \rightarrow t = \frac{2 * (20)}{10} = 4 \text{ s}$$

$$v = v_0 - gt = 20 - 10 * (4) = -20 \text{ m/s}$$

$$d-)\ v = v_0 - gt = 20 - 10 * (5) = -30 \text{ m/s}$$

$$y - 50 = \frac{v^2 - v_0^2}{-2 * (10)} = \frac{900 - 400}{-20} = -25 \text{ m} \rightarrow y = 25 \text{ m}$$

Örnek : Bir helikopterin yerden yüksekliği $y = 3t^2$ ile veriliyor. Burada t saniye ve y metre cinsindendir. $t = 2$ s anında helikopterden bir paket serbest bırakılıyor.

a–) Paket ne kadar zamanda yere ulaşır ($g = 10$ m / s^2)?

b–) Paket yere ulaştığı anda hızının büyüklüğü kaç m/s'dir?

c–) Paketin ivmesi için ne söyleyebilisriniz?

a–) $v = \dfrac{dy}{dt} = 6t \rightarrow$ paket serbest bırakıldığı andaki hızı $v_0 = 12$ m/s ve yerden yüksekliği $y_0 = 12$ m' dir.

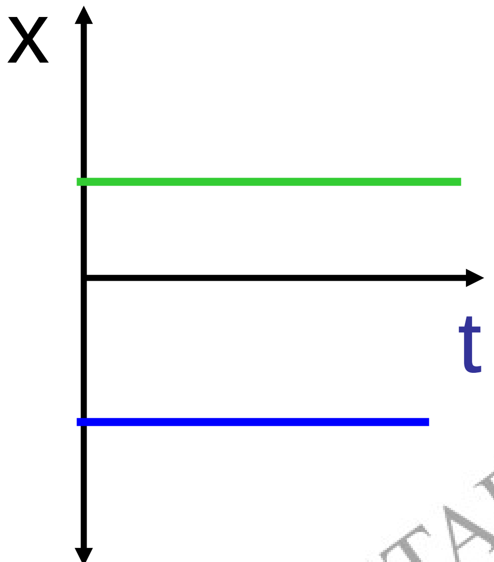
$$y - y_0 = v_0 t - \frac{1}{2} g t^2 \rightarrow 0 - 12 = 12t - 5t^2 \rightarrow t = \frac{12 + \sqrt{384}}{10} = 3.16 \text{ s}$$

b–) Paketin hızının zamana bağlı fonksiyonu: $v(t) = 12 - gt$

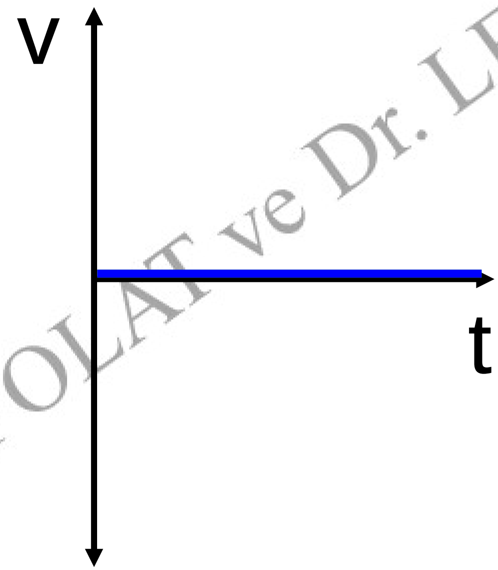
$$v = 12 - 10 * 3.16 = -19.6 \text{ m/s}$$

c–) Paketin ivmesi $a = \dfrac{dv}{dt} = -g = -10$ m/s^2 dir ve sabittir.

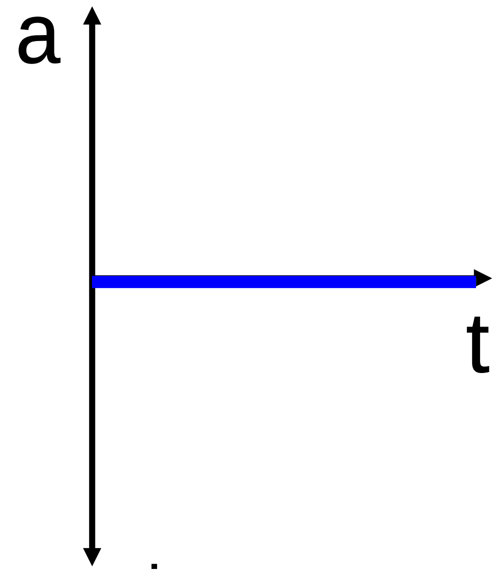
Duran bir cismin
konum-zaman, hız-zaman, ivme-zaman grafikleri:



Konum-zaman

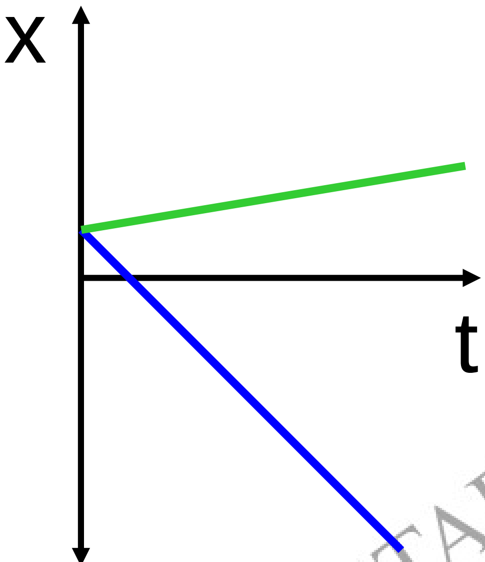


Hız-zaman

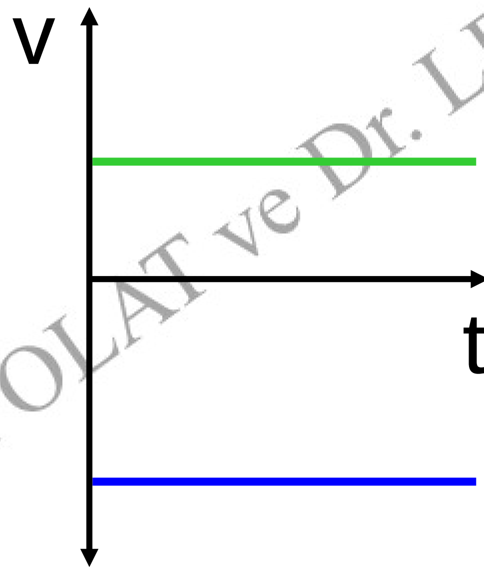


İvme-zaman

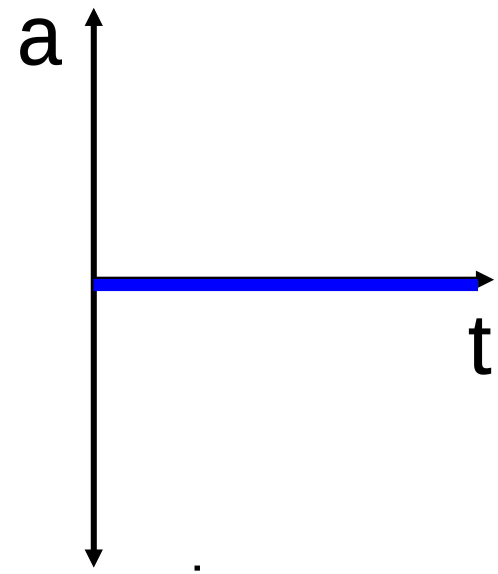
Sabit hızla hareket eden bir cismin konum-zaman, hız-zaman, ivme-zaman grafikleri:



Konum-zaman

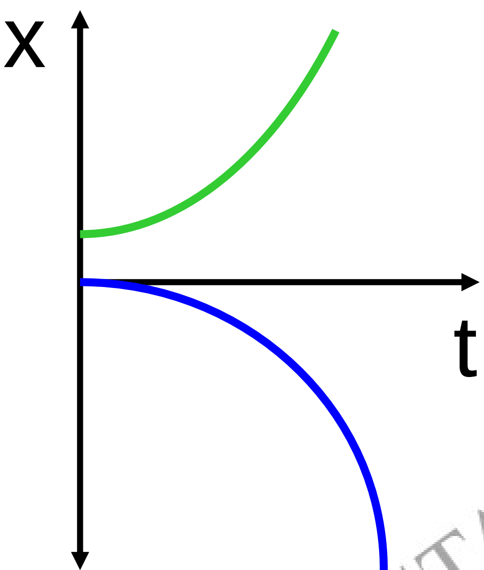


Hız-zaman

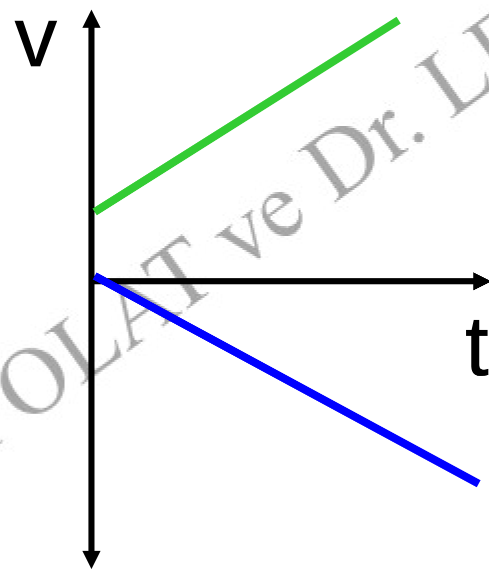


İvme-zaman

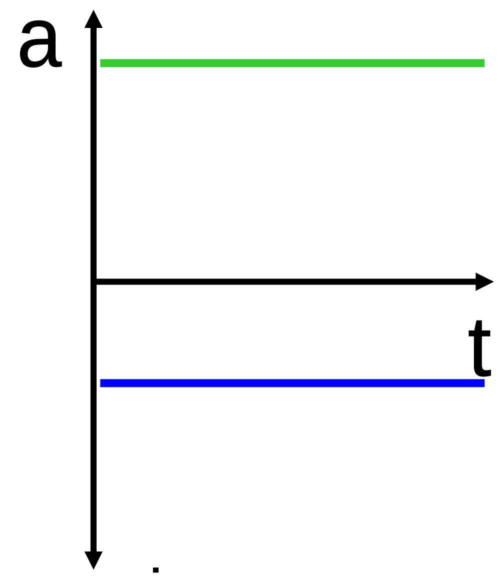
Sabit ivme ile hareket eden bir cismin konum-zaman, hız-zaman, ivme-zaman grafikleri:



Konum-zaman



Hız-zaman



İvme-zaman

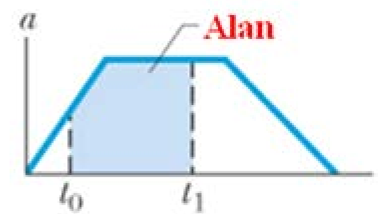
İvmenin Sabit Olmadığı Durum :

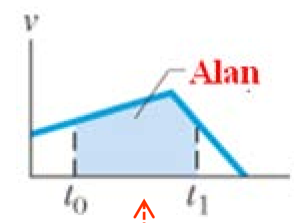
Cismin ivmesi sabit değilse, cismin hızını $v(t)$ ve konumunu $x(t)$ integrasyon yoluyla bulabiliriz.

İntegrasyon analitik olarak veya grafik yaklaşımı ile yapılır.

$$a = \frac{dv}{dt} \rightarrow dv = adt \rightarrow \int_{v_0}^{v_1} dv = \int_{t_0}^{t_1} adt \rightarrow v_1 - v_0 = \int_{t_0}^{t_1} adt \rightarrow v_1 = v_0 + \int_{t_0}^{t_1} adt$$

$$\int_{t_0}^{t_1} adt \;=\; \left[a(t) - t \text{ grafiğinde eğri altında kalan alan}\right]$$





$$v = \frac{dx}{dt} \rightarrow dx = vdt \rightarrow \int_{x_0}^{x_1} dx = \int_{t_0}^{t_1} vdt$$

$$x_1 - x_0 = \int_{t_0}^{t_1} vdt \rightarrow x_1 = x_0 + \int_{t_0}^{t_1} vdt$$

$$\int_{t_o}^{t_1} vdt = \left[v(t) - t \text{ grafiğinde eğri altında alan}\right]$$

$\vec{x}(t), \vec{v}(t)$ ve $\vec{a}(t)$ arasındaki ilişki:

$$\vec{x}(t) \underset{\text{İntegral}}{\overset{\text{Türev}}{\rightleftarrows}} \vec{v}(t) \underset{\text{İntegral}}{\overset{\text{Türev}}{\rightleftarrows}} \vec{a}(t)$$

$$\vec{v} = \frac{d\vec{x}}{dt} \qquad \vec{x}(t) = \vec{x}_0 + \int_0^t \vec{v}(t)dt$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} \qquad \vec{v}(t) = \vec{v}_0 + \int_0^t \vec{a}(t)dt$$

BÖLÜM-4
İki ve Üç Boyutta Hareket

Bu bölümde, tek boyut kısıtlaması olmadan, bir düzlemde ve uzayda cisimlerin hareketini incelemeye devam edeceğiz.

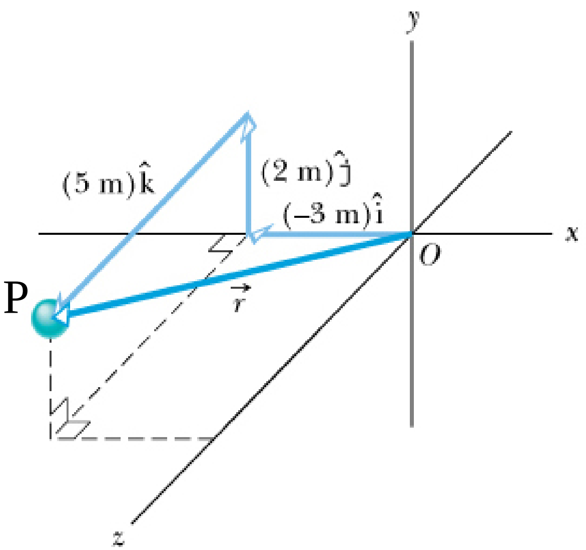
Düzlemde harekete örnek olarak "**eğik atış**" ve "**düzgün dairesel hareket**" ayrıntılı bir şekilde incelenecektir.

Son olarak da, birbirlerine göre sabit hızla hareket eden referans sistemlerine göre bir cismin hareketi incelenecektir. (Bağıl hareket)

Konum Vektörü

Bir parçacığın konum vektörü $\vec{r}$, bulunduğu koordinat sisteminin merkezinden parçacığın bulunduğu noktaya çizilen vektördür.

Örnek : Şekilde P noktasında bulunan cismin konum vektörü



$$\vec{r} = x\hat{\mathrm{i}} + y\hat{\mathrm{j}} + z\hat{\mathrm{k}}$$

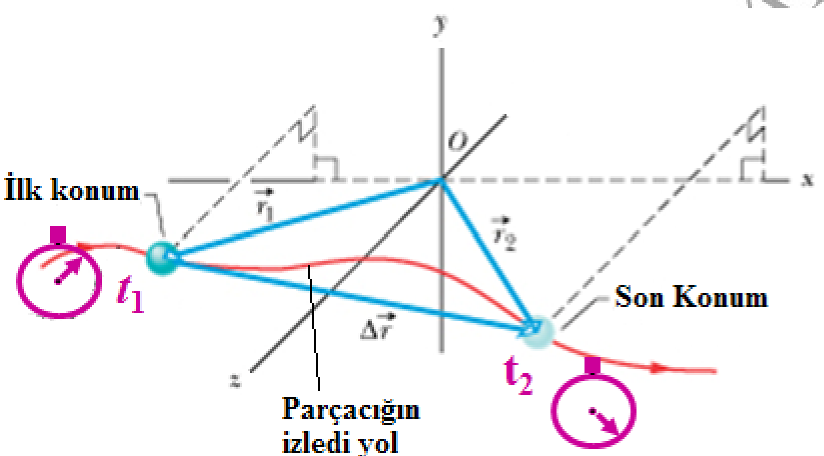
$$\vec{r} = -3\hat{\mathrm{i}} + 2\hat{\mathrm{j}} + 5\hat{\mathrm{k}} \ \ (\mathrm{m})$$

Yer-değiştirme Vektörü

$\vec{r}_1$ konumundan $\vec{r}_2$ konumuna hareket eden bir cismin yer-değiştirme vektörü, $\Delta\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$ biçiminde tanımlanır. $\vec{r}_1$ ve $\vec{r}_2$ konum vektörleri bileşenleri cinsinden $\vec{r}_1 = x_1\hat{\mathrm{i}} + y_1\hat{\mathrm{j}} + z_1\hat{\mathrm{k}}$ ve $\vec{r}_2 = x_2\hat{\mathrm{i}} + y_2\hat{\mathrm{j}} + z_2\hat{\mathrm{k}}$ biçiminde ifade edilirse, yer-değiştirme vektörü de bileşenleri cinsinden

$$\Delta\vec{r} = (x_2 - x_1)\hat{\mathrm{i}} + (y_2 - y_1)\hat{\mathrm{j}} + (z_2 - z_1)\hat{\mathrm{k}} = \Delta x\hat{\mathrm{i}} + \Delta y\hat{\mathrm{j}} + \Delta z\hat{\mathrm{k}}$$

olur.



$$\Delta x = x_2 - x_1$$

$$\Delta y = y_2 - y_1$$

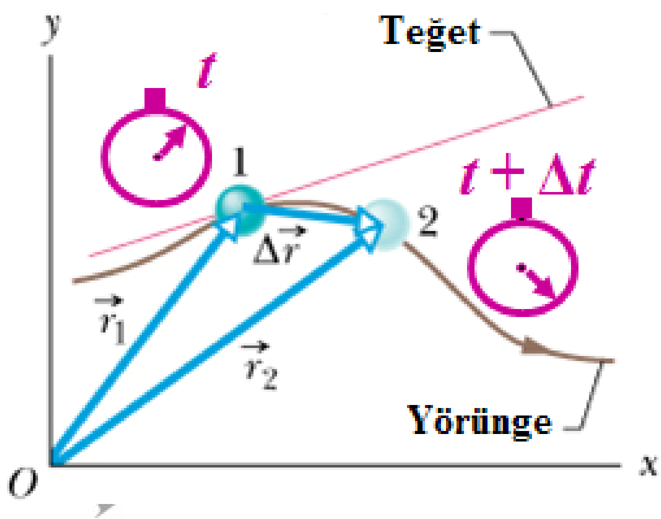
$$\Delta z = z_2 - z_1$$

Ortalama ve Anlık Hız

Bölüm 3' de tanımlandığı gibi,

$$\text{Ortalama Hız} = \frac{\text{Yer-değiştirme}}{\text{Zaman}} \quad \text{biçiminde verilir.}$$

$$\vec{v}_{\text{ort}} = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{\Delta x\hat{\text{i}} + \Delta y\hat{\text{j}} + \Delta z\hat{\text{k}}}{\Delta t} = \frac{\Delta x}{\Delta t}\hat{\text{i}} + \frac{\Delta y}{\Delta t}\hat{\text{j}} + \frac{\Delta z}{\Delta t}\hat{\text{k}}$$



Anlık hız ise, ortalama hızın $\Delta t \to 0$ durumundaki limitidir.

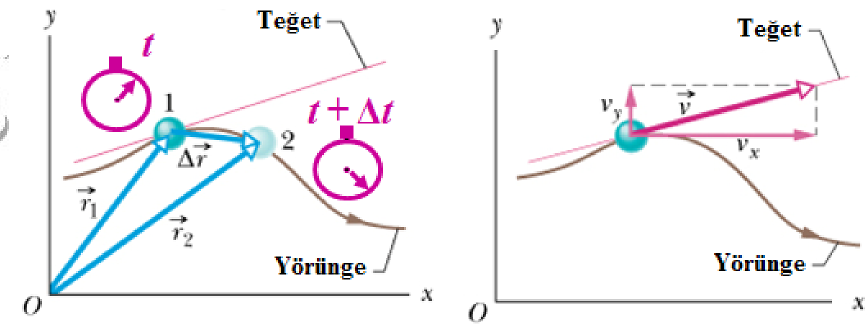
$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

Δt ' nin sıfıra gitmesi durumunda:

1. $\vec{r}_2$ vektörü $\vec{r}_1$ vektörü üzerine doğru kayar ve $\Delta\vec{r} \to 0$ durumu gerçekleşir.

2. $\dfrac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}$ vektörü (yani $\vec{v}_{\text{ort}}$), "1" noktasında yörüngeye çizilen teğet yönündedir.

3. $\vec{v}_{\text{ort}} \to \vec{v}$



$$\vec{v} = \frac{d}{dt}\left(x\hat{\mathrm{i}} + y\hat{\mathrm{j}} + z\hat{\mathrm{k}}\right) = \frac{dx}{dt}\hat{\mathrm{i}} + \frac{dy}{dt}\hat{\mathrm{j}} + \frac{dz}{dt}\hat{\mathrm{k}}$$

$$\vec{v} = v_x\hat{\mathrm{i}} + v_y\hat{\mathrm{j}} + v_z\hat{\mathrm{k}}$$

Hız bileşenleri şu eşitliklerle verilir:

$$\boxed{\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}} \quad \Longrightarrow \quad \boxed{v_x = \frac{dx}{dt}\ ;\ v_y = \frac{dy}{dt}\ ;\ v_z = \frac{dz}{dt}}$$

Ortalama ve Anlık İvme

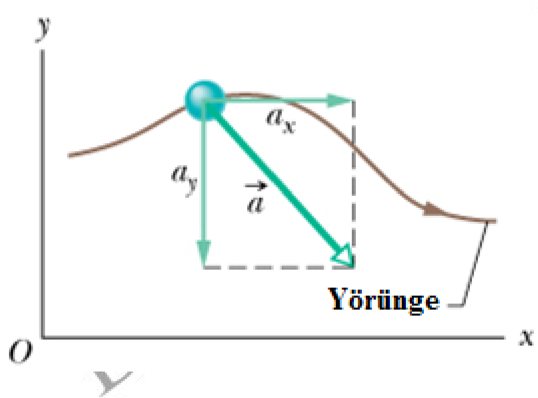
$$\text{Ortalama ivme} = \frac{\text{Hızdaki değişim}}{\text{Zaman}} \rightarrow \vec{a}_{\text{ort}} = \frac{\vec{v}_2 - \vec{v}_1}{\Delta t} = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}$$

Anlık ivme ise, ortalama ivmenin $\Delta t \rightarrow 0$ durumundaki limiti olarak tanımlanır :

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(v_x \hat{\mathrm{i}} + v_y \hat{\mathrm{j}} + v_z \hat{\mathrm{k}}\right) = \frac{dv_x}{dt}\hat{\mathrm{i}} + \frac{dv_y}{dt}\hat{\mathrm{j}} + \frac{dv_z}{dt}\hat{\mathrm{k}} = a_x \hat{\mathrm{i}} + a_y \hat{\mathrm{j}} + a_z \hat{\mathrm{k}}$$

Not: İvme vektörünün, hızdaki gibi, izlenilen yörüngeyle özel bir ilişkisi yoktur.

İvme bileşenleri şu eşitliklerle verilir:



$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} \rightarrow a_x = \frac{dv_x}{dt} \; ; \; a_y = \frac{dv_y}{dt} \; ; \; a_z = \frac{dv_z}{dt}$$

Örnek : Bir cisim, ilk hız bileşenleri $v_{0x} = 20$ m/s ve $v_{0y} = -15$ m/s olacak şekilde, $t = 0$ anında orijinden harekete başlıyor. xy-düzleminde hareket eden cismin ivme bileşenleri de $a_x = 4\ \text{m/s}^2$ ve $a_y = 0'$ dır.

a–) Cismin herhangi bir andaki hızını bulunuz.

b–) Cismin herhangi bir andaki konumu nedir?

a–) $v_x = v_{0x} + a_x t = 20 + 4t$ m/s ; $v_y = v_{0y} + a_y t = -15$ m/s

$$\vec{v} = \left(20 + 4t\right)\hat{\mathrm{i}} - 15\hat{\mathrm{j}} \text{ m/s}$$

b–) $t = 0 \rightarrow x_0 = y_0 = 0$:

$$\left.\begin{aligned} x(t) &= x_0 + v_{0x}t + \frac{1}{2}a_x t^2 = 20t + 2t^2 \\ y(t) &= y_0 + v_{0y}t + \frac{1}{2}a_y t^2 = -15t \end{aligned}\right\} \rightarrow \vec{r} = \left(20t + 2t^2\right)\hat{\mathrm{i}} + \left(-15t\right)\hat{\mathrm{j}} \text{ m}$$

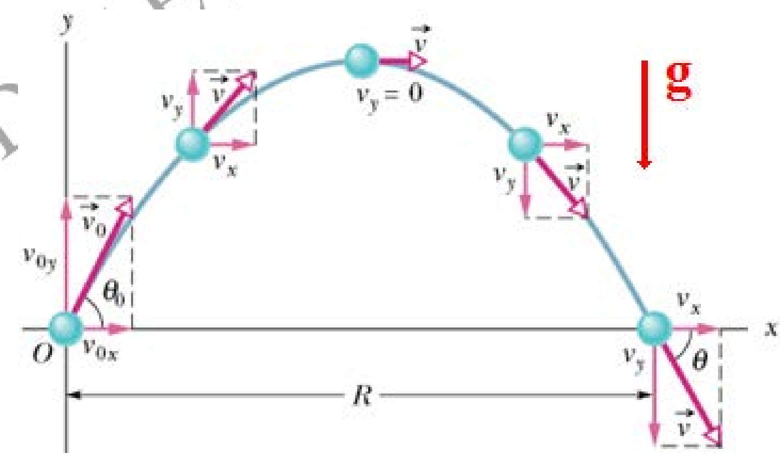
Eğik Atış

Bir cismin yer-çekimi kuvvetinin etkisi altında düşey düzlemdeki hareketi "**eğik atış**" hareketi olarak adlandırılır.

Cisim hareketine $\vec{v}_0$ ilk hızıyla başlar.

İlk hızın yatay ve düşey bileşenleri şu ifadelere sahiptir:

$$v_{0x} = v_0 \cos\theta_0 \quad ; \quad v_{0y} = v_0 \sin\theta_0$$



Eğik atış hareketi, *x*-ekseni ve *y*-ekseni boyunca ayrı ayrı incelenecektir. Bu iki hareket birbirinden bağımsızdır. *x*-ekseni yönündeki hareketin ivmesi sıfır, *y*-ekseni yönündeki hareketin ivmesi ise $a = -g$' dir.

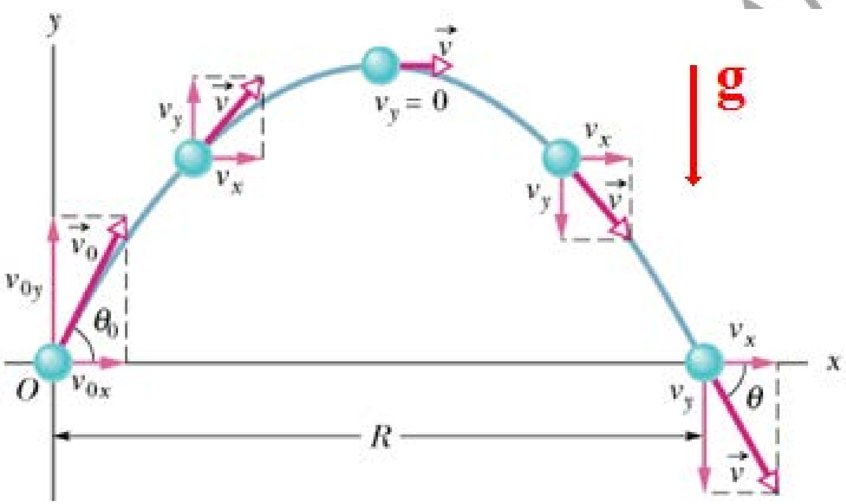
Yatay Hareket : $a_x = 0$' dır ve x-ekseni yönündeki hız değişmez.

$$v_x = v_0 \cos\theta_0 \quad \text{(Eş-1)} \qquad \text{ve} \qquad x - x_0 = (v_0 \cos\theta_0)t \quad \text{(Eş-2)}$$

Düşey Hareket : $a_y = -g$' dir ve y-eksenindeki hareket serbest düşmedir.

$$v_y = v_0 \sin\theta_0 - gt \quad \text{(Eş-3)} \qquad \text{ve} \qquad y - y_0 = (v_0 \sin\theta_0)t - \frac{1}{2}gt^2 \quad \text{(Eş-4)}$$

Eş-3' ten t bulunup Eş-4' te kullanılırsa; $v_y^2 = (v_0 \sin\theta_0)^2 - 2g(y - y_0)$ bağıntısı elde edilir.



Bu eşitliklerdeki x_0 ve y_0, cismin harekete başladığı noktanın koordinatlarıdır.

Çoğu problemde hareketin başladığı nokta orijin olarak alınır ($x_0 = 0$; $y_0 = 0$).

Yörünge denklemi :

$$v_x = v_0 \cos\theta_0$$ **(Eş-1)** ; $$x = \left(v_0 \cos\theta_0\right)t$$ **(Eş-2)**

$$v_y = v_0 \sin\theta_0 - gt$$ **(Eş-3)** ; $$y = \left(v_0 \sin\theta_0\right)t - \frac{1}{2}gt^2$$ **(Eş-4)**

Eş-2' den t çekilip Eş-4' te kullanılırsa,

$$y = \left(\tan\theta_0\right)x - \frac{g}{2\left(v_0 \cos\theta_0\right)^2}x^2$$

bulunur ve bu eşitlik cismin izlediği yörüngenin denklemidir.

Yörünge denklemi $\boldsymbol{y = ax + bx^2}$ formundadır ve bir parabolü tanımlar.

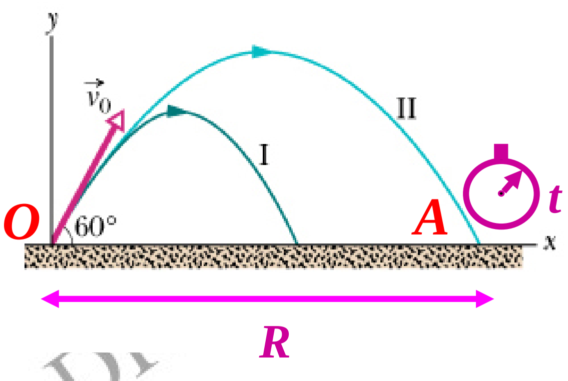
Yatay Menzil (R): $R = \dfrac{v_0^2 \sin 2\theta_0}{g}$

Cisim harekete başladığı nokta ile yere düştüğü nokta x-ekseni üzerindeyse ($y_0 = y = 0$), cismin yatayda aldığı yol (R) menzil olarak bilinir. Eş-4' ten

$$\left(v_0 \sin\theta_0\right)t - \frac{1}{2}gt^2 = 0 \rightarrow t\left(v_0 \sin\theta_0 - \frac{1}{2}gt\right) = 0 \rightarrow t = \frac{2v_0 \sin\theta_0}{g}$$

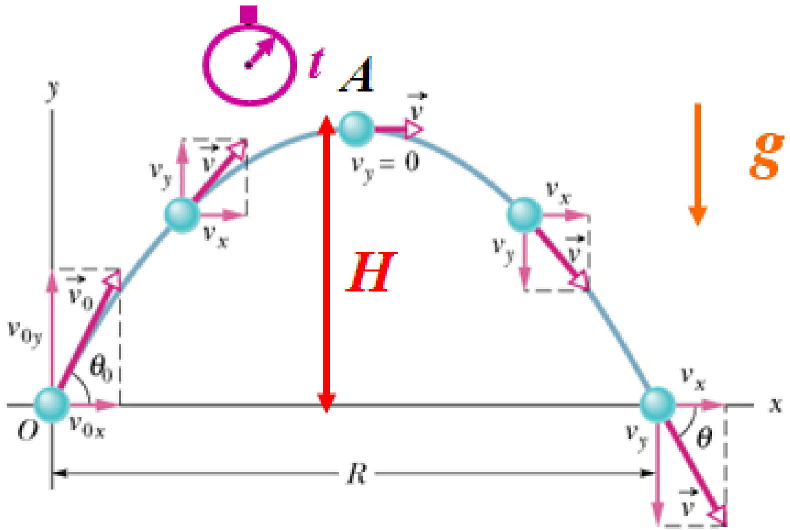
bulunur. t, cismin uçuş süresidir ve Eş-2 [$x = \left(v_0 \cos\theta_0\right)t$]' de yerine konursa

$$R = \frac{2v_0^2}{g}\sin\theta_0 \cos\theta_0 \rightarrow \boxed{R = \frac{v_0^2 \sin 2\theta_0}{g}}$$ bulunur.



Cisim yatayla $\theta_0 = 45°$' lik açı yapacak şekilde atılırsa maksimum menzile ulaşır. $R_{max} = \dfrac{v_0^2}{g}$

Maksimum Yükseklik (*H*): $$H=\frac{v_0^2\sin^2\theta_0}{2g}$$



$$v_y = v_0\sin\theta_0 - gt$$

A noktasında, $v_y = 0$:

$$v_0\sin\theta_0 - gt = 0 \rightarrow t = \frac{v_0\sin\theta_0}{g}$$

$$H = y(t) \rightarrow$$

$$H = \left(v_0\sin\theta_0\right)t - \frac{1}{2}gt^2 = \left(v_0\sin\theta_0\right)\frac{v_0\sin\theta_0}{g} - \frac{1}{2}g\left(\frac{v_0\sin\theta_0}{g}\right)^2$$

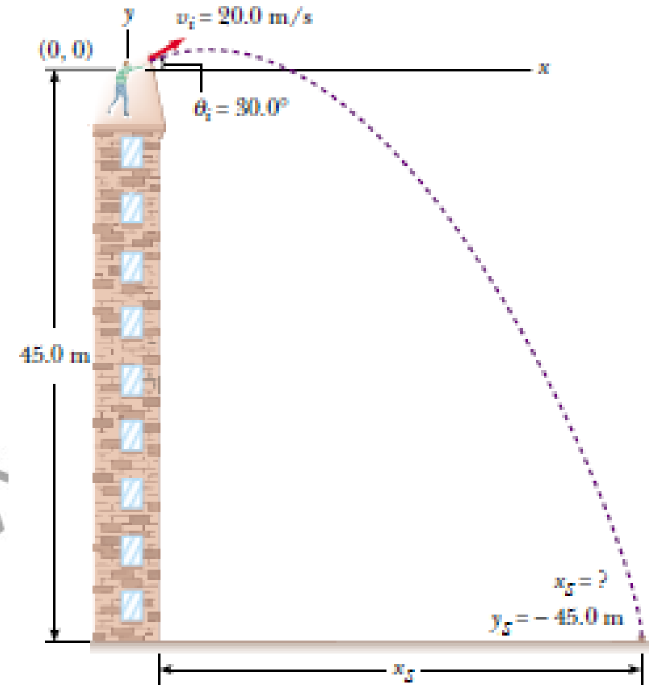
$$H = \frac{v_0^2\sin^2\theta_0}{2g}$$

Örnek : Bir taş, yükseklği 45 m olan bir binanın tepesinden yatayla 30° açı yapacak şekilde $v_0 = 20$ m/s' lik ilk hızla fırlatılıyor.

$a-$) Taş, ne kadar sürede yere düşer?

$b-$) Taş, atıldığı noktadan ne kadar uzakta yere düşer?

$c-$) Taş, yere hangi hızla çarpar?



$$a-)\;\; y - y_0 = v_{0y}t - \frac{1}{2}gt^2 \rightarrow -5t^2 + 20*\sin(30)t + 45 = 0 \rightarrow t = 4.22 \text{ s}$$

$$b-)\;\; x - x_0 = v_{0x}t + \frac{1}{2}a_x t^2 \rightarrow \quad x = 20*\cos(30)t = 73 \text{ m}$$

$$c-)\;\; v_x = v_{0x} = 20*\cos(30) = 17.3 \text{ m/s}$$

$$v_y = v_{0y} - gt = 20*\sin(30) - (9.8)*(4.22) = -31.4 \text{ m/s}$$

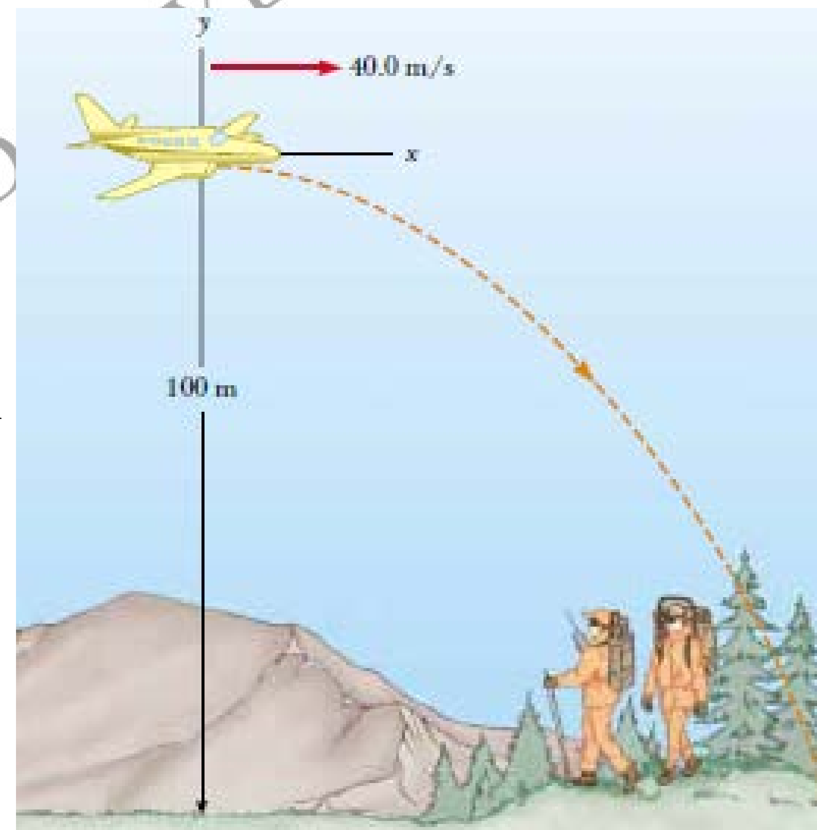
$$\vec{v} = 17.3\hat{i} - 31.4\hat{j} \text{ m/s}$$

Örnek : Bir kurtarma uçağı yerden 100 m yükseklikte, 40 m/s yatay hızla giderken, mahsur kalmış bir grubun bulunduğu noktaya yardım paketi ulaştırmak istiyor.

a–) Paketin grubun bulunduğu noktaya düşmesi için geçen süre nedir?

b–) Hangi yatay uzaklıktan bırakılmalıdır?

c–) Paket hangi hızla yere çarpar?



$$a\text{–)}\quad y - y_0 = \cancel{v_{0y}t} - \frac{1}{2}gt^2 \rightarrow -100 = -\frac{1}{2}(9.8)t^2$$

$$t = 4.52\ \text{s}$$

$$b\text{–)}\quad x - x_0 = v_{0x}t + \frac{1}{2}a_x t^2 \rightarrow x = v_{0x}t = 40 * (4.52) = 181\ \text{m}$$

$$c\text{–)}\quad v_x = v_{0x} = 40\ \text{m/s}$$

$$v_y = v_{0y} - gt = -(9.8) * (4.52) = -44.3\ \text{m/s}$$

$$\vec{v} = 40\hat{\text{i}} - 44.3\hat{\text{j}}\ \text{m/s}$$

Örnek : Bir kayakçı, şekildeki gibi 25 m/s' lik yatay bir hızla atlayış yapıyor ve rampanın alt ucuna düşüyor. Rampanın eğim açısı 35^o ' dir.

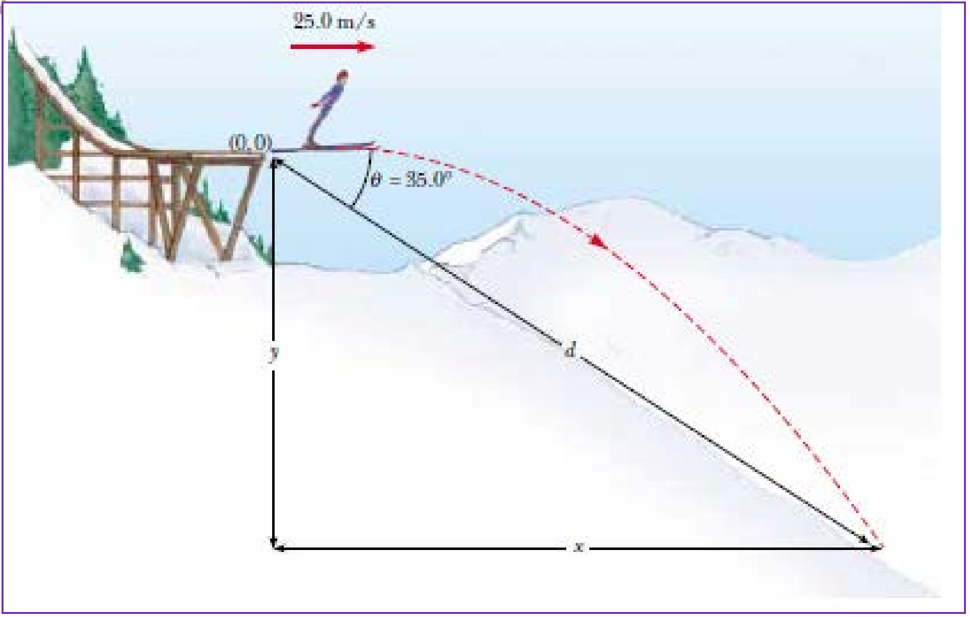
$a-$) Kayakçı ne kadar süre havada kalır?

$b-$) Rampanın uzunluğu (d) ne kadardır?

$c-$) Kayakçı rampaya hangi hızla çarpar?

$$a-)\ x = v_{0x}t = 25t = d\cos(35) \quad ; \quad y = -\frac{1}{2}gt^2 = -4.9t^2 = -d\sin(35)$$

$$-\tan(35) = \frac{-4.9t^2}{25t} \rightarrow t = \frac{25 * \tan(35)}{4.9} = 3.57 \text{ s}$$



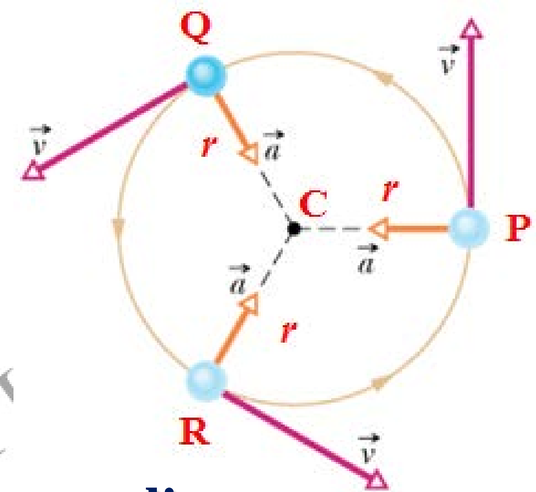
$$b-)\ 25t = d\cos(35) \rightarrow d = \frac{25 * (3.57)}{\cos(35)} = 109 \text{ m}$$

$$c-)\ v_x = v_{0x} = 25 \text{ m/s} \quad ;$$

$$v_y = v_{0y} - gt = -(9.8) * (3.57) = -35 \text{ m/s}$$

$$\vec{v} = 25\hat{\text{i}} - 35\hat{\text{j}} \text{ m/s}$$

Düzgün Dairesel Hareket:



Yarıçapı r olan çembersel bir yörüngede sabit v hızıyla hareket eden cisim "**düzgün dairesel hareket**" yapıyor denir. Yörüngenin her noktasında cismin hızının büyüklüğü aynı fakat yönü farklıdır.

Hızın değişmesi **ivmenin sıfır olmadığı anlamına gelir.**

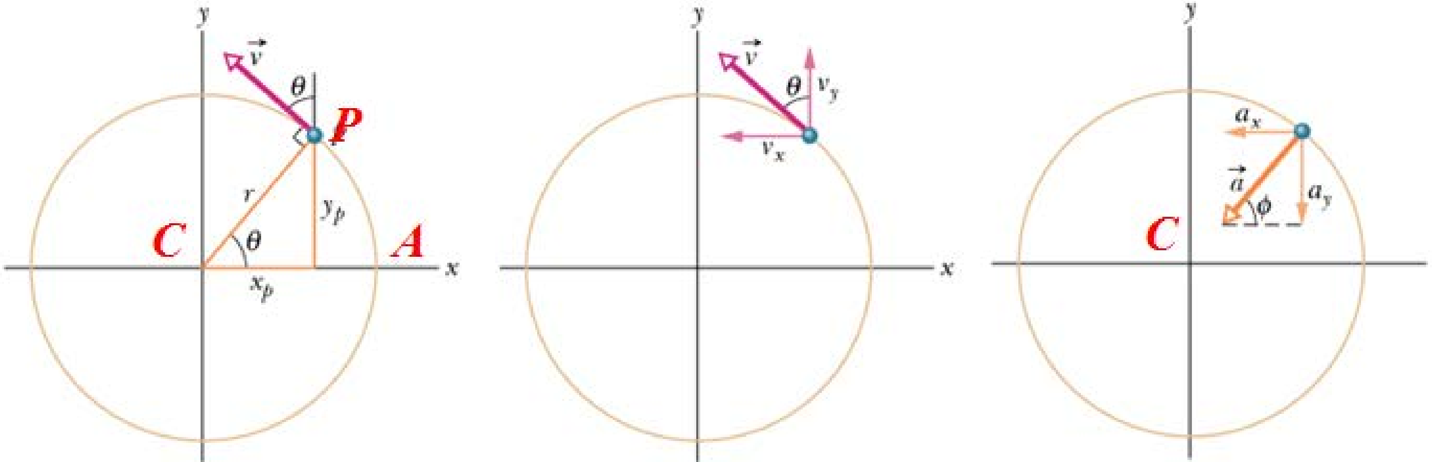
Düzgün dairesel harekette ivme şu özellikleri taşır:

1. Çember üzerindeki her noktada çemberin merkezi olan C noktasına doğrudur ve bu nedenle "**merkezcil ivme**" olarak adlandırılır.

2. Büyüklüğü $a = \dfrac{v^2}{r}$ bağıntısı ile verilir.

Cisim bir tam turunu bir periyotluk sürede (T) alır ve

$T = \dfrac{2\pi r}{v}$ ile ifade edilir.



$$\vec{v} = v_x \hat{\mathrm{i}} + v_y \hat{\mathrm{j}} = \left(-v\sin\theta\right)\hat{\mathrm{i}} + \left(v\cos\theta\right)\hat{\mathrm{j}}$$

P noktasında konum, hız ve ivme :

$$y_P = r\sin\theta \;,\; x_P = r\cos\theta$$

$$\vec{v} = \left(-v\frac{y_P}{r}\right)\hat{\mathrm{i}} + \left(v\frac{x_P}{r}\right)\hat{\mathrm{j}} \quad ; \quad \vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \left(-\frac{v}{r}\frac{dy_P}{dt}\right)\hat{\mathrm{i}} + \left(\frac{v}{r}\frac{dx_P}{dt}\right)\hat{\mathrm{j}}$$

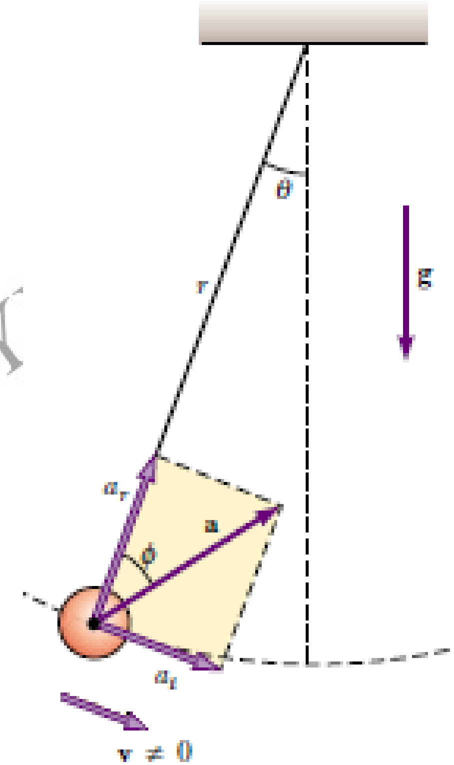
$$\vec{a} = \left(-\frac{v^2}{r}\cos\theta\right)\hat{\mathrm{i}} + \left(-\frac{v^2}{r}\sin\theta\right)\hat{\mathrm{j}} \;\; ; \;\; a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = \frac{v^2}{r}$$

$$\tan\phi = \frac{a_y}{a_x} = \frac{-\left(v^2/r\right)\sin\theta}{-\left(v^2/r\right)\cos\theta} = \tan\theta \rightarrow \phi = \theta \rightarrow \text{ivme, C' ye doğrudur.}$$

Örnek : Bir taş, 0.5 m uzunluğundaki bir ipin ucuna asılmış ve şekildeki gibi düşey düzlemde çembersel bir yörünge üzerinde salınım yapmaktadır. İp, düşey eksenle 20° ' lik açı yaptığında, taşın hızı 1.5 m/s' dir.

$a-$) Tam bu anda, radyal ve teğetsel yönlerdeki ivme nedir?

$b-$) Tam bu anda, net ivmenin büyüklüğünü ve yönünü bulunuz?



$$a-)\ a_r = \frac{v^2}{r} = \frac{(1.5)^2}{0.5} = 4.50 \text{ m/s}^2$$

$$a_t = g\sin(\theta) = 9.8 * \sin(20) = 3.35 \text{ m/s}^2$$

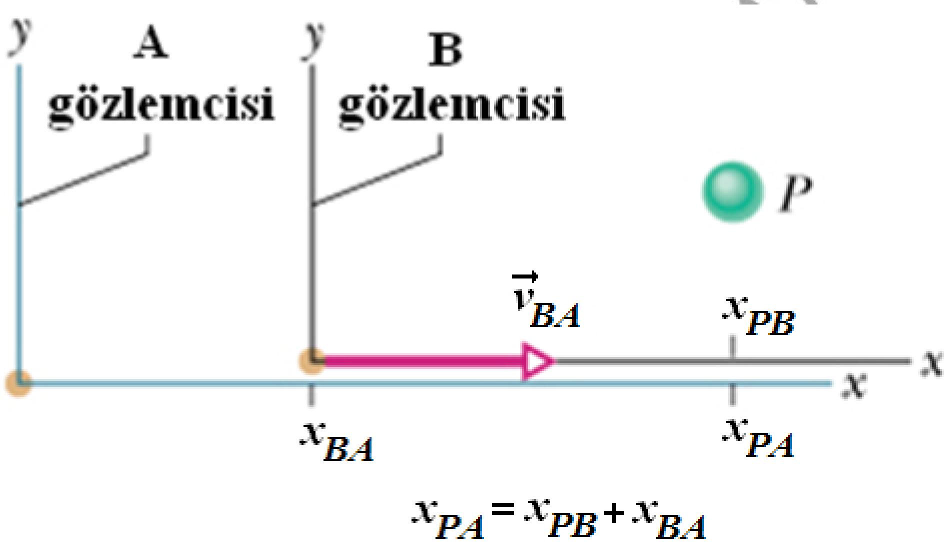
$$b-)\ \ a = \sqrt{a_r^2 + a_t^2} = \sqrt{(4.50)^2 + (3.35)^2} = 5.61 \text{ m/s}^2$$

$$\phi = \tan^{-1}(\frac{3.35}{4.50}) = 36.7^{\circ}$$ (ivmenin ip doğrultusu ile yaptığı açı)

Bir Boyutta Bağıl Hareket:

Bir P cisminin, birbirine göre hareketli A ve B gözlem çerçevelerine göre ölçülen hızları birbirinden farklıdır. B gözlemcisinin durgun olan A gözlemcisine göre sabit bir $\mathbf{v}_{BA}$ hızı ile hareket ettiğini varsayalım. Herhangi bir anda A ve B gözlemcileri, sırasıyla, P cisminin konumunu $\mathbf{x}_{PA}$ ve $\mathbf{x}_{PB}$ olarak ölçsünler. $\mathbf{x}_{BA}$'de B gözlemcisinin A gözlemcisine göre konumu olsun.

$$\mathbf{x}_{PA} = \mathbf{x}_{PB} + \mathbf{x}_{BA} \rightarrow \frac{d}{dt}\left(\mathbf{x}_{PA}\right) = \frac{d}{dt}\left(\mathbf{x}_{PB}\right) + \frac{d}{dt}\left(\mathbf{x}_{BA}\right) \rightarrow \mathbf{v}_{PA} = \mathbf{v}_{PB} + \mathbf{v}_{BA}$$



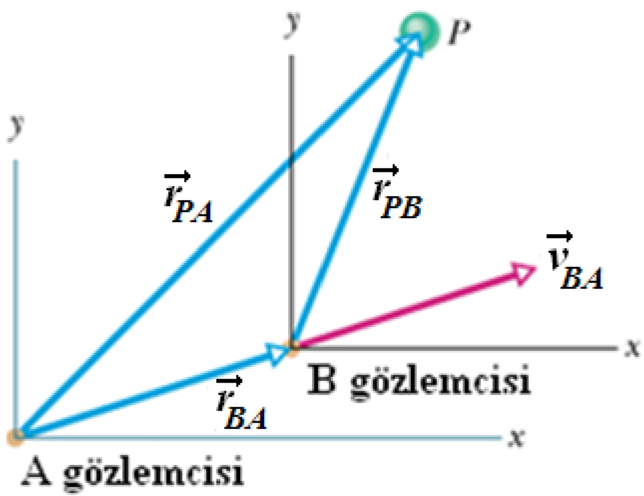
$$\frac{d\mathbf{v}_{BA}}{dt} = 0 \rightarrow \mathbf{a}_{PA} = \mathbf{a}_{PB}$$

Not: A ve B gözlemcileri P cisminin hızını farklı ölçerler fakat ivmesini aynı ölçerler.

İki Boyutta Bağıl Hareket :

B gözlemcisinin A gözlemcisine göre xy - düzleminde sabit bir v_{BA} hızı ile hareket ettiğini varsayalım. Herhangi bir anda, A ve B gözlemcileri P cisminin konum vektörünü, sırasıyla, $\vec{r}_{PA}$ ve $\vec{r}_{PB}$ olarak ölçsünler. $\vec{r}_{BA}$ ise B gözlemcisinin A gözlemcisine göre konum vektörü olsun.

$$\vec{r}_{PA} = \vec{r}_{PB} + \vec{r}_{BA} \rightarrow \frac{d}{dt}\vec{r}_{PA} = \frac{d}{dt}\vec{r}_{PB} + \frac{d}{dt}\vec{r}_{BA} \rightarrow \vec{v}_{PA} = \vec{v}_{PB} + \vec{v}_{BA}$$



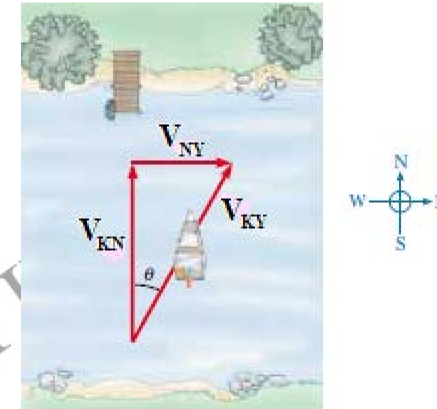
$$\frac{d\vec{v}_{BA}}{dt} = 0 \rightarrow \vec{a}_{PA} = \vec{a}_{PB}$$

Örnek : Genişliği 3 km olan ve doğu yönünde 5 km/sa düzgün hızla akan bir nehirde, kayıkçı rotasını tam olarak kuzeye yönlendirmiş ve suya göre 10 km/sa hızla ilerlemektedir.

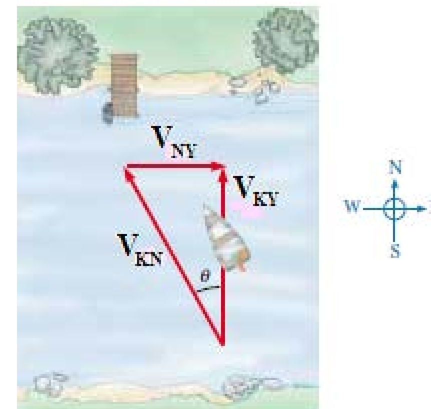
a–) Karadaki bir gözlemciye göre, kayıkçının hızını bulunuz.

b–) Kayıkçı ne kadar sürede karşı kıyıya ulaşır?

c–) Tam karşıdaki bir noktaya ulaşması için rotası ne olmalıdır?



(a)



(b)

$$a\text{–)}\ \vec{v}_{KY} = \vec{v}_{KN} + \vec{v}_{NY} = 10\hat{N} + 5\hat{E}\ \text{km/sa}$$

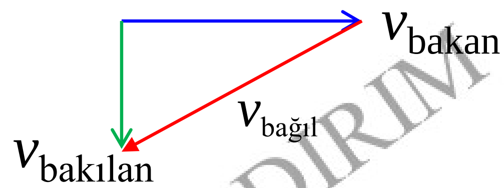
$$v_{\text{KY}} = \sqrt{10^2 + 5^2} = 11.2\ \text{km/sa}\ ;\ \theta = \tan^{-1}\left(\frac{5}{10}\right) = 26.6^{\text{o}}$$

$$b\text{–)}\ d = v_{\text{KN}}t \rightarrow t = \frac{3}{10} = 0.3\ \text{sa} = 18\ \text{dk}$$

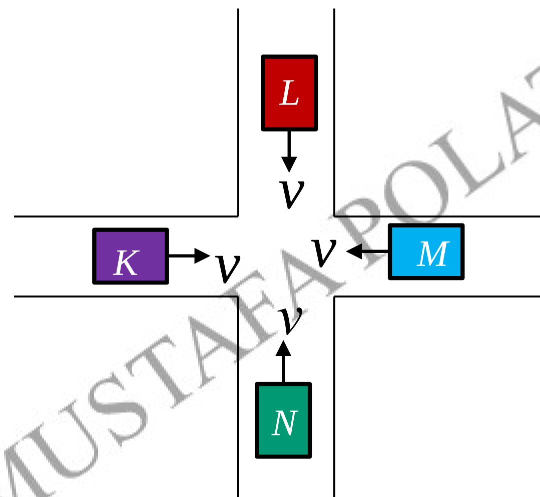
$$c\text{–)}\ \vec{v}_{\text{KY}} = \vec{v}_{\text{KN}} + \vec{v}_{\text{NY}} \rightarrow\ v_{\text{KY}} = \sqrt{v_{KN}^2 - v_{NY}^2} = \sqrt{10^2 - 5^2} = 8.66\ \text{km/sa}$$

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{5}{8.66}\right) = 30.2^{\text{o}}$$

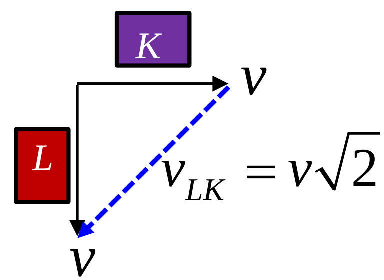
PRATİK: Hızların başlangıç noktalarını birleştir, bakandan bakılana vektör çiz. Çizdiğin bu vektör bağıl vektördür.



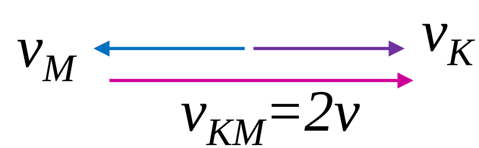
Örnek: Şekilde, bir dörtyol kavşağına aynı v hızı ile gelmekte olan K, L, M ve N araçları görülmektedir.



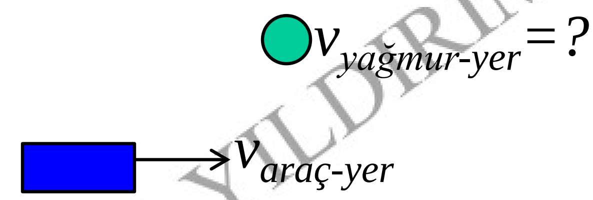
a–) *K*' dan bakan *L*' yi nasıl görür?

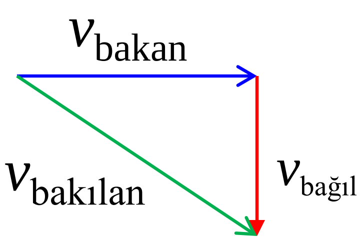


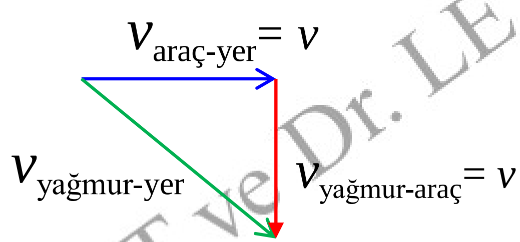
b –) *M*' den bakan *K*' yı nasıl görür?



Örnek: Doğuya doğru v hızıyla gitmekte olan bir aracın içindeki yolcu yere düşen yağmur damlasını güneye v hızıyla gidiyormuş gibi görüyor. Buna göre yağmur damlasının yere göre hızı nedir?



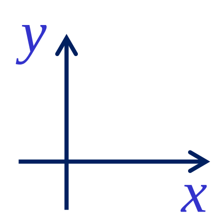




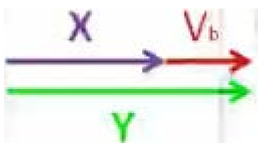
$$v_{\text{yağmur-yer}} = v\sqrt{2}$$

$$\vec{v}_{DY} = \vec{v}_{DA} + \vec{v}_{AY} \rightarrow \vec{v}_{DY} = -v\hat{\mathrm{j}} + v\hat{\mathrm{i}}$$

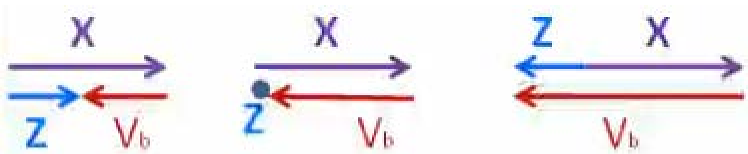
$$\vec{v}_{DY} = \sqrt{(-v)^2 + v^2} = \sqrt{2}v \quad ; \quad \theta = \tan^{-1}\left(\frac{v}{-v}\right) = -45^{\circ}$$



Örnek: Doğuya doğru gitmekte olan X aracındaki gözlemci Y aracını doğuya doğru, Z aracını batıya doğru gidiyormuş gibi görüyor. Buna göre, Y ve Z araçlarının hareketleri hakkında neler söylenebilir?



Y kesinlikle doğuya doğru gidiyor ve hızı X'in hızından büyüktür.



Buna göre,

1) Z, X' in hızından daha düşük bir hızla doğuya gidiyor olabilir.

2) Z durgun olabilir.

3) Z batıya doğru gidiyor olabilir.

Nehir Problemleri:

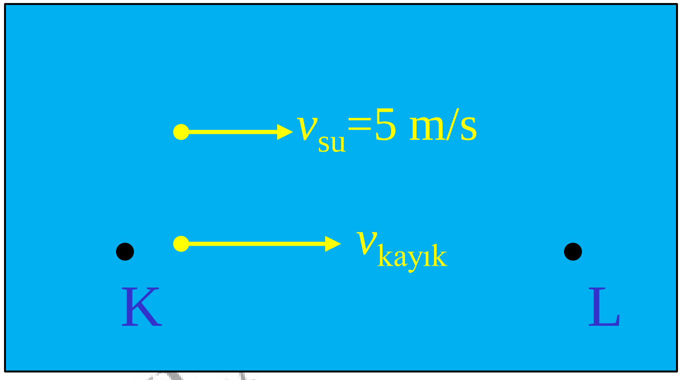
1- Suya göre hız: Su durgun iken yüzücünün veya kayığın sahip olduğu hızdır.

2- Kayığa göre hız: Kayık durgun iken kayığın içindeki hareketlinin hızıdır.

3- Yere göre hız: Suya göre hız ile akıntı hızının vektörel bileşkesi olan hız. Yani yerde duran bir gözlemciye göre hızdır.

NOT: Nehir problemlerinde yere göre hız ile işlem yapılır.

Örnek: Akıntı hızının 5 m/s olduğu bir nehirde, bir kayık K noktasından L noktasına, suya göre sabit hızla 10 s'de gidiyor ve 20 s'de geri dönüyor. Buna göre K-L uzaklığı kaç m' dir?

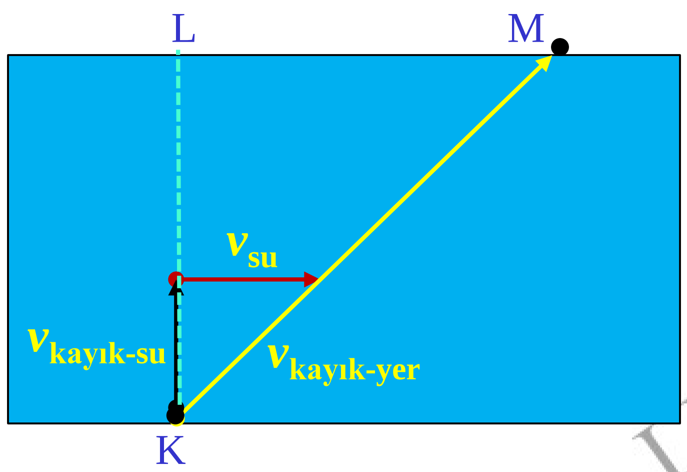


KL=LK $\rightarrow$ $(v_{kayık}+5)*10=(v_{kayık}-5)*20$

$v_{kayık}=15$ m/s

$\text{KL}=(v_{kayık}+5)*10=(15+5)*10=200$ m

İki Boyutta Nehir Problemleri:



Not 1: Her hız kendi yolunu alır.

Not 2: Kayık karşı kıyıya her zaman yere göre hızı doğrultusunda çıkar.

$$KL=(v_{kayık\text{-}su})*t$$

$$LM=(v_{su})*t$$

$$KM=(v_{kayık\text{-}yer})*t$$

BÖLÜM-5
Kuvvet ve Hareket I

Şu ana kadar hareketli bir cismin konum, hız ve ivmesini tanımladık. Cismin Hareketine neyin sebep olduğuyla ilgilenmedik.
Bu ve sonraki bölümde ise, klasik mekaniğin temeli olan ve geniş bir aralıkta pek çok fiziksel olguyu açıklayan Newton yasalarını öğreneceğiz.

Örneğin, yıldız ve gezegenlerin hareketleri Newton yasalarına uyar. Ancak, aşağıdaki iki koşulda bu yasaların geçersiz olduğunu akılda tutmak gerekir.

1. Cisimlerin hızlarının ışık hızına çok yakın olduğu durumlarda (% 99 veya üzeri). O zaman Einstein' in özel görelilik teorisini (1905) kullanmamız gerekecek.

2. İncelenen cismin boyutlarının çok küçük olduğu durumlarda (elektron, proton, nötron veya atom). O zaman da, Kuantum mekaniğini (1926) kullanmamız gerekecek.

Newton'un Birinci Yasası = Eylemsizlik Yasası

Newton' dan önce, bir cismin sabit bir hızla hareket etmesi için bir kuvvetin etkimesi gerektiği düşünülüyordu. Bir cismin durgun olması onun "**doğal durumu**" olarak biliniyordu. Ancak bu hata, "**sürtünme**" nin de bir kuvvet olduğunun anlaşılmasından önceydi.

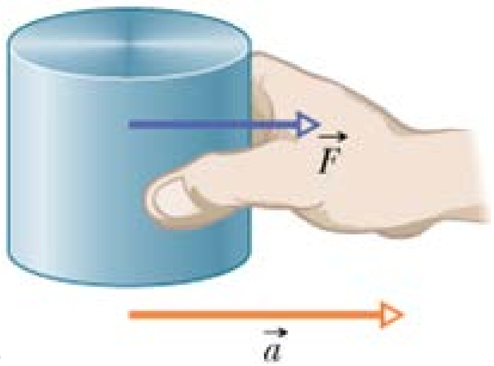
Örneğin, bir cisim pürüzlü yatay bir düzlemde v_0 ilk hızıyla harekete başlarsa bir süre sonra duracaktır.

Diğer yandan, aynı cisim aynı ilk hızla daha pürüzsüz bir yüzeyde harekete başlarsa çok daha sonra duracaktır.

Newton bu fikri ay ve gezegenlerin hareketlerine uyguladı. Uzayda sürtünme olmadığı için, doğruluğu kesin olan "**Newton' un birinci yasası**" ortaya çıkmış oldu. Buna göre,

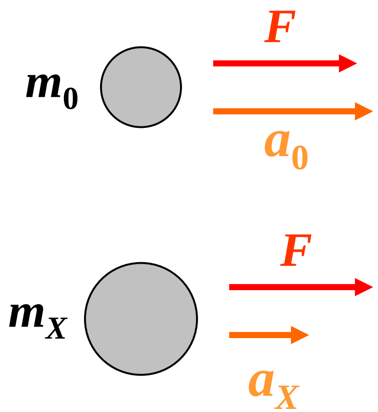
Bir cisme net bir kuvvet etkimiyorsa, cisim durumunu korur. Durgunsa durmaya, hareketliyse aynı hızla düzgün doğrusal hareketine devam eder.

Kuvvet: Bir cisme etkiyen kuvvet, sebep olduğu ivmenin ölçülmesi ile belirlenebilir.



Sürtünmesiz bir yüzey üzerine kütlesi m = 1 kg olan bir cisim koyalım ve uygulanan bir ***F*** kuvvetinin oluşturduğu ***a*** ivmesini ölçelim.

Kuvvet, cismin ivmesi a = 1 m/s^2 olacak şekilde ayarlanırsa, uygulanan kuvvet, F = 1 newton (N)' dur denir.



Kütle: Cisme özgü bir sabittir ve cisimdeki madde miktarının bir ölçüsüdür. Bir cismin kütlesi, cisme etki eden ***F*** kuvveti ile bu kuvvetin sebep olduğu ***a*** ivmesini birbirine bağlayan cisme özgü bir niceliktir.

Kütlesi $m_0 = 1$ kg olan bir cisme $F = 1$ N kuvvet uygulayalım.
Bu kuvvet cisme $a_0 = 1$ m/s^2 ivmesini kazandırır.

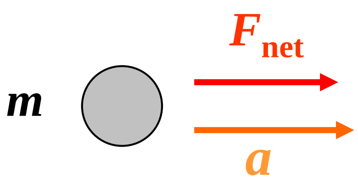
Aynı kuvveti, kütlesi m_X olan bir cisme uyguladığımızda cisme kazandıracağı ivme de a_X olsun. Bu durumda,

$$\frac{m_X}{m_0} = \frac{a_0}{a_X} \rightarrow m_X = m_0 \frac{a_0}{a_X}$$

bulunur. Böylece, a_X ivmesi ölçülerek herhangi bir cismin m_X kütlesi belirlenebilir.

Newton’un İkinci Yasası

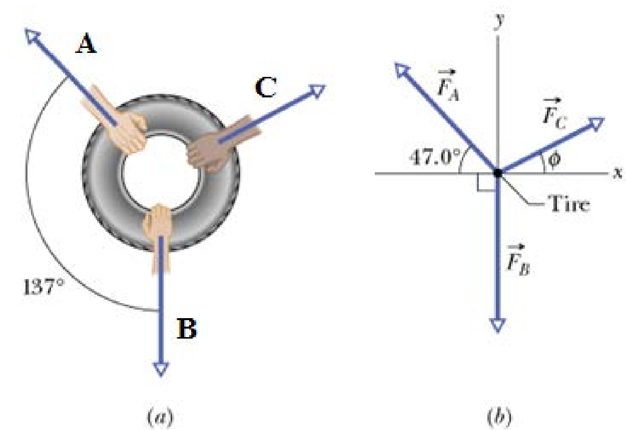
Bir cisme etki eden net kuvvet (F_{net}), bu kuvvetin cisme kazandırdığı ivme (a) ve cismin kütlesi (m) arasındaki ilişki “**Newton’un ikinci yasası**” olarak adlandırılır ve şöyle tanımlanır:



Bir cisme etkiyen net kuvvet ile cisme kazandırdığı ivme doğru orantılıdır ve orantı sabiti de o cismin kütlesine eşittir.

$$\boxed{\vec{F}_{net} = m\vec{a}}$$

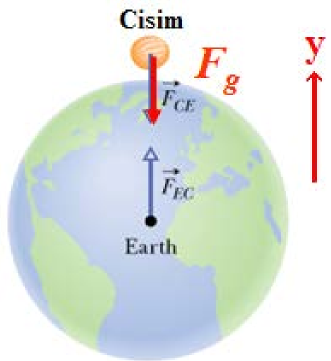
Not : Cisme $\vec{F}_A$, $\vec{F}_B$ ve $\vec{F}_C$ gibi çok sayıda kuvvet etkiyorsa, net kuvvet bunların vektörel toplamıdır ve $\vec{F}_{net} = \vec{F}_A + \vec{F}_B + \vec{F}_C$ ile verilir.



Üç boyutlu uzayda (*xyz*-koordinat sistemi) bileşenleri cinsinden Newton’ un ikinci yasası:

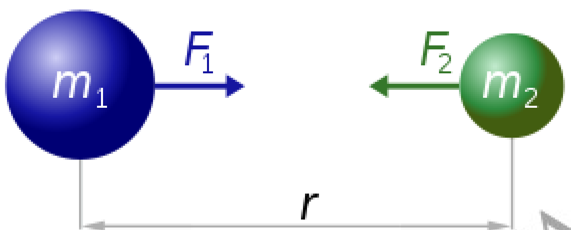
$$\boxed{F_{net,x} = ma_x \;\; ; \;\; F_{net,y} = ma_y \;\; ; \;\; F_{net,z} = ma_z} \qquad (5\text{-}5)$$

Mekanik Problemlerinde Çok Sıklıkla Karşılaşacağımız Kuvvetler ve Bunların Özellikleri:



Yer-çekimi Kuvveti: Bir cisme Dünya tarafından uygulanan kuvvettir. Dünyanın merkezine doğrudur ve Newton' un ikinci yasasına göre şöyle verilir.

$$\vec{F}_g = m\vec{a} = -mg\hat{j} \qquad \rightarrow \qquad \left|\vec{F}_g\right| = mg$$



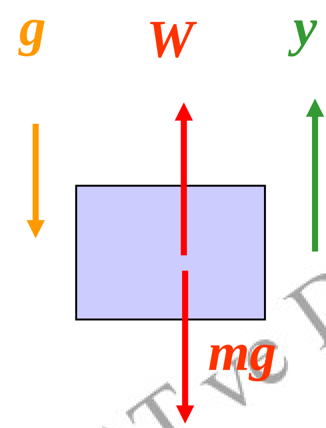
$$F_1 = F_2 = G\frac{m_1 \times m_2}{r^2}$$

G, kütle çekim sabitidir.

<u>Newton'un evrensel kütle çekim yasasının</u> mekanizması; bir nokta kütle (m_1) diğer bir nokta kütleyi (m_2), iki kütlenin çarpımı ile doğru, aralarındaki (r) uzaklığının karesi ile ters orantılı olacak büyüklükteki bir F kuvveti ile çeker.

Kütlelerden ve bu kütlelerin aralarındaki uzaklıktan bağımsız olarak $|F_1|$ ve $|F_2|$ kuvvetlerinin büyüklükleri her zaman birbirine eşittir.

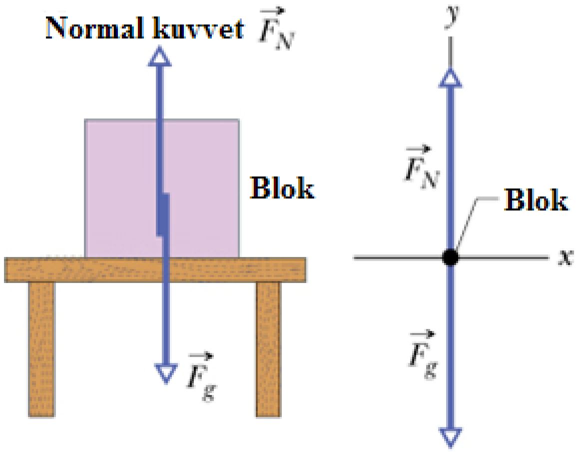
Ağırlık: Bir cismin ağırlığı, cismin serbest düşmesini engelleyecek kuvvetin büyüklüğü olarak tanımlanır.



$$F_{\text{net},y} = ma_y = W - mg = 0 \rightarrow W = mg$$

Not: Ağırlık ve kütle farklı niceliklerdir. Yer-çekiminin farklı olduğu yerlerde (örneğin ayda, g_m = 1.7 m/s^2), kütle değişmezken ağırlık değişir.

Değme Kuvveti: İsminden de anlaşılacağı gibi, bu kuvvetler birbirleriyle temas halindeki yüzeyler arasında oluşur. İki tür temas kuvveti vardır. Birincisi temas yüzeyine dik yöndeki "**normal kuvvet**", ikincisi de temas yüzeyine paralel olan "**sürtünme kuvveti**" dir.



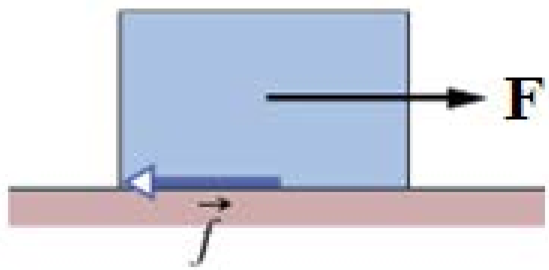
(a) (b)

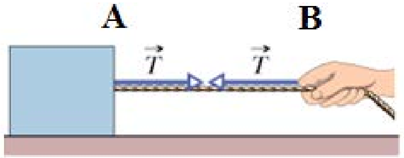
Normal Kuvvet: Bir cisim bulunduğu yüzeye bir baskı uygularsa, yüzey deforme olur ve cisme, temas yüzeyine dik yönde, ismine "normal kuvvet" diyeceğimiz bir kuvvet uygular. Bir masa üzerinde duran kütlesi *m* olan bir blok düşünelim.

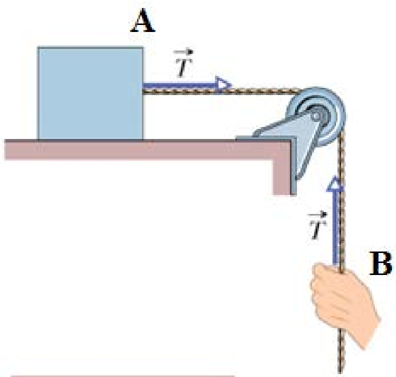
$$F_{\text{net},y} = ma_y = F_N - mg = 0 \rightarrow F_N = mg$$

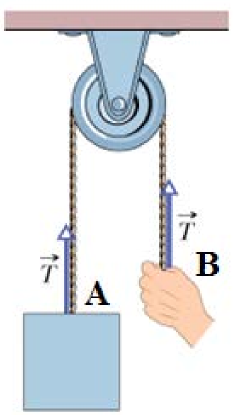
bulunur.

Sürtünme kuvveti: Bir cismi bulunduğu yüzey üzerinde harekete zorlarsak bir dirençle karşılaşırız. Bu direnç “sürtünme” olarak bilinir ve kayma eğilimine ters yöndedir.









Gerilme: Bir cisme bağlı olan ipte oluşan bir kuvvettir ve şu özelliklere sahiptir:

1. Her zaman ip boyunca yönelir.
2. Her zaman cismi çekecek yöndedir.
3. İp üzerinde A ve B noktalarında aynı büyüklüktedir.

Şu kabullenmeler yapılacaktır:

a. İpin kütlesi, bağlı oldukları cisimlerin kütlesine göre çok küçüktür.

b. İp uzamasızdır.

c. Makara kullanılması durumunda, makara sürtünmesizdir ve kütlesi ihmal edilebilir.

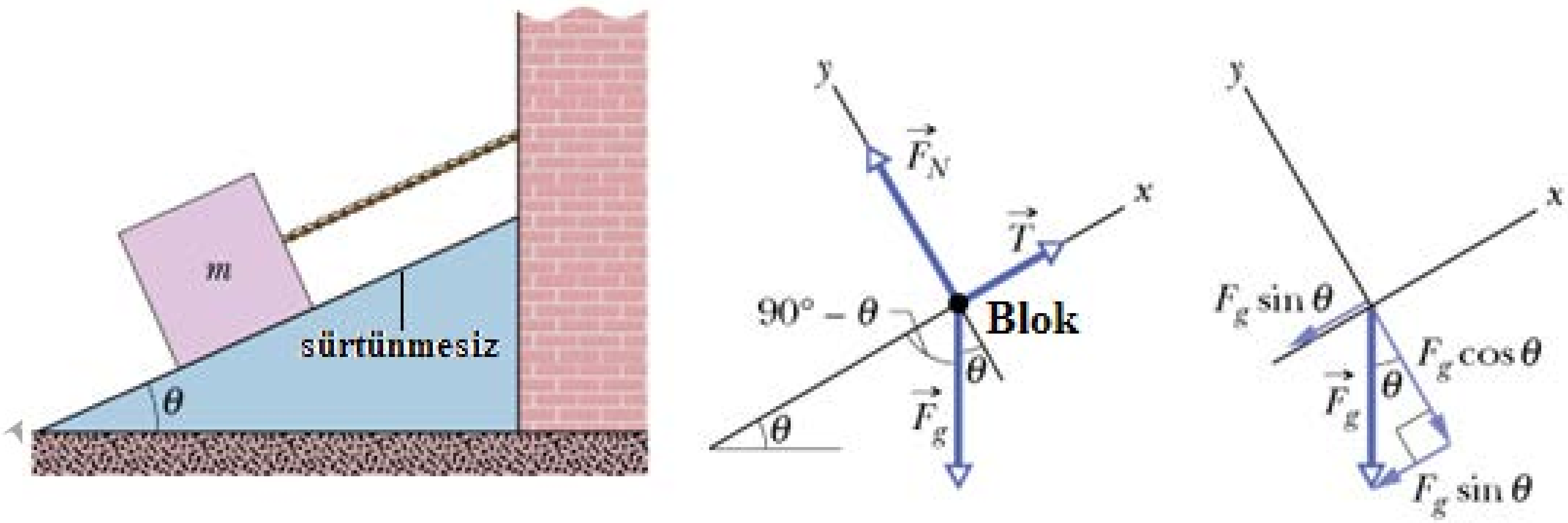
Newton yasalarını uygularken takip edilecek yol:

1. İncelenecek sistemin basit bir şeklini çizin.

2. Probleme uygun bir koordinat sistemi seçin.

3. Sistemdeki tüm kuvvetleri belirleyin ve serbest-cisim diyagramı üzerinde gösterin.

4. Newton yasalarını sisteme uygulayın.



Örnek : Kütlesi 0.3 kg olan bir hokey diski sürtünmesiz bir yüzey üzerinde kaymaktadır. Diske, şekildeki gibi $F_1 = 5$ N ve $F_2 = 8$ N' luk iki kuvvet etkimektedir.

a–) Diskin ivmesinin büyüklüğünü ve yönünü bulunuz.

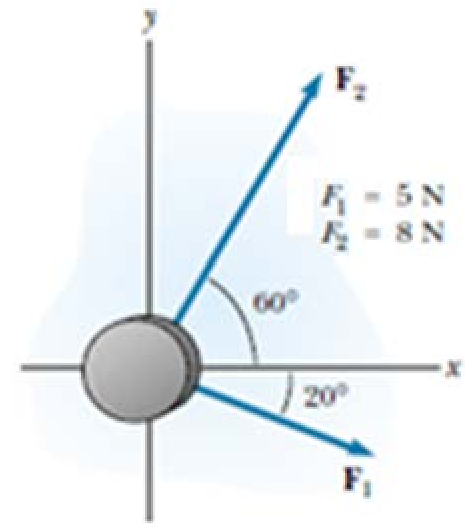
b–) Diskin ivmesini sıfır yapacak üçüncü kuvvet ne olmalıdır?

$$a\text{–)}\quad a_x = \frac{\sum F_x}{m} = \frac{5*\cos(20)+8*\cos(60)}{0.3} = 29\ \text{m/s}^2$$

$$a_y = \frac{\sum F_y}{m} = \frac{-5*\sin(20)+8*\sin(60)}{0.3} = 17.4\ \text{m/s}^2$$

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = \sqrt{(29)^2 + (17.4)^2} = 33.8\ \text{m/s}^2$$

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{17.4}{29}\right) = 31^{\circ}$$

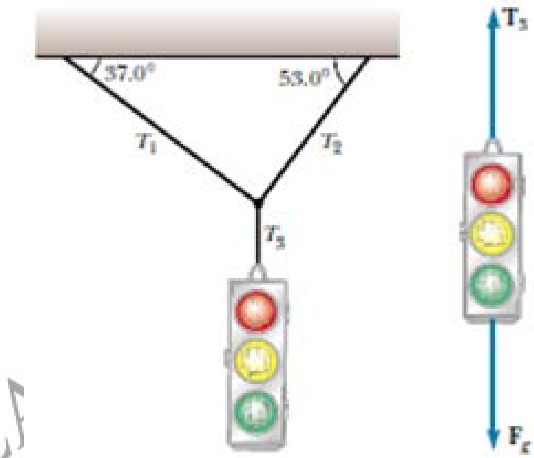


$$b\text{–)}\quad \vec{a} = a_x\hat{\mathrm{i}} + a_y\hat{\mathrm{j}} = 0 \rightarrow \sum F_x = F_{1x} + F_{2x} + F_{3x} = 0 \rightarrow F_{3x} = -5*\cos(20) - 8*\cos(60) = -8.7\ \text{N}$$

$$\sum F_y = F_{1y} + F_{2y} + F_{3y} = 0 \rightarrow F_{3y} = 5*\cos(20) - 8*\cos(60) = -5.2\ \text{N}$$

$$\vec{F}_3 = F_{3x}\hat{\mathrm{i}} + F_{3y}\hat{\mathrm{j}} = -8.7\hat{\mathrm{i}} - 5.2\hat{\mathrm{j}}\ \text{N}$$

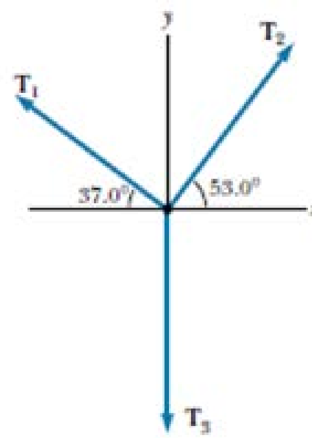
Örnek : Ağırlığı 125 N olan trafik ışıkları şekildeki gibi iplerle asılı durmaktadır. Üstteki kabloların yatayla yaptıkları açılar 37^{o} ve 53^{o} olduğuna göre, her üç ipteki gerilme kuvvetlerini hesaplayınız. Hangi durumda $T_1 = T_2$ olur?



Sistem dengede olduğuna göre, $T_3 = F_g = 125$ N bulunur.

$$\sum F_x = -T_1 \cos(37) + T_2 \cos(53) = 0 \qquad \text{(Eş-1)}$$

$$\sum F_y = T_1 \sin(37) + T_2 \sin(53) - T_3 = 0 \qquad \text{(Eş-2)}$$



Eş-1' den: $T_1 = -\dfrac{\cos(53)}{\cos(37)} T_2 = \dfrac{0.8}{0.6} T_2$ bulunur.

Bunu Eş-2' de yerine koyarsak: $T_1(0.6) + \dfrac{0.6}{0.8} T_1 - 125 = 0 \rightarrow T_1 = 75.1$ N

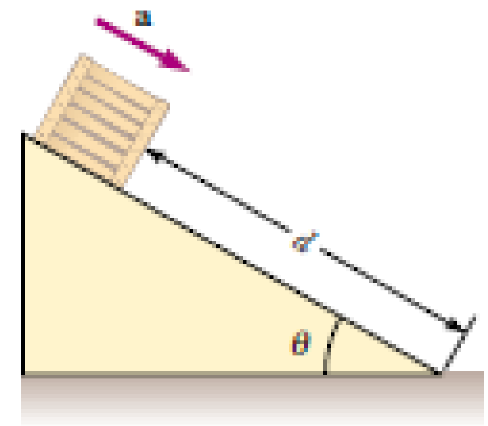
$T_2 = \dfrac{0.6}{0.8} T_1 = 99.9$ N bulunur.

Eş-1' e göre, iplerin yatayla yaptıkları açılar aynı olsaydı, $T_1 = T_2$ olurdu.

Örnek : Kütlesi m olan bir sandık, eğim açısı θ olan sürtünmesiz eğik bir düzlem üzerinden serbest bırakılıyor.

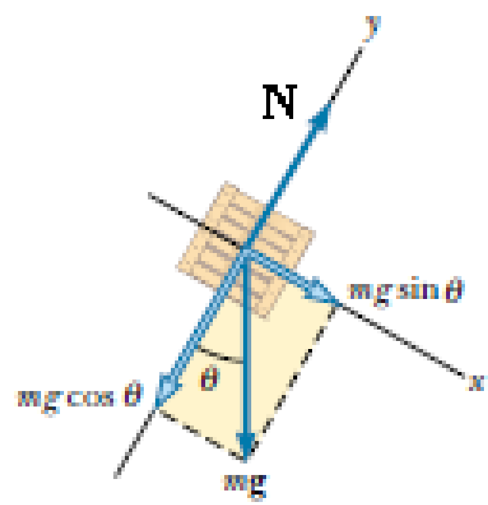
$a-$) Sandığın ivmesini bulunuz.

$b-$) Sandık eğik düzlemin tabanına ne kadar sürede ulaşır ve bu anda hızı ne olur?



$a-$) $\sum F_x = mg\sin\theta = ma_x \quad \rightarrow \quad a_x = g\sin\theta$

$$\sum F_y = N - mg\cos\theta = 0$$



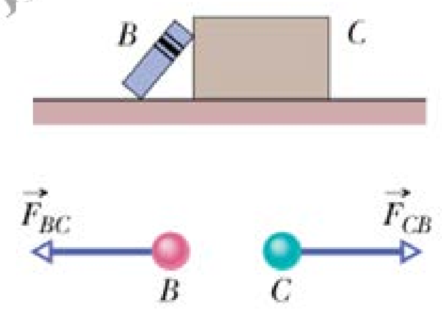
$b-$) $x - x_0 = \frac{1}{2}a_x t^2 \quad \rightarrow \quad t = \sqrt{\frac{2d}{g\sin\theta}}$ bulunur.

$v_s^2 = v_i^2 + 2a_x\Delta x \quad \rightarrow \quad v_s = \sqrt{2g\sin\theta d}$ olur.

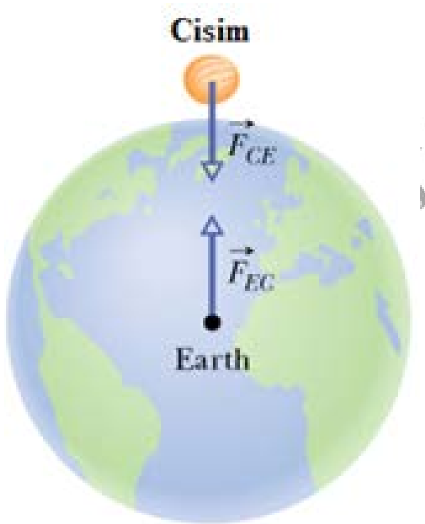
Newton'un Üçüncü Yasası: Etki-Tepki Yasası

İki cisim arasındaki etkileşme kuvvetlerinin büyüklükleri aynı, doğrultuları ters yöndedir.

Şekildeki gibi C bloğuna yaslanmış bir B cismi düşünelim.
C bloğunun B cismine uyguladığı kuvveti $\vec{F}_{BC}$, benzer şekilde
B cisminin C bloğuna uyguladığı kuvveti de $\vec{F}_{CB}$ ile gösterelim.



Newton' un üçüncü yasası gereği, $\vec{F}_{BC} = -\vec{F}_{CB}$ olur.



İkinci bir örnek ise yandaki şekilde verilmiştir.
Newton' un üçüncü yasası gereği,
$\vec{F}_{CE} = -\vec{F}_{EC}$ olur.

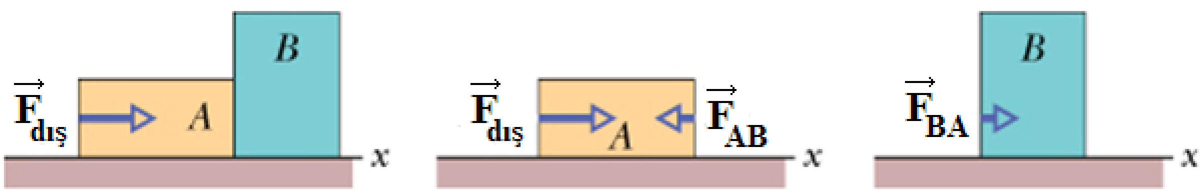
Newton Yasalarının Uygulanması/Serbest-Cisim Diyagramları:

Newton yasalarını uygulayarak mekanik problemlerinin çözümü serbest-cisim diyagramını çizmekle başlar.

Bu, incelenen sistem bir bütün olarak veya her cisim için ayrı ayrı yapılır.

Daha sonra her cisim için uygun bir koordinat sistemi seçilir.

Aşağıda verilen örneği gözönüne alalım. Sürtünmesiz bir sistem A ve B gibi iki blok ve A bloğuna etkiyen bir $\vec{F}_{\text{dış}}$ kuvveti içermektedir.



Şöyle "sistem" ler düşünebiliriz:

a. Sistem = blok A + block B. Yatay kuvvet $\vec{F}_{\text{dış}}$.

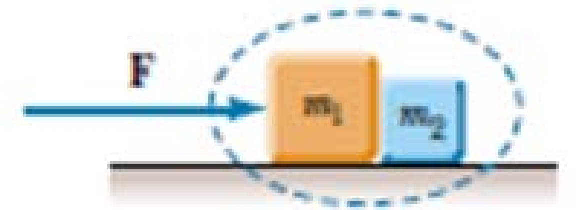
b. System = blok A. Cisme etkiyen iki yatay kuvvet vardır: $\vec{F}_{\text{dış}}$ ve $\vec{F}_{AB}$.

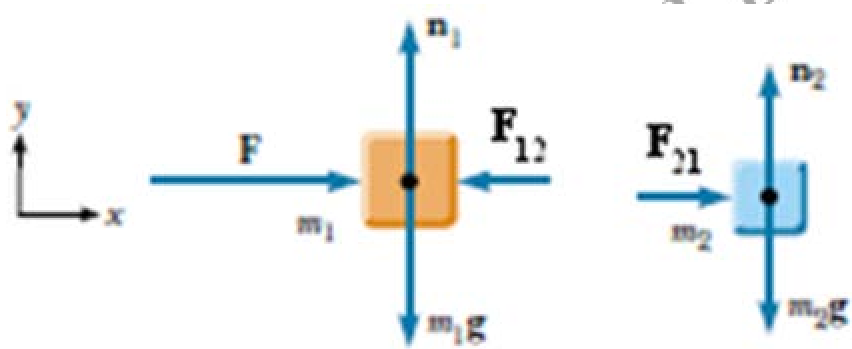
c. System = blok B. Cisme etkiyen yatay kuvvet $\vec{F}_{BA}$.

Örnek : Kütleleri m_1 ve m_2 olan iki blok yatay sürtünmesiz bir düzlemde temas halindedir. m_1 kütlesine sabit bir F kuvveti uygulanıyor.

a–) Blok sisteminin ivmesini bulunuz.

b–) Bloklar arasındaki temas kuvvetini bulunuz.



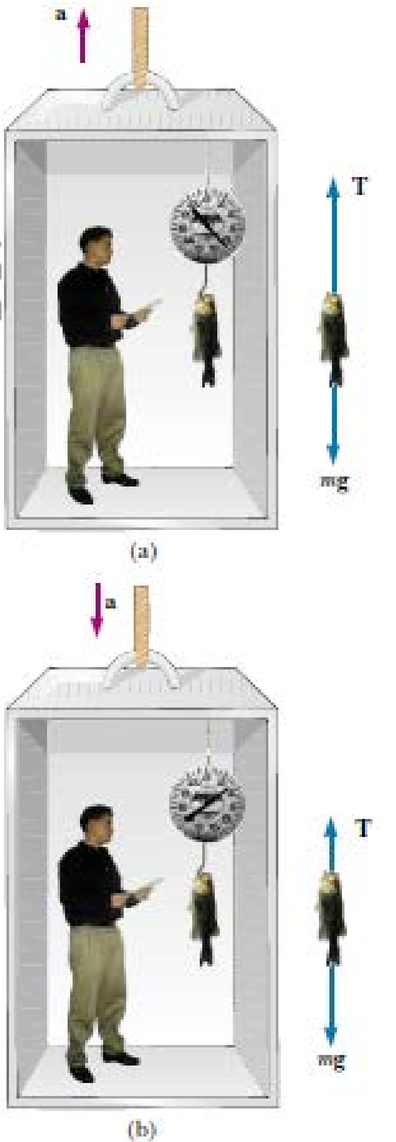


$$a\text{–)}\quad \sum F_x(sistem) = F = (m_1 + m_2)a_x \quad \rightarrow \quad a_x = \frac{F}{m_1 + m_2}$$

b–) m_2 bloğu için Newton' un ikinci yasasından:

$$\sum F_x = F_{21} = m_2 a_x \quad \rightarrow \quad F_{21} = \frac{m_2}{m_1 + m_2} F = F_{12} \text{ bulunur.}$$

Örnek : Bir kişi elindeki *m* kütleli balığı asansörün içinde tavana asılı yaylı bir terazi ile tartmak istiyor. Asansör ister yukarı ister aşağı doğru ivmelensin, balığın gerçek kütlesinden daha farklı bir değer ölçer. İspatlayınız.



Asansör yukarı doğru ivmelensin:

$$\sum F_y = T - mg = ma \;\rightarrow\; T = m(g+a)$$

Asansör aşağı doğru ivmelensin:

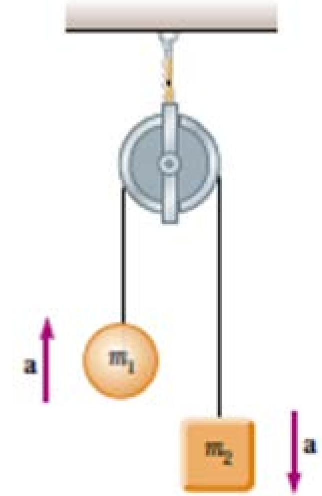
$$\sum F_y = T - mg = -ma \;\rightarrow\; T = m(g-a)$$

Asansör sabit hızla hareket etsin:

$$\sum F_y = T - mg = 0 \;\rightarrow\; T = mg$$

Görüldüğü gibi, ivmeli hareket durumunda balığın ağırlığı (T), gerçek ağırlığından farklı ölçülür.

Örnek : Kütleleri farklı iki cisim, ağırlığı ihmal edilebilir sürtünmesiz bir makara üzerinden bir iple şekildeki gibi asılmıştır. Bu sisteme "**Atwood düzeneği**" diyoruz. Sistem serbest bırakıldığında, kütlelerin ivmesi ve ipteki gerilme kuvveti ne olur?

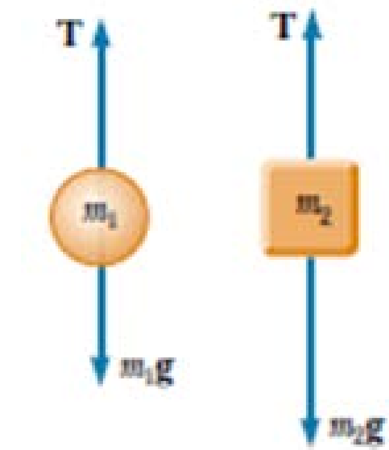


$m_2 > m_1$ olduğunu kabul edelim:

m_1 ve m_2 için Newton' un ikinci yasası, sırasıyla:

$$\sum F_y = T - m_1 g = m_1 a \qquad \text{(Eş-1)}$$

$$\sum F_y = T - m_2 g = -m_2 a \qquad \text{(Eş-2)}$$

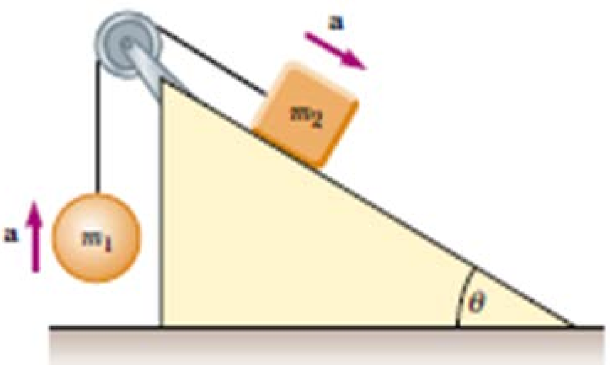


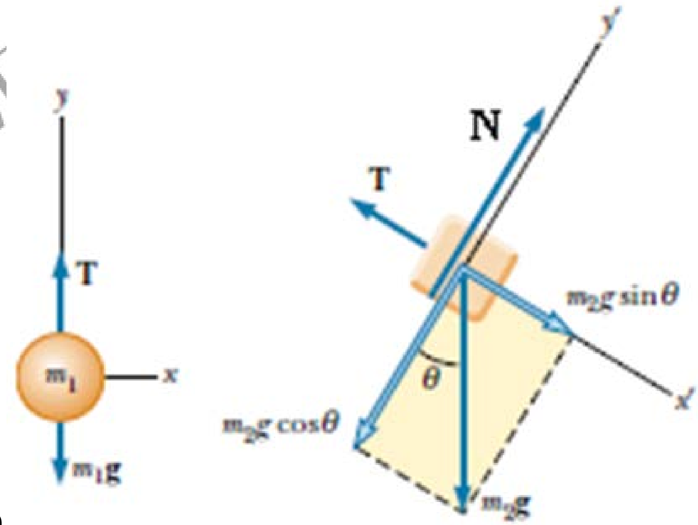
Bu iki denklemden T' yi yok edersek ivme,

$a = \left(\dfrac{m_2 - m_1}{m_2 + m_1}\right) g$ bulunur. Bunu da Eş-1' de yerine koyarsak,

$$T = m_1\left(a + g\right) = m_1\left(\frac{m_2 - m_1}{m_2 + m_1} + 1\right) g = \left(\frac{2m_1 m_2}{m_2 + m_1}\right) g \text{ bulunur.}$$

Örnek : Kütleleri m_1 ve m_2 olan iki blok, sürtünmesiz ve ağırlıksız bir makara üzerinden ağırlıksız bir iple birbirine bağlıdır. m_2 bloğu, eğim açısı θ olan sürtünmesiz eğik düzlem üzerindedir. Sistem serbest bırakıldığınd m_2 bloğu eğik düzlemden aşağıya doğru kaydığına göre, hareketin ivmesini ve ipte oluşan gerilme kuvvetini bulunuz.





m_1 ve m_2 için Newton' un ikinci yasası, sırasıyla:

$$\sum F_y = T - m_1 g = m_1 a \qquad \text{(Eş-1)}$$

$$\sum F_{x'} = m_2 g \sin\theta - T = m_2 a \qquad \text{(Eş-2)}$$

$$\sum F_{y'} = N - m_2 g \cos\theta = 0 \qquad \text{(Eş-3)}$$

Eş-1 ve Eş-2 denklemlerinden T' yi yok edersek ivme,

$$a = \left(\frac{m_2 \sin\theta - m_1}{m_2 + m_1} \right) g \quad \text{bulunur.}$$

Bunu da Eş-1' de yerine koyarsak, $T = \dfrac{m_1 m_2 (1 + \sin\theta)}{m_2 + m_1} g$ bulunur.

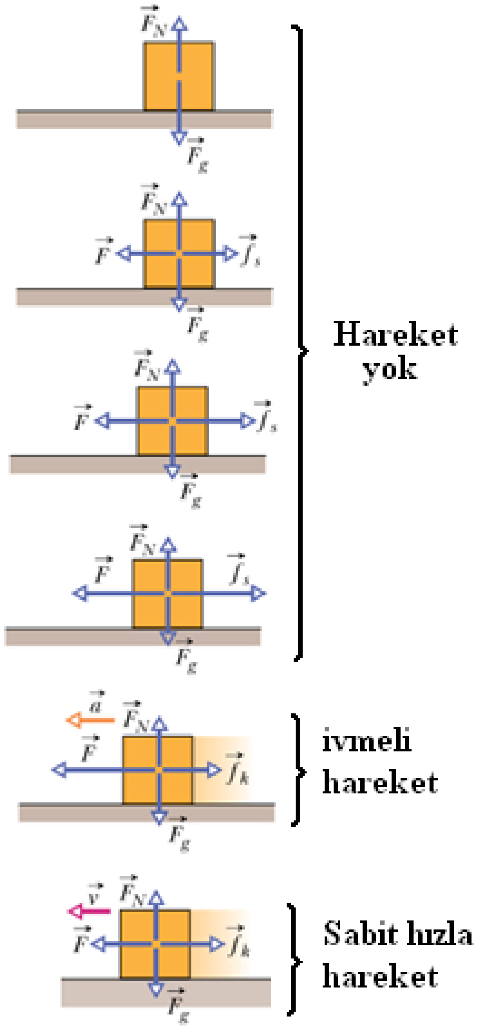
BÖLÜM-6
Kuvvet ve Hareket-II

Bu bölüm kapsamındaki temel amaçlarımızı şöyle sıralayabiliriz:

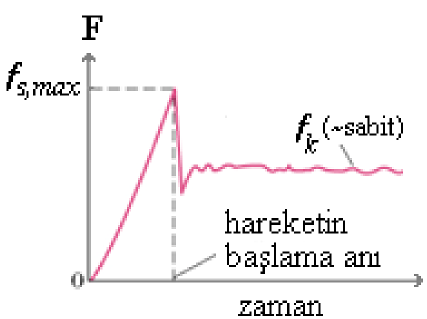
- **İki cisim arasındaki sürtünme kuvvetini tanımlamak.**
- **Statik ve kinetik sürtünme kuvvetlerini anlamak ve bunların özelliklerini öğrenmek.**
- **Statik ve kinetik sürtünme katsayılarını tanımlamak.**
- **Merkezcil kuvvet açısından düzgün dairesel harekete tekrar bakmak.**

Sürtünme : Yatay zeminde duran bir sandık düşünelim. Sandığı sola doğru artan bir kuvvetle çekelim. Sandık hareket etmediği sürece, temas yüzeyinde, uyguladığımız $\vec{F}$ kuvvetini dengeleyen bir $\vec{f}_s$ kuvveti oluşur. Bu kuvvet "statik sürtünme kuvveti" olarak tanımlanır.

Uygulanan F kuvveti arttıkça, f_s kuvveti de artar.



Uygulanan F kuvveti belli bir eşik değere ulaştığında, hareket başlar ve sandık sola doğru ivmelenir. Sandık harekete başladıktan sonra, sandıkla zemin arasındaki kuvvet artık "kinetik sürtünme kuvveti" dir ve $\vec{f}_k$ ile gösterilir ($f_k < f_s$).

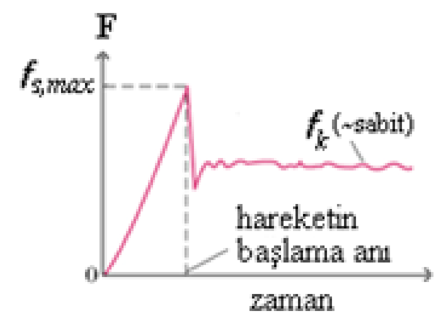


Sandığın sabit bir hızla harekete devam etmesini istiyorsak, uyguladığımız F kuvvetini f_k' yı dengeleyecek şekilde düşürmemiz gerekecektir.

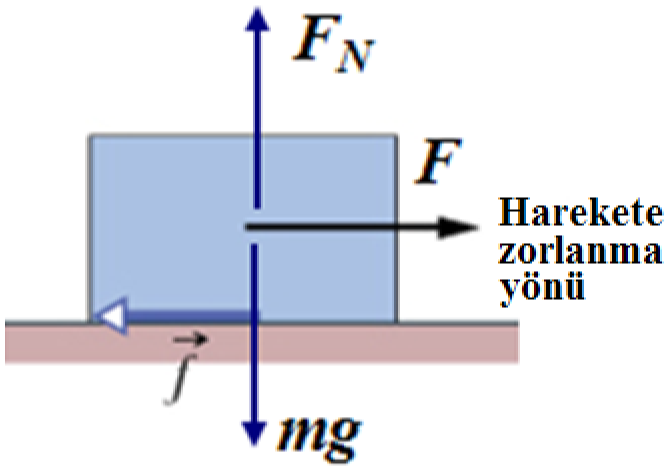
Sürtünmenin Kuvvetinin Özellikleri :

Özellik - 1 : Temas eden iki yüzey birbirlerine göre hareketli değillerse, statik sürtünme kuvveti $\vec{f}_s$, uygulanan $\vec{F}$ kuvvetini dengeler.

Özellik - 2 : Statik sürtünme kuvveti f_s' nin büyüklüğü sabit değildir.
0' dan $f_{s,\max} = \mu_s F_N$ değerine kadar değişir.
Burada, μ_s statik sürtünme katsayısıdır.
Uygulanan F kuvveti, $f_{s,\max}$ kuvvetini aştığı anda sandık harekete başlar.



Özellik - 3 : Sandık harekete başladıktan sonra, sürtünme kuvveti artık "kinetik sürtünme kuvveti" $\vec{f}_k$' dır ve büyüklüğü $f_k = \mu_k F_N$ eşitliği ile verilir. Burada μ_k kinetik sürtünme katsayısıdır.



$$\boxed{f_{s,\max} = \mu_s F_N}$$

$$\boxed{0 < f_s \leq \mu_s F_N}$$

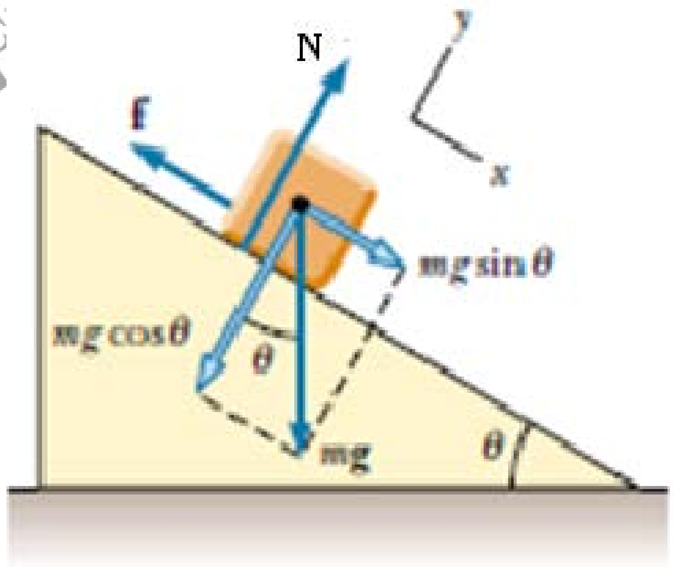
$$\boxed{f_k = \mu_k F_N}$$

Not - 1 : Statik ve kinetik sürtünme kuvvetleri temas yüzeyine paraleldir.

- Kinetik sürtünme kuvveti harekete ters yöndedir.
- Statik sürtünme kuvveti kayma eğiliminin tersi yönündedir.

Not - 2 : Kinetik sürtünme katsayısı μ_k, hareket eden cismin hızına bağlı değildir.

Örnek : m kütleli bir blok sürtünmeli eğik bir düzlem üzerindedir. Eğim açısı θ, blok hareket edinceye kadar artırılabiliyor. Bloğun kaymaya başladığı kritik açı θ_k olduğuna göre, zeminle blok arasındaki statik sürtünme katsayısı μ_s nedir?



Kritik durumda
(kayma başlamadan hemen önce):

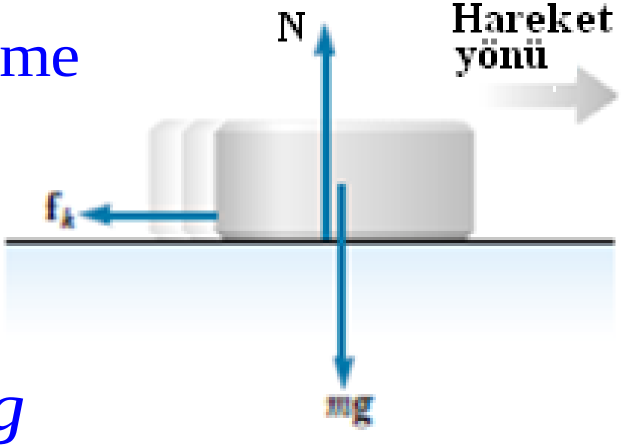
$$\sum F_x = mg\sin\theta - f_s = ma_x = 0$$

$$\sum F_y = N - mg\cos\theta = ma_y = 0$$

$$f_s = mg\sin\theta = \left(\frac{N}{\cos\theta}\right)\sin\theta = N\tan\theta$$

$$f_{s,max} = N\tan\theta_k = \mu_s N \;\rightarrow\; \mu_s = \tan\theta_k$$

Örnek : Donmuş bir gölet üzerinde, bir buz hokeyi diskine 20 m/s' lik bir ilk hız veriliyor. Disk, buz üzerinde 115 m yol aldıktan sonra durduğuna göre, zeminle hokey diski arasındaki kinetik sürtünme kaysayısı μ_k nedir?



$$\sum F_y = N - mg = ma_y = 0 \rightarrow N = mg$$

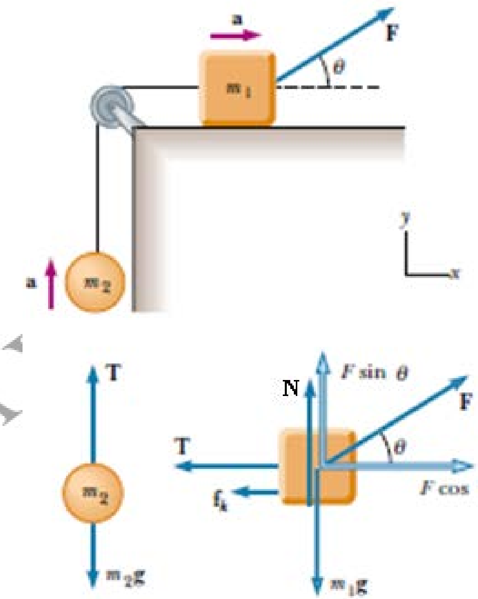
$$\sum F_x = -f_k = ma_x$$

$$f_k = \mu_k N = \mu_k mg \rightarrow a_x = -\mu_k g$$

$$v_s^2 = v_i^2 + 2a_x \Delta x \rightarrow a_x = -\frac{20^2}{2(115)} = -\frac{40}{23}$$

$$a_x = -\mu_k g = -\mu_k (9.8) \rightarrow \mu_k = 0.177$$

Örnek : Pürüzlü bir yüzey üzerindeki m_1 kütleli blok, hafif bir iple sürtünmesiz ve kütlesi ihmal edilebilir bir makara üzerinden m_2 kütleli küresel cisme bağlanmıştır. m_1 bloğuna şekildeki gibi yatayla θ açısı yapan bir F kuvveti uygulanıyor. Blok ile zemin arasındaki kinetik sürtünme katsayısı μ_k ise, sistemin ivmesini bulunuz.



$$m_1 \text{ bloğu: } \sum F_x = F\cos\theta - T - f_k = m_1 a \qquad (1)$$

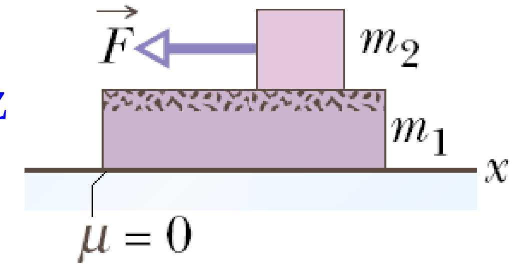
$$\sum F_y = N + F\sin\theta - m_1 g = 0 \rightarrow N = m_1 g - F\sin\theta$$

$$f_k = \mu_k N = \mu_k\left(m_1 g - F\sin\theta\right)$$

$$m_2 \text{ bloğu: } \sum F_y = T - m_2 g = m_2 a$$

Bu ifadeleri (1) denkleminde yerine koyarsak, $a = \dfrac{F(\cos\theta + \mu_k \sin\theta) - g(m_2 + \mu_k m_1)}{(m_2 + m_1)}$

Örnek : Kütlesi 40 kg olan bir kalas sürtünmesiz yatay düzlemde, üzerinde 10 kg' lık blok ile birlikte hareketsiz durmaktadır. Blok ile kalas arasındaki statik ve kinetik sürtünme katsayıları sırasıyla 0.6 ve 0.4' tür. Bloğa 100 N' luk bir $\vec{F}$ kuvveti şekildeki gibi uygulanmaktadır. Bloğun ve kalasın ivmelerini bulunuz.

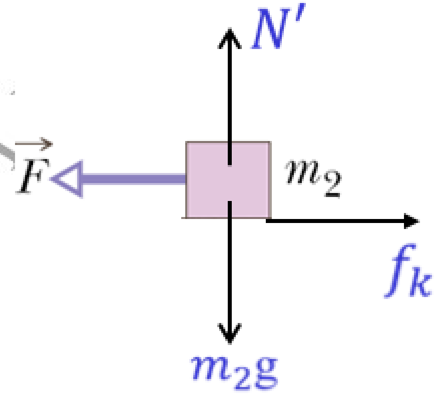


Eğer iki kütle arasındaki sürtünme kuvvetinin maksimum değeri 100 N' dan küçük ise m_2 bloğu kalas üzerinde sola doğru hareket edecektir.

$$f_{s,\max} = \mu_s N' = \mu_s m_2 g = 0.6(10)(9.8) = 58.8 \text{ N}$$

$F > f_{s,\max}$ olduğuna göre, iki kütle arasındaki sürtünme kuvveti kinetiktir.

Şimdi herbir kütlenin serbest cisim diyagramını çizerek hareketlerini inceleyelim:



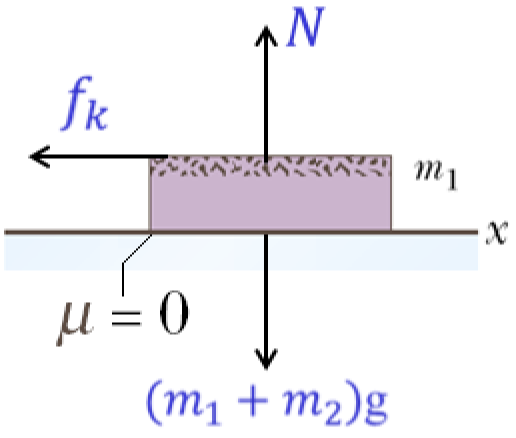
m_2 bloğu:

$$N' = m_2 g = 10 * 9.8 = 98\ N$$

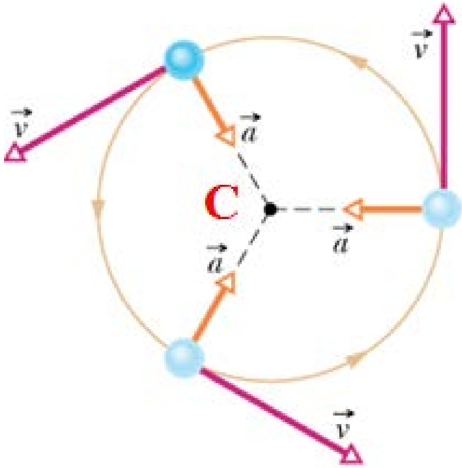
$$f_k = \mu_k N' = 0.4 * 9.8 = 39.2\ N$$

$$F - f_k = m_2 a_2 \quad \Rightarrow \quad a_2 = \frac{100 - 39.2}{10} = \frac{60.8}{10} = 6.08\ m/s^2$$

m_1 kalası:



$$f_k = m_1 a_1 \quad \Rightarrow \quad a_1 = \frac{39.2}{40} = 0.98\ m/s^2$$



Düzgün Dairesel Hareket, Merkezcil Kuvvet:

Düzgün dairesel hareket yapan bir cismin herhangi bir andaki ivmesinin büyüklüğü

$$a = v^2/r$$

dir ve dairenin merkezine doğrudur.

Newton' nun ikinci yasasına göre cisme etki eden kuvvet de dairenin merkezine doğrudur ve büyüklüğü

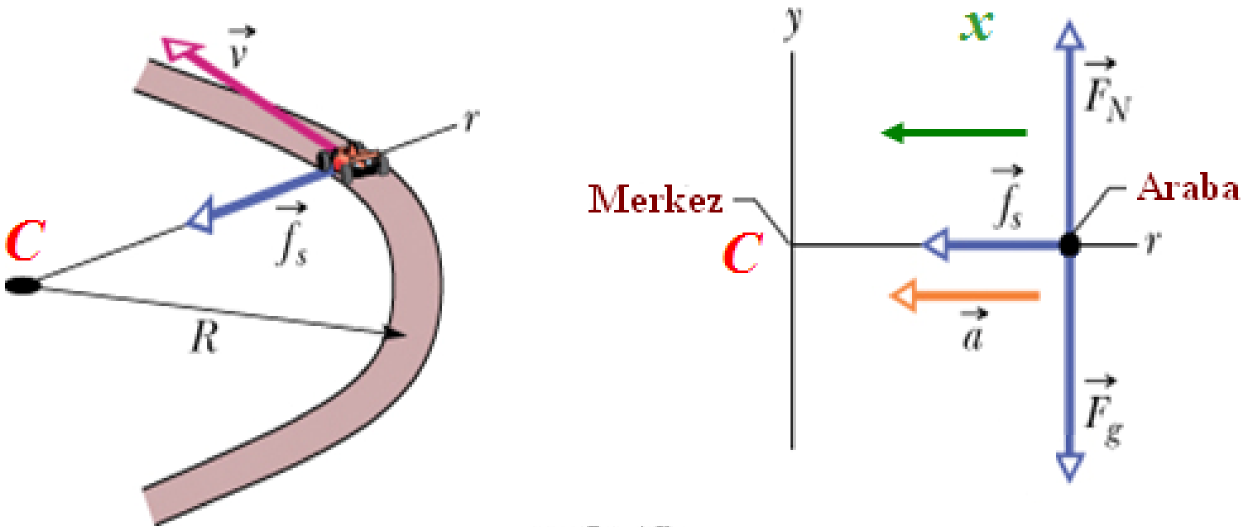
$$\boxed{F = m\frac{v^2}{r}}$$

ifadesi ile verilir. Bu kuvvete "**merkezcil kuvvet**" diyoruz.

Merkezcil kuvvet yeni bir kuvvet değildir, C noktası etrafında dönen cisme etkiyen **net kuvvettir**.

Duruma göre merkezcil kuvvet bazen sürtünme, bazen normal, bazen de yer-çekimi kuvveti olabilir.

Örnek: Kütlesi *m* olan bir yarış arabası düz (yatay) bir yolda R yarıçaplı bir virajı *v* hızıyla dönmek istiyor. Araba ile yol arasındaki sürtünme kuvvetini belirleyiniz.



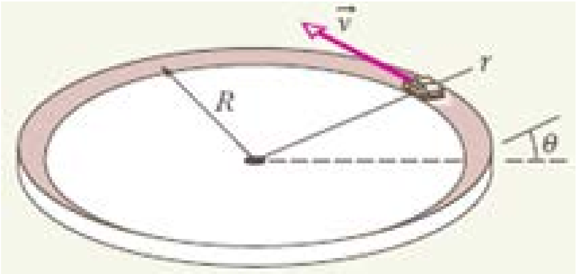
Arabanın serbest-cisim diyagramı çizilirse, virajın merkezine doğru olan net kuvvetin statik sürtünme kuvveti f_s olduğu görülür. Dolayısıyla, statik sürtünme kuvveti f_s merkezcildir. Arabanın virajdan savrulmadan dönmesini sağlar.

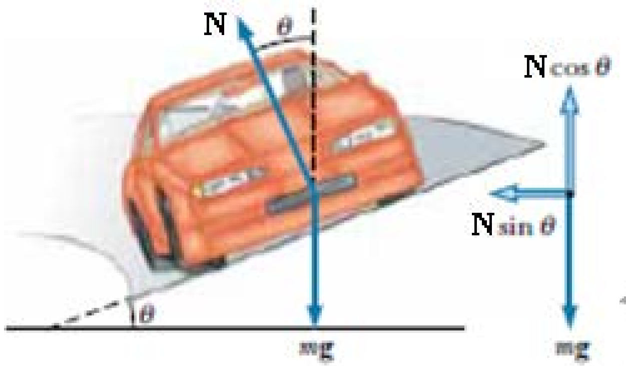
$$F_{net,r} = f_s = \frac{mv^2}{R}$$

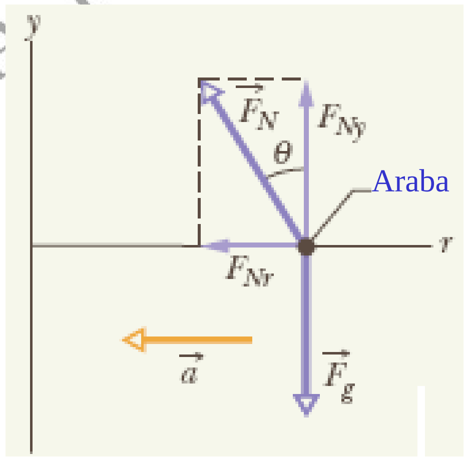
(6-11)

Örnek : Eğimli viraj :

Tamamen buzla kaplı (sürtünmesiz), 50 m yarıçaplı bir viraji 13.4 m/s hızla geçmek için, yolun eğim açısı kaç derece olmalıdır?







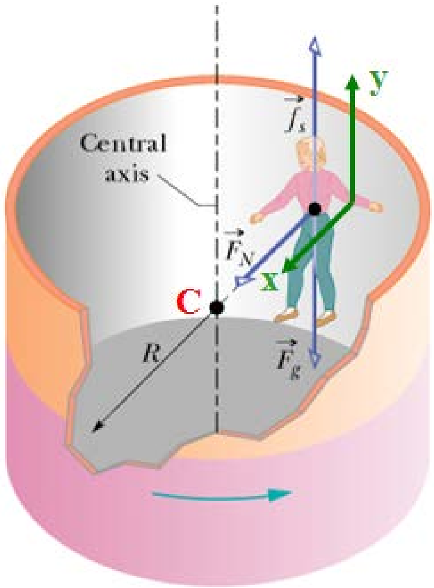
$$\sum F_r = N\sin\theta = \frac{mv^2}{R} \quad (1)$$

$$\sum F_y = N\cos\theta - mg = 0 \;\rightarrow\; N\cos\theta = mg \quad (2)$$

(1) ve (2) denklemlerinden N' yi yok edersek,

$$\tan\theta = \frac{v^2}{gR} = \frac{(13.4)^2}{(9.8)(50)} \cong 0.37 \;\rightarrow\; \theta = 20.1^{o}$$

bulunur.



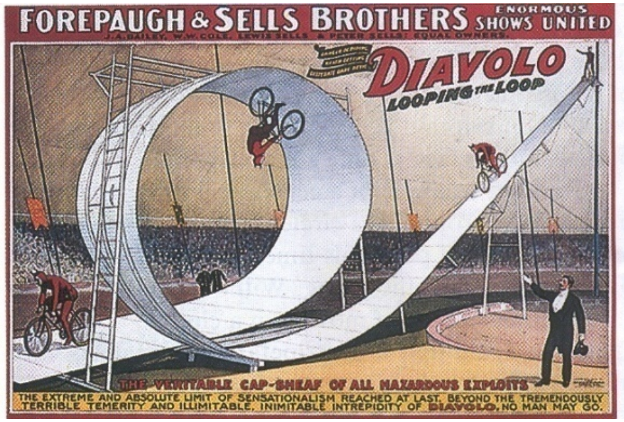
Örnek: Rotor, ekseni etrafında *v* hızıyla dönen *R* yarıçaplı içi boş bir silindirdir. Kütlesi *m* olan bir çocuk, sırtı silindirin iç duvarına yaslanmış bir şekilde ayaktadır. Silindir dönmeye başlıyor ve önceden belirlenmiş bir hız değerine ulaştığında, silindirin tabanı aniden düşmesine rağmen, çocuk silindir duvarında tutulu kalmaktadır. Rotor duvarıyla çocuk arasındaki statik sürtünme katsayısı μ_s olduğuna göre, Rotor' un minimum hızı ne olmalıdır.

Çocuk için serbest-cisim diyagramı çizilirse, normal kuvvet F_N' nin merkezcil kuvvet olduğu görülür.

$$F_{x,\text{net}} = F_N = ma = \frac{mv^2}{R} \qquad \text{(Eş-1)}$$

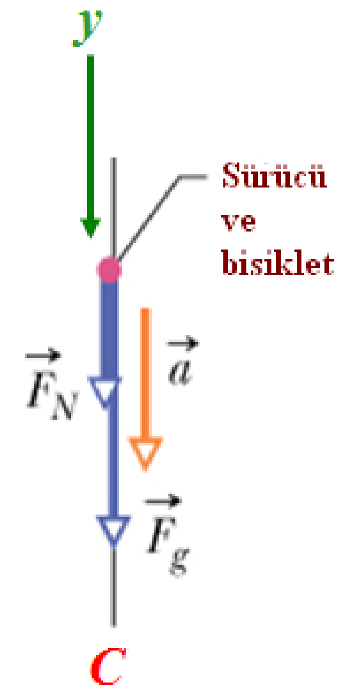
$$F_{y,\text{net}} = f_s - mg = 0, \qquad f_s = \mu_s F_N \Rightarrow mg = \mu_s F_N \quad \text{(Eş-2)}$$

Eş-1 ve Eş-2 birleştirilirse, $mg = \mu_s \dfrac{mv^2}{R} \Rightarrow v^2 = \dfrac{Rg}{\mu_s} \Rightarrow v_{\min} = \sqrt{\dfrac{Rg}{\mu_s}}$ bulunur.



Örnek: Çember şeklindeki platformun yarıçapı *R*' dir. Platformun en tepesinde sürücünün düşmemesi için o andaki *v* hızı ne olmalıdır?

Sürücü platformun tepesinde iken serbest-cisim diyagramını çizersek, sürücüye etki eden yer-çekimi kuvveti F_g ve normal kuvvet F_N aşağı yöndedir.

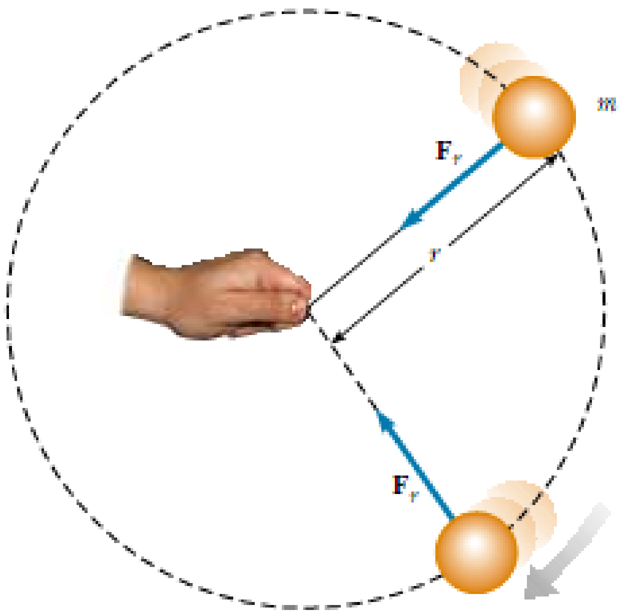


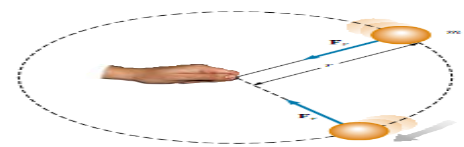
O noktada sürücünün minimum hıza sahip olması durumunda, platformla teması kesilir ve $F_N = 0$ olur. Böylece, sürücüye etki eden tek kuvvet F_g' dir ve merkezcildir. Bu durumda,

$$F_{net,y} = mg = \frac{mv_{\min}^2}{R} \rightarrow v_{\min} = \sqrt{Rg}$$

bulunur.

Örnek : Kütlesi 0.5 kg olan bir taş, 1.5 m uzunluğundaki bir ipin ucuna bağlanmış ve yatay bir düzlemde döndürülmektedir. Taşın bağlı olduğu ip en fazla 50 N' luk bir kuvvete dayanabildiğine göre, ipin kopmadan hemen önceki hızı ne olur?





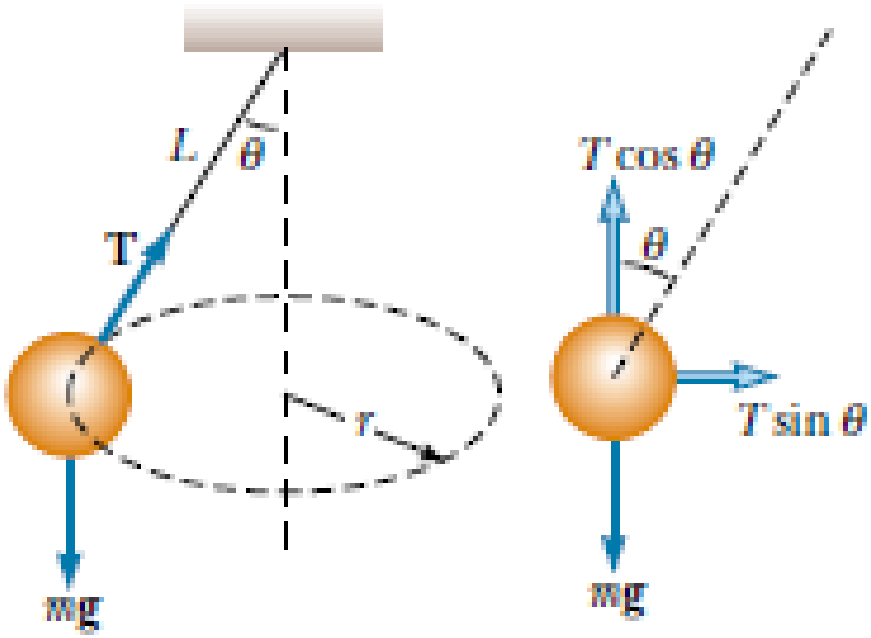
$$T = \frac{mv^2}{r} \quad \rightarrow \quad v_{max} = \sqrt{\frac{rT_{max}}{m}} = \sqrt{\frac{1.5(50)}{0.5}} = 12.2 \text{ m/s}$$

Örnek : Kütlesi m olan bir cisim L uzunluğundaki bir ipin ucunda şekildeki gibi yatayda r yarıçaplı çembersel bir yörüngede v hızı ile dönmektedir (Konik sarkaç). Cismin hızını bilinen nicelikler cinsinden ifade ediniz.

$$T\cos\theta = mg$$

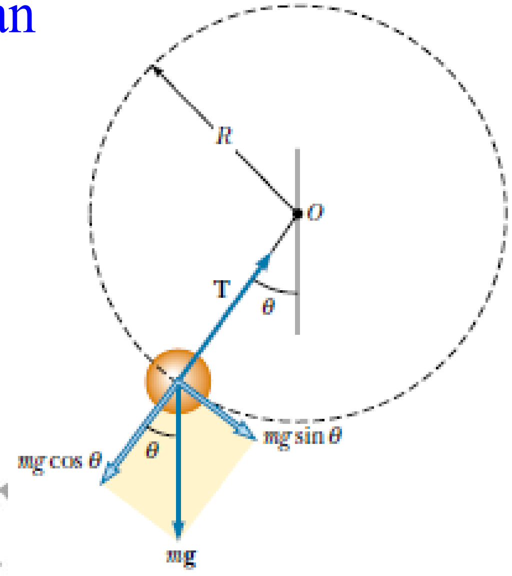
$$\underbrace{T\sin\theta = \frac{mv^2}{r}}$$

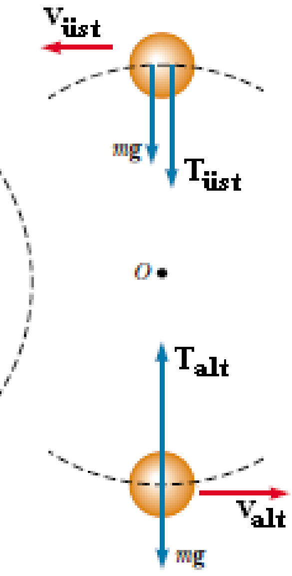
$$\tan\theta = \frac{v^2}{gr}$$



$$v = \sqrt{gr\tan\theta} = \sqrt{gL\sin\theta\tan\theta}$$

Örnek : Kütlesi *m* olan bir cisim uzunluğu *R* olan bir ipin ucunda, şekildeki gibi düşey düzlemde *O* noktası etrafında dönmektedir. İpin düşeyle θ açısı yaptığı bir anda cismin hızı *v* ise, ipteki gerilme kuvveti ne olur?





Teğetsel kuvvet

$$\sum F_t = mg\sin\theta = ma_t \rightarrow a_t = g\sin\theta$$ (hızdaki değişimin kaynağı)

$$\sum F_r = T - mg\cos\theta = ma_r \rightarrow T = m\left(\frac{v^2}{R} + g\cos\theta\right)$$

Radyal kuvvet

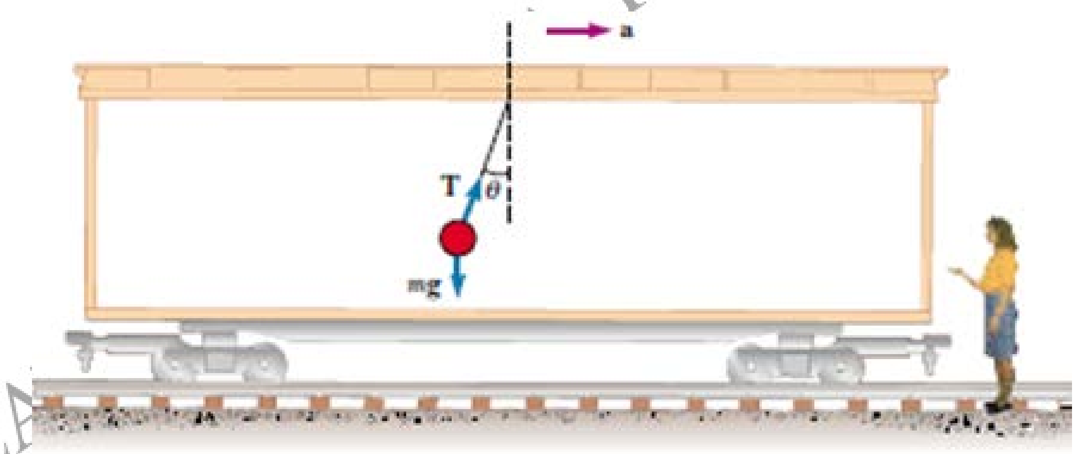
Üst noktada $(\theta = 180^{\circ}) \rightarrow T_{üst} = m\left(\dfrac{v^2}{R} - g\right)$

Alt noktada $(\theta = 0^{\circ}) \rightarrow T_{alt} = m\left(\dfrac{v^2}{R} + g\right)$

Örnek : Kütlesi m olan bir cisim, sağa doğru ivmeli hareket yapan bir yük vagonunun içinde tavana asılıdır.

a–) Vagonun dışındaki durgun bir gözlemciye göre aracın ivmesi nedir?

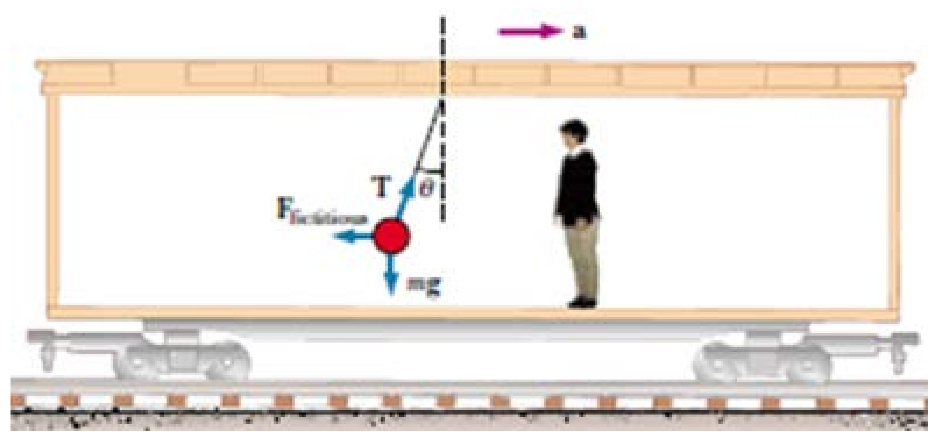
b–) Vagonun içindeki bir gözlemciye göre durumu inceleyiniz?



$$a\text{–)}\ \sum F_x = T\sin\theta = ma$$

$$\sum F_y = T\cos\theta = mg$$

$$a = g\tan\theta$$



$$b\text{–)}\ \sum F'_x = T\sin\theta - f_{hayali} = 0$$

$$\sum F'_y = T\cos\theta = mg$$

$$f_{hayali} = mg\tan\theta = ma$$

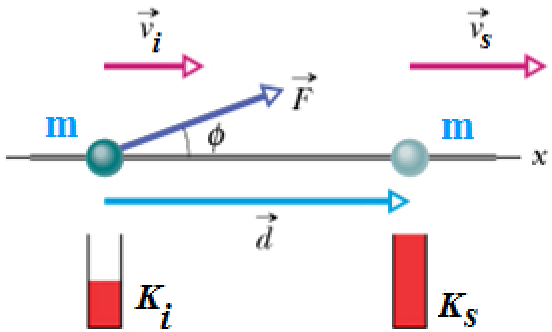
BÖLÜM-7
Kinetik Enerji ve İş

Bu bölümde şu konulara değineceğiz:

- **Hareket eden bir cismin kinetik enerjisi**
- **Bir kuvvetin yaptığı iş**
- **Güç**

Ek olarak, iş-kinetik enerji teoremini öğrenip değişik problemler çözeceğiz.

Hız ve ivme gibi vektörel nicelikler yerine iş ve kinetik enerji gibi skaler nicelikleri kullanarak problemleri çözeceğimiz için, bu yöntemle işlemler daha kolay olacaktır.



Kinetik Energy:

Bir cismin hızından dolayı sahip olduğu enerjidir. Hızı *v*, kütlesi *m* olan bir cismin kinetik enerjisi şu ifadeye sahiptir:

$$\boxed{K = \frac{1}{2} m v^2}$$

SI sistemindeki birimi
kg.m²/s² = joule
ve sembolik olarak **J** ile gösterilir.

Kütlesi m = 1 kg olan bir cisim v = 1 m/s hızına sahipse, kinetik enerjisi K=0,5 J' dür.

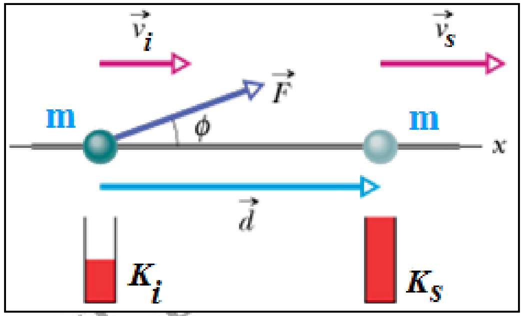
İş (*W*): Kütlesi m olan bir cisme bir ***F*** kuvveti uygulandığında cisim ivmelenir ve hızını (v) dolayısıyla da kinetik enerjisini (K) artırabilir veya azaltabilir.

Cismin kinetik enerjisindeki değişim miktarı, ***F*** kuvveti tarafından cisme aktarılan veya cisimden dışarıya alınan enerji (W) kadardır.

Cisme enerji aktarılmışsa W pozitiftir ($W > 0$) ve ***F*** kuvveti cisim üzerinde pozitif iş yapmıştır denir.

Aksine, cisimden dışarıya enerji alınmışsa W negatiftir ($W < 0$) ve ***F*** kuvveti cisim üzerinde negatif iş yapmıştır denir.

İş :



Şekilde kütlesi m olan cisim sürtünmesiz bir yüzeyde x-ekseni yönünde hareket edebilmektedir.

Cisme yatayla ϕ açısı yapacak şekilde bir $\vec{F}$ kuvveti uygulanıyor.

Newton' un ikinci yasası gereği: $F_x = ma_x$ ' dır. Cismin başlangıçtaki hızının $\vec{v}_0$ ve $\vec{d}$ kadarlık bir yer-değiştirme sonundaki hızının da $\vec{v}$ olduğunu varsayalım.

Kinematiğin üçüncü denklemi: $v^2 = v_0^2 + 2a_x d$ eşitliğinden,

$$\left(\frac{m}{2}\right)v^2 - \left(\frac{m}{2}\right)v_0^2 = \left(\frac{m}{2}\right)2a_x d = \frac{m}{2}2\frac{F_x}{m}d = F_x d = \left(F\cos\phi\right)d$$

$$K_i = \frac{1}{2}mv_0^2 \; ; K_s = \frac{1}{2}mv_s^2 \;\rightarrow\; \Delta K = K_s - K_i = Fd\cos\varphi$$

$$W = \Delta K \quad \rightarrow \quad W = Fd\cos\varphi \quad \rightarrow \quad W = \vec{F}\cdot\vec{d}$$

İşin birimi, kinetik enerjinin birimiyle aynıdır (J).

Not - 1 : İş için bulunan bağıntıyı, ***F*** kuvvetinin sabit olduğu durum için türettik.

Not - 2 : Cismin noktasal olduğunu kabul ettik.

Not - 3 : $0 < \phi < 90° \Rightarrow W > 0 \quad ; \quad 90° < \phi < 180° \rightarrow W < 0$

NET İŞ : Cisme birden fazla kuvvet etkiyorsa (örneğin $\vec{F}_A, \vec{F}_B$ ve $\vec{F}_C$), net iş (W_{net})' in hesaplanması:

Yol - 1 : Herbir kuvvetin yaptığı işler (W_A, W_B ve W_C) ayrı ayrı hesaplanır ve sonra da toplanır ($W_{\text{net}} = W_A + W_B + W_C$).

Yol - 2 : Cisim üzerine etki eden net kuvvet ($\vec{F}_{\text{net}} = \vec{F}_A + \vec{F}_B + \vec{F}_C$) bulunur ve sonra da net kuvvetin yaptığı iş hesaplanır ($W_{\text{net}} = \vec{F}_{\text{net}} \cdot \vec{d}$).

Örnek : *xy*-düzlemindeki bir cisim $\vec{F} = 5.0\hat{\mathrm{i}} + 2.0\hat{\mathrm{j}}$ (N) kuvvetinin etkisiyle $\vec{d} = 2.0\hat{\mathrm{i}} + 3.0\hat{\mathrm{j}}$ (m) ile verilen bir yer-değiştirme yapıyor.

a–) Kuvvetin yaptığı işi

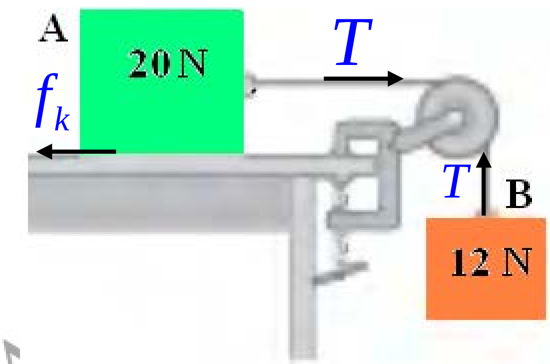
b–) Kuvvetle yer-değiştirme vektörü arasındaki açıyı bulunuz.

$$a\text{–)}\ \mathrm{W} = \vec{F} \cdot \vec{d} = (5.0) * (2.0) + (2.0) * (3.0) = 16\ \mathrm{J}$$

$$b\text{–)}\ \vec{F} \cdot \vec{d} = Fd\cos\theta = \sqrt{29} * \sqrt{13} * \cos\theta$$

$$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{16}{\sqrt{377}}\right) = 35^{\mathrm{o}}$$

Örnek : İki blok hafif bir iple, sürtünmesiz ve ağırlıksız bir makara üzerinden birbirlerine bağlanmıştır. Sistem serbest bırakıldığında, bloklar sabit hızla hareket etmektedirler.



A bloğu sağa doğru, *B* bloğu aşağı doğru 75 cm hareket ettiğinde, bloklara etkiyen kuvvetlerin yaptıkları işleri bulunuz.

Hız sabit ise ivme sıfırdır.

$$\left.\begin{array}{l}\text{Blok } A\text{: } \sum F_x = T - f_k = 0 \\ \text{Blok } B\text{: } \sum F_y = T - 12 = 0\end{array}\right\} T = f_k = 12\text{N}$$

Blok A: $W_{\mathrm{T}} = 12 * (0.75) * \cos(0) = 9 \text{ J}$; $W_{f_k} = 12 * (0.75) * \cos(\pi) = -9 \text{ J}$

$W_{\mathrm{mg}} = 20 * (0.75) * \cos(\pi/2) = 0$; $W_{\mathrm{N}} = 20 * (0.75) * \cos(\pi/2) = 0$

Blok B: $W_{\mathrm{T}} = 12 * (0.75) * \cos(\pi) = -9 \text{ J}$; $W_{\mathrm{mg}} = 12 * (0.75) * \cos(0) = 9 \text{ J}$

Not: Her iki blokta sabit hızla hareket ettiği için, her iki blok üzerine etki eden kuvvetlerin yaptığı net iş=0' dır.

İş - Kinetik Enerji Teoremi :

Bir cisim üzerine yapılan net işin $W_{\text{net}} = K_s - K_i$ olduğunu daha önce bulmuştuk.

Kinetik enerjideki değişimin de $\Delta K = K_s - K_i$ olduğu dikkate alınırsa,

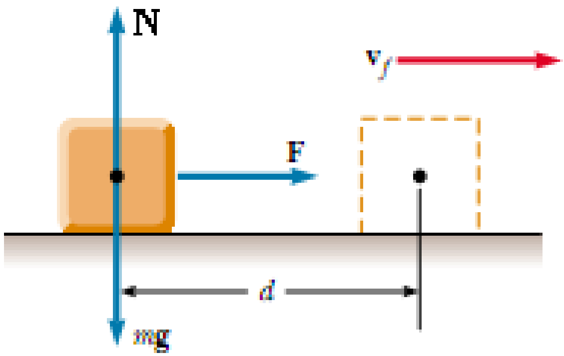
iş-kinetik enerji teoremi:

$$\Delta K = K_s - K_i = W_{\text{net}}$$

$$\left[\begin{array}{l}\textbf{Bir cismin kinetik}\\ \textbf{enerjisindeki değişim}\end{array}\right] = \left[\textbf{Cisim üzerinde yapılan net iş}\right]$$

$$W_{\text{net}} > 0 \;\rightarrow\; K_s - K_i > 0 \rightarrow K_s > K_i$$
$$W_{\text{net}} < 0 \;\rightarrow\; K_s - K_i < 0 \rightarrow K_s < K_i$$

Örnek : Kütlesi 6 kg olan bir blok sürtünmesiz bir düzlemde duruyorken, 12 N' luk sabit bir yatay kuvvetin etkisiyle harekete başlıyor. Blok yatayda 3 m yol adıktan sonra hızı ne olur?



$$W = \vec{F} \cdot \vec{d} = 12 * 3 * \cos(0) = 36 \text{ J} \rightarrow K_s - K_i = \frac{1}{2} m v_s^2 - 0 = 36 \text{ J}$$

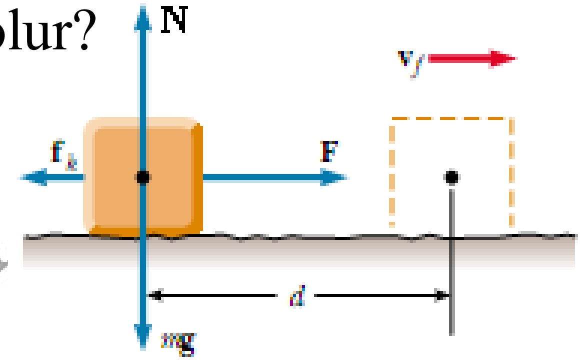
$$v_s = \sqrt{\frac{72}{6}} = \sqrt{12} = 3.5 \text{ m/s}$$

Aynı problemi kinematikten yola çıkarak tekrar çözelim:

$$\sum F_x = 12 = m a_x \rightarrow a_x = \frac{12}{6} = 2 \text{ m/s}^2$$

$$v_s^2 = v_i^2 + 2 a_x \Delta x = 2 * 2 * 3 = 12 \rightarrow v_s = \sqrt{12} = 3.5 \text{ m/s}$$

Örnek : Kütlesi 6 kg olan bir blok kinetik sürtünme katsayısı $\mu_k = 0.15$ olan bir düzlemde duruyorken, 12 N' luk sabit bir yatay kuvvetin etkisiyle harekete başlıyor. Blok yatayda 3 m yol adıktan sonra hızı ne olur?



$$W = \vec{F} \cdot \vec{d} = 12 * 3 * \cos(0) = 36 \text{ J} \qquad (F\text{' nin yaptığı iş})$$

$$f_k = \mu_k mg = 0.15 * 6 * 9.8 = 8.82 \text{ N}$$

$$W_f = \vec{f}_k \cdot \vec{d} = \mu_k mg \cos(\pi) = -8.82 * 3 = -26.5 \text{ J} \quad (f_k \text{ 'nın yaptığı iş})$$

$$W + W_f = 36 - 26.5 = 9.5$$

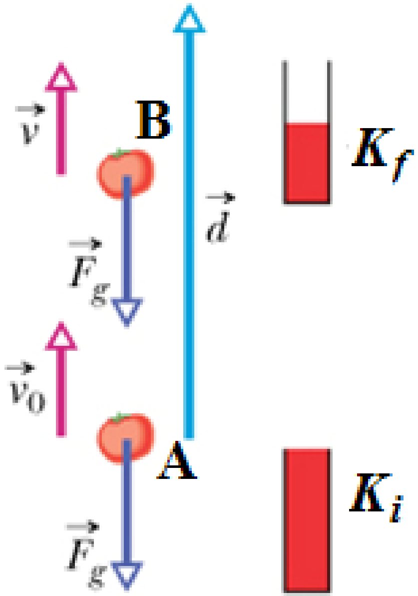
$$W + W_f = \frac{1}{2} m v_s^2 - \cancel{\frac{1}{2} m v_i^2} = \frac{1}{2} m v_s^2 = 9.5 \rightarrow v_s = \sqrt{\frac{19}{6}} = 1.8 \text{ m/s}$$

Aynı problemi kinematikten yola çıkarak tekrar çözelim.

$$\sum F_x = 12 - f_k = 12 - 8.82 = 3.18 = m a_x \rightarrow a_x = \frac{3.18}{6} = 0.53 \text{ m/s}^2$$

$$v_s^2 = \cancel{v_i^2} + 2 a_x \Delta x = 2 * 0.53 * 3 = 3.18 \rightarrow v_s = \sqrt{3.18} = 1.8 \text{ m/s}$$

Yerçekimi Kuvvetinin Yaptığı İş :



Kütlesi m olan bir cisim A noktasından v_0 ilk hızıyla yukarı doğru fırlatılsın.

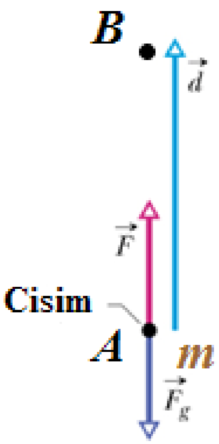
Cisim yükseldikçe, yer-çekimi kuvveti ($F_g = mg$) tarafından yavaşlatılır ve B noktasında daha düşük bir v hızına sahip olur.

Cisim A noktasından B noktasına giderken, yer-çekimi kuvvetinin yaptığı iş:

$$W_g\left(A \rightarrow B\right) = \vec{F}_g.\vec{d} = mgd\cos 180° = -mgd$$

Cisim B noktasından A noktasına dönerken, yer-çekimi kuvveti tarafından yapılan iş:

$$W_g\left(B \rightarrow A\right) = \vec{F}_g.\vec{d} = mgd\cos 0° = +mgd$$



Yükseltme Kuvvetinin Yaptığı İş :

Kütlesi m olan cismi bir F kuvvetiyle (dış kuvvet) A noktasından B noktasına yükseltmek isteyelim. Cisim harekete başladığı A noktasında ve ulaştığı B noktasında durgun olsun. Bu aralıkta uygulanan F kuvvetinin sabit olması gerekmiyor.

Cisme etki eden iki kuvvet vardır. Biri yerçekimi kuvveti F_g, diğeri de cismi yukarı kaldırmak için dışardan uyguladığımız F kuvvetidir.

$$W_{\text{net}} = \Delta K = 0 \;\rightarrow\; W_{dış} + W_g = 0 \quad \rightarrow \quad W_{dış} = -W_g$$

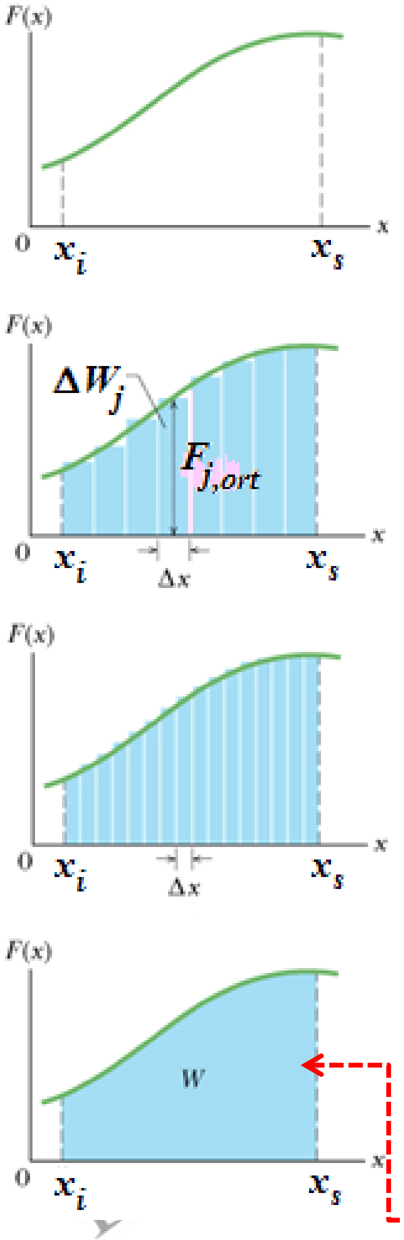
$$W_g = mgd\cos 180° = -mgd \quad \rightarrow \quad W_{dış} = mgd$$

Alçaltma Kuvvetinin Yaptığı İş :

Bu durumda cisim B noktasından A noktasına hareket etmektedir.

$$W_g = mgd\cos 0° = mgd \quad \rightarrow \quad W_{dış} = -W_g = -\,mgd$$

Değişken Kuvvetin Yaptığı İş :



Şekilde, konuma bağlı olarak değişen bir F kuvveti verilmiştir. Bu kuvvetin x_i ile x_s noktaları arasında yaptığı işi (W) bulmak isteyelim.

Bunun için $\left(x_i, x_s\right)$ aralığı, genişliği Δx olan N tane ince şerite bölünür.

j. aralıkta yapılan iş $\Delta W_j = F_{j,ort}\Delta x$ kadardır.

Bu durumda toplam iş, $W = \sum_{j=1}^{N} F_{j,ort}\Delta x$ olur.

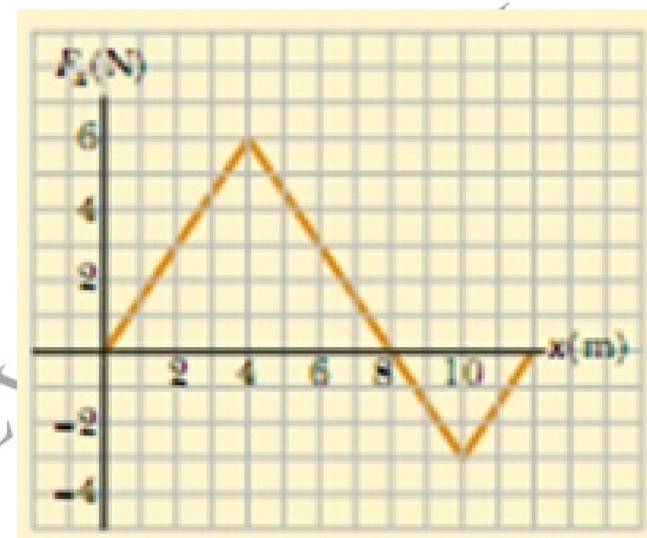
$\Delta x \to 0$ ($N \to \infty$) durumunda,

$$W = \lim_{\Delta x \to 0} \sum_{j=1}^{N} F_{j,ort}\Delta x = \int_{x_i}^{x_s} F(x)dx$$

$$W = \int_{x_i}^{x_s} F(x)dx \to \left[F(x) - x \text{ grafiği altında kalan alan}\right]$$

(7-12)

Örnek : Bir cisim üzerine etkiyen kuvvetin cismin konumuna bağlılığı şekildeki gibidir.



$a-)\ x = 0-8$ m,

$b-)\ x = 8\ -12$ m

$c-)\ x = 0\ -12$ m

aralıklarında bu kuvvetin yaptığı işi bulunuz.

$$a-)\, W_{0-8} = \int_{x_i}^{x_s} F(x)dx = \int_{0}^{8} F(x)dx = \frac{8*6}{2} = 24\text{ J}$$

$\longleftarrow$ x = 0 - 8 m aralığıdaki üçgensel bölgenin alanı

$$b-)\, W_{8-12} = \int_{x_i}^{x_s} F(x)dx = \int_{8}^{12} F(x)dx = \frac{4(-3)}{2} = -6\text{ J}$$

$\longleftarrow$ x = 8 - 12 m aralığıdaki üçgensel bölgenin alanı

$$c-)\, W = W_{0-8} + W_{8-12} = 24 - 6 = 18\text{ J}$$

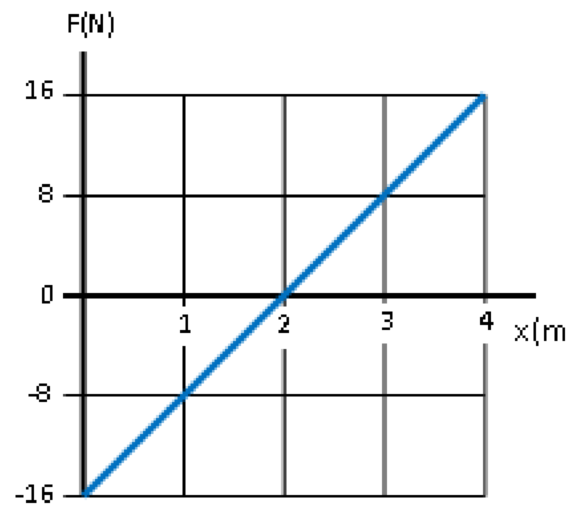
Örnek : Bir cisme etkiyen kuvvet, x metre cinsinden olmak üzere, $F = (8x - 16)$ N ifadesine göre değişmektedir.

$a-)$ $x = 0 - 3$ m aralığında kuvvetin yaptığı işi bulunuz.

$b-)$ Kuvvet-konum grafiğini çiziniz ve $x = 0 - 3$ m aralığında kuvvetin yaptığı işi grafikten bulunuz.

$$a-)\, W = \int_{x_i}^{x_s} F(x)dx = \int_0^3 (8x - 16)dx = \left(8\frac{x^2}{2} - 16x\right)_0^3 = -12 \text{ J}$$

$$b-)\, W = W_{0-2} + W_{2-3} = \frac{2(-16)}{2} + \frac{1*8}{2} = -12 \text{ J}$$



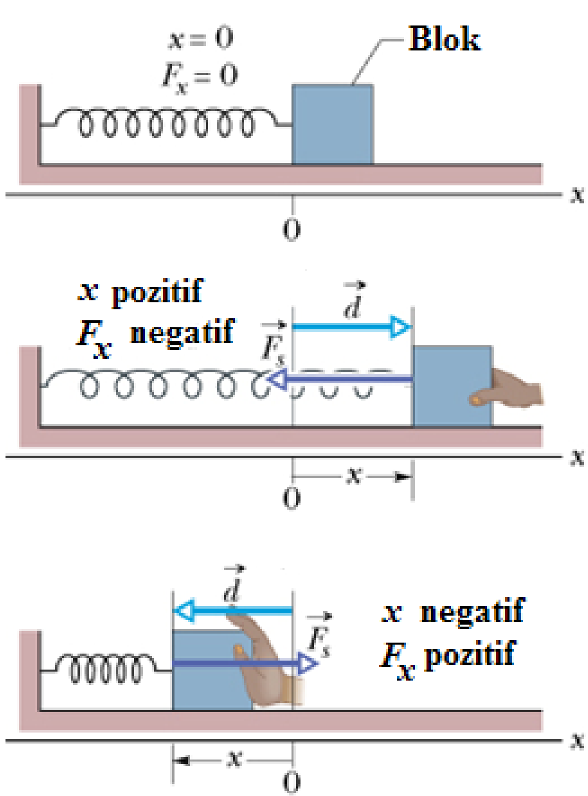
Örnek : $\vec{F} = (4x\hat{\mathrm{i}} + 3y\hat{\mathrm{j}})$ N' luk kuvvetin etkisindeki bir cisim orijinden başlayarak $x = 5\ m$ noktasına hareket etmektedir. Kuvvetin yaptığı işi bulunuz.

$$W = \int_{r_i}^{r_s} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \quad ; \quad d\vec{r} = dx\hat{\mathrm{i}} + dy\hat{\mathrm{j}}$$

$$W = \int_{r_i}^{r_s} (4x\hat{i} + 3y\hat{j}).(dx\hat{i} + dy\hat{j})$$

$$W = \int_{r_i}^{r_s} (4xdx + 3ydy) = \int_0^5 4xdx + \int_0^0 3ydy$$

$$W = 4\left(\frac{x^2}{2}\right)_0^5 = 50\ \mathrm{J}$$



Yay Kuvveti :

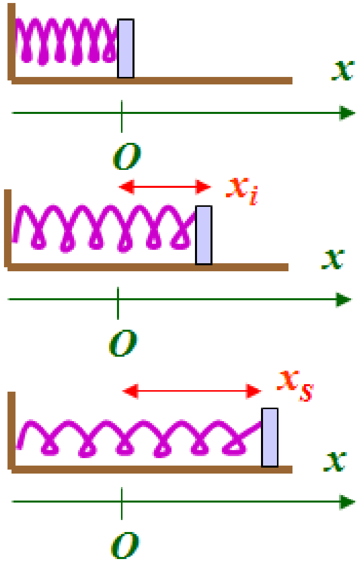
Denge durumundaki bir yaya (uzamamış veya sıkışmamış yay) bir blok bağlı bulunsun.

Yayı d kadar gerecek şekilde bloğu sağa doğru bir miktar çekelim. Yay elimize ters doğrultuda bir direnç kuvveti (F) uygular.

Yayı d kadar sıkıştıracak şekilde bloğu sola doğru itersek, yay elimize yine ters doğrultuda bir direnç kuvveti (F) uygular.

Her iki durumda da, yay tarafından elimize uygulanan F kuvveti yayı doğal uzunluğuna getirecek yönde etkir. Büyüklüğü ise, uzama veya sıkışma miktarı (x) ile orantılıdır.

Eşitlik olarak $F = -kx$ bağıntısı ile verilir. Bu eşitlik "Hooke yasası" , k ise "yay sabiti" olarak bilinir.



Yay Kuvveti Tarafından Yapılan İş :

Yay sabiti k olan bir yayın boyunu, kuvvet uygulayarak x_i' den x_s' ye getirmiş olalım. Yayın elimize uyguladığı kuvvetin yaptığı işi (W_{yay}) hesaplamak isteyelim.

Yayın kütlesiz olduğunu ve Hooke yasasına uyduğunu varsayalım.

Değişken kuvvetin yaptığı iş bağıntısından,

$$W_{yay} = \int_{x_i}^{x_s} F(x)dx = \int_{x_i}^{x_s} -kxdx = -k\int_{x_i}^{x_s} xdx = -k\left[\frac{x^2}{2}\right]_{x_i}^{x_s} = \frac{1}{2}kx_i^2 - \frac{1}{2}kx_s^2$$

bulunur.

Yay başlangıçta uzamasız durumda ise ($x_i = 0$) ve yayı x kadar germiş veya sıkıştırmış isek($x_s = \pm x$), yay kuvvetinin yaptığı iş

$W_{yay} = -\dfrac{1}{2}kx^2$ olarak bulunur.

Örnek : Kütlesi 1.6 kg olan bir blok, yay sabiti $k = 1\times10^3$ N/m olan yatay bir yaya bağlıdır. Yay 2 cm sıkıştırılıp durgun halden serbest bırakılıyor. (Yüzey sürtünmesizdir).

a–) Blok denge noktasından (x = 0) geçerken hızı ne olur?

b–) Aynı soruyu, sabit ve 4 N büyüklüğünde bir sürtünme kuvveti olması durumunda tekrar cevaplayınız.

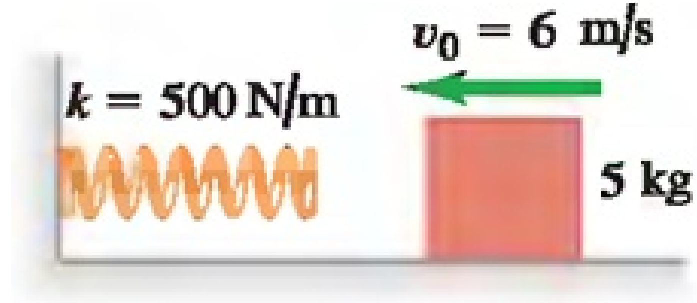
$$a\text{–)}\; W_{yay} = \frac{1}{2}kx_m^2 = \frac{1}{2}\left(1\times10^3\right)\left(-2\times10^{-2}\right)^2 = 0.2\ \mathrm{J}$$

$$W_{yay} = \frac{1}{2}mv_s^2 - \cancel{\frac{1}{2}mv_i^2} \rightarrow v_s = \sqrt{\frac{2W_{yay}}{m}} = \sqrt{\frac{2(0.2)}{1.6}} = 0.5\ \mathrm{m/s}$$

$$b\text{–)}\; W_f = -f_k x_m = -4\left(2\times10^{-2}\right) = -0.08\ \mathrm{J}$$ sürtünme kuvvetinin yaptığı iş.

$$\Delta K = W_{yay} + W_f \rightarrow \frac{1}{2}mv_s^2 = 0.2 - 0.08 \rightarrow v_s = \sqrt{\frac{2*(0.12)}{1.6}} = 0.39\ \mathrm{m/s}$$

Örnek : Kütlesi 5 kg olan bir blok sürtünmesiz bir yüzeyde, yay sabiti k = 500 N/m olan yatay bir yaya v_0 = 6 m/s hızla çarpıyor ve yayı sıkıştırıyor.



a–) Yaydaki sıkışma ne kadardır?

b–) Yay en fazla 15 cm sıkışabiliyorsa, v_0 hızı en fazla ne olur?

$$a\text{–)}\ W_{yay} = \cancel{\frac{1}{2}kx_i^2} - \frac{1}{2}kx_m^2 = \cancel{\frac{1}{2}mv_s^2} - \frac{1}{2}mv_i^2$$

$$\frac{1}{2}kx_m^2 = \frac{1}{2}mv_i^2 \rightarrow x_m = \sqrt{\frac{m}{k}}v_i = \sqrt{\frac{5}{500}} * (6) = 0.6 \text{ m}$$

$$b\text{–)}\ x_m = \sqrt{\frac{m}{k}}v_i \rightarrow v_i = \sqrt{\frac{k}{m}}x_m = \sqrt{\frac{500}{5}} * (0.15) = 1.5 \text{ m / s}$$

Üç - Boyutlu Uzayda Kuvvetin Yaptığı İş :

Üç-boyutlu uzayda tanımlı bir $\vec{F}$ kuvveti genel olarak

$$\vec{F} = F_x(x,y,z)\hat{\mathrm{i}} + F_y(x,y,z)\hat{\mathrm{j}} + F_z(x,y,z)\hat{\mathrm{k}}$$

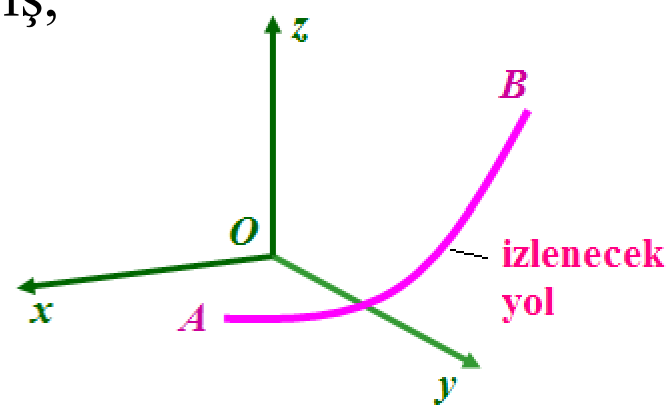
biçiminde tanımlanabilir.

Böylesi bir kuvvetin etkisinde, bir cismi koordinatı (x_i, y_i, z_i) olan A noktasından koordinatı (x_s, y_s, z_s) olan B noktasına, belirli bir yol boyunca, hareket ettirmek için yapılacak iş,

$$dW = \vec{F}\cdot d\vec{r} = F_x dx + F_y dy + F_z dz$$

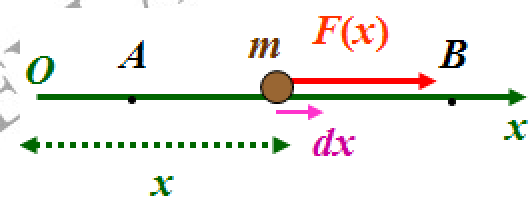
$$W = \int_A^B dW = \int_{x_i}^{x_s} F_x dx + \int_{y_i}^{y_s} F_y dy + \int_{z_i}^{z_s} F_z dz$$

ile verilir.



Değişken Kuvvet ve İş - Kinetik Enerji Teoremi :

Değişken bir $F(x)$ kuvveti yardımıyla kütlesi m olan bir cismi A $(x = x_i)$ noktasından B $(x = x_s)$ noktasına hareket ettirelim. Newton' un ikinci yasasına göre, $F = ma = m\dfrac{dv}{dt}$' dir.



Eşitliğin her iki tarafını dx ile çarpıp x_i ve x_s aralığında integralini alırsak,

$$\int_{x_i}^{x_s} F dx = \int_{x_i}^{x_s} m\frac{dv}{dt}dx \longrightarrow \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dx}\frac{dx}{dt} \rightarrow \frac{dv}{dt}dx = \frac{dv}{dx}\frac{dx}{dt}dx = v dv$$

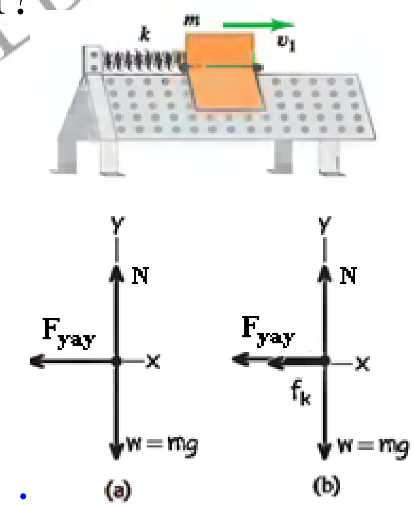
$$W = m\int_{x_i}^{x_s} v dv = \frac{m}{2}\left[v^2\right]_{x_i}^{x_s} = \frac{1}{2}mv_s^2 - \frac{1}{2}mv_i^2 = K_s - K_i = \Delta K \quad \text{bulunur.}$$

Not : Görüldüğü gibi iş-kinetik enerji teoremi, kuvvetin sabit olduğu durum ile aynıdır.

Örnek : Kütlesi 0.1 kg olan bir blok hava-rayı üzerinde yay sabiti k = 20 N/m olan yatay bir yaya bağlıdır. Blok denge noktasından sağa doğru 1.5 m/s hızla geçiyor.

a–) Hava-rayı sürtünmesiz ise, blok ne kadar sağa gidebilir?

b–) Hava-rayı sürtünmeli ise (μ_k = 0.47), blok ne kadar sağa gidebilir?



$$a\text{–)}\ W_{yay} = \cancel{\frac{1}{2}kx_i^2} - \frac{1}{2}kx_m^2 = \cancel{\frac{1}{2}mv_s^2} - \frac{1}{2}mv_i^2$$

$$\frac{1}{2}kx_m^2 = \frac{1}{2}mv_i^2 \rightarrow x_m = \sqrt{\frac{m}{k}}v_i = \sqrt{\frac{0.1}{20}}(1.5) = 0.106\,\text{m}$$

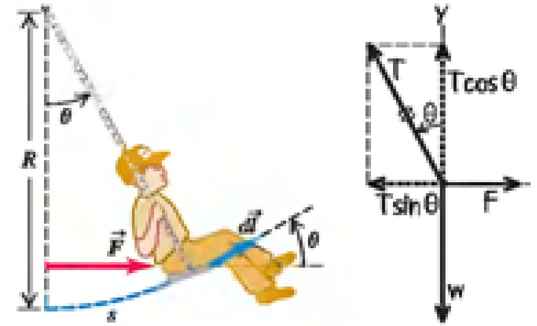
$$b\text{–)}\ W_f = -f_k x_m = -\left(\mu_k mg\right)x_m$$ sürtünme kuvvetinin yaptığı iş.

$$\Delta K = W_{yay} + W_f \rightarrow -\frac{1}{2}mv_i^2 = -\frac{1}{2}kx_m^2 - \mu_k mgx_m$$ → İş-kinetik enerji teorimi

$$-\frac{1}{2}0.1 * v(1.5)^2 = -\frac{1}{2}20 * x_m^2 - 0.47 * 0.1 * 9.8x_m$$

$$10x_m^2 + 0.461x_m - 0.113 = 0 \rightarrow x_m = 0.086\,\text{m} = 8.6\,\text{cm}$$

Örnek : Salıncağa binmiş w ağırlığındaki bir çocuğu, ipler düşeyle θ_0 açısı yapana kadar (burada çocuk durgundur) yatay bir F kuvvetiyle ittiğinizi düşünün. Bunun için uygulamanız gereken kuvveti, sıfırdan başlayarak çocuk dengeye gelene kadar belirli bir maksimum değere kadar artırmanız gerekir. Uyguladığınız F kuvvetinin yaptığı işi bulunuz.



Denge durumunda : $\sum F_x = F - T\sin\theta = 0 \quad ; \quad F = T\sin\theta$

$$\sum F_y = T\cos\theta - \underbrace{w}_{ağırlık} = 0 \quad ; \quad T = w/\cos\theta$$

$$F = w\tan\theta \rightarrow W = \int \vec{F}\cdot d\vec{l} = \int_0^{\theta_0} F(\underbrace{Rd\theta}_{dl})\cos\theta = wR\int_0^{\theta_0} \sin\theta d\theta$$

$$W = -wR\cos\theta\Big]_0^{\theta_0} = wR\left(1-\cos\theta_0\right)$$

Güç :

Güç, F kuvveti tarafından birim zamanda yapılan iş veya F kuvvetinin iş yapma hızı olarak tarif edilir.

F kuvveti Δt zaman aralığında W kadar iş yapmışsa, ortalama güç

$$\boxed{P_{\text{ort}} = \frac{W}{\Delta t}}$$

Anlık güç ise

$$\boxed{P = \frac{dW}{dt}}$$

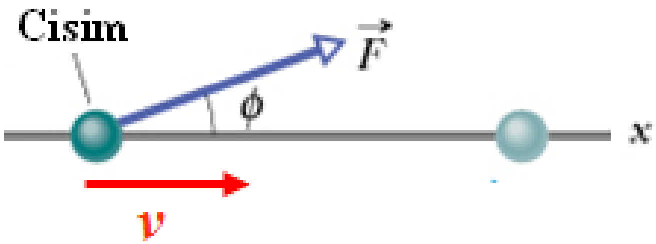
ile tanımlanır.

SI sistemindeki birimi "J/s = watt" tır.

"kilowatt-saat" (kW-sa) iş birimidir.

Örneğin, 1000 W gücündeki bir motor 1 saat süreyle çalışıyorsa yaptığı iş $W = Pt = 1000 * 3600 = 3600$ kJ bulunur.

Hıza Bağlı Güç İfadesi :



Hareket eden bir cisme, hareket doğrultusu ile ϕ açısı yapacak şekilde bir F kuvveti uygulayalım.

Uygulanan F kuvvetinin iş yapma hızı

$$P = \frac{dW}{dt} = \frac{F\cos\phi dx}{dt} = F\cos\phi\frac{dx}{dt} = Fv\cos\phi$$

$$P = \vec{F}\cdot\vec{v}$$

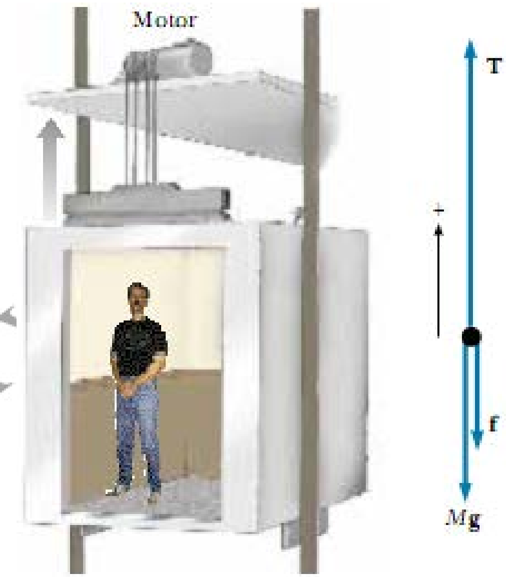
verilir.

Örnek : Bir asansörün kütlesi 1000 kg' dır ve toplam 800 kg taşıyabilmektedir. Asansör yukarı çıkarken 4000 N' luk sabit bir sürtünme kuvveti etkimektedir.

a–) Asansör 3 m/s' lik sabit hızla yukarı çıkıyorsa,

b–) Asansör 1 m/s^2' lik ivme ile yukarı çıkıyorsa,

Asansör motorunun sağladığı güç ne olur?



$$a\text{–)}\ v = \text{sabit} \rightarrow a = 0: \qquad \sum F_y = T - f - w = 0$$

$$T = f + w = (1000 + 800) * 9.8 + 4000 = 2.16 \times 10^4 \text{ N}$$

$$P = \vec{T}.\vec{v} = T\, v\, cos0 = 2.16 \times 10^4 * 3 = 6.48 \times 10^4 \text{ W}$$

$$b\text{–)}\ a \neq 0: \qquad \sum F_y = T - f - Mg = Ma$$

$$T = f + M(g + a) = 4000 + 1800 * 10.8 = 2.34 \times 10^4 \text{ N}$$

$$P = \vec{T}.\vec{v} = T\, v\, cos0 = \left(2.34 \times 10^4 v\right) \text{W}$$ (burada *v* anlık hızdır)

BÖLÜM-8
Potansiyel Enerji ve Enerjinin Korunumu

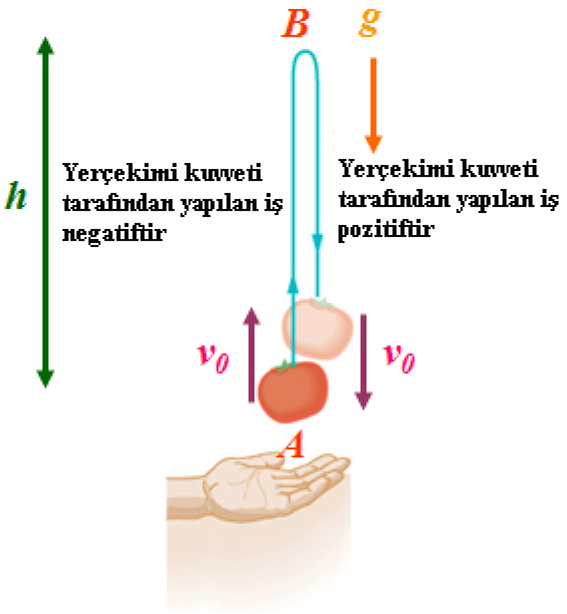
Bu konu kapsamında şu konulara değineceğiz:

- **Potansiyel enerji**
- **Korunumlu ve korunumsuz kuvvetler**
- **Mekanik enerji**
- **Mekanik enerjinin korunumu**

Birçok problemi "enerjinin korunumu" teoreminden çözeceğiz.

Burada vektörel nicelikler yerine iş, kinetik enerji ve potansiyel enerji gibi skaler nicelikler kullanacağımız için işlemler daha kolay yapılabilecektir.

İş ve Potansiyel Enerji:



Yer-çekimi potansiyel enerjisi:

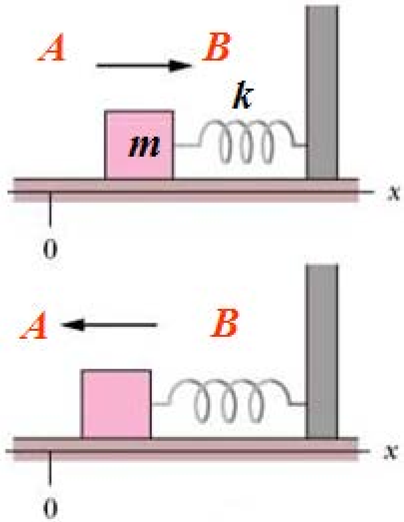
•Kütlesi *m* olan bir cisim v_0 ilk hızıyla *A* noktasından yukarı doğru fırlatılıyor.
•Cisim ve yer bir sistemdir.
•Yerçekimi kuvvetinin etkisiyle cisim yavaşlayarak yükselecek ve *B* noktasında tamamen duracaktır.
•Sonra da, aşağı doğru hareket ederek orijinal v_0 hızıyla *A* noktasına ulaşacaktır.

Cisim *A* noktasından *B* noktasına giderken F_g kuvvetinin yaptığı iş $W_1 = -mgh$' dir. Bunun anlamı, F_g kuvveti cismin kinetik enerjisini yerçekimi potansiyel enerjisine (*U*) dönüşmüştür.

Cisim *B* noktasından *A* noktasına düşerken ise, F_g kuvvetinin yaptığı iş $W_2 = mgh$ ' dir. Bunun anlamı da, F_g kuvveti cismin yerçekimi potansiyel enerjisini kinetik enerjiye dönüştürmüştür.

Sistemin potansiyel enerjisindeki değişim şu ifadeyle verilir: $\boxed{\Delta U = -W}$

Yay potansiyel enerjisi:



•Kütlesi m olan blok, yay sabiti k olan bir yaya bağlıdır.

•Yay ve kütle bir sistemdir.

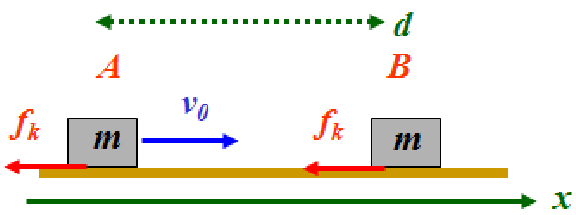
•Herhangi bir anda A noktasından geçerken ki hızı v_0 olan blok, yay kuvvetinin etkisiyle yavaşlayacak ve yayı x kadar sıkıştırarak B noktasında tamamen duracaktır.

•Sonrada, yay kuvvetinin etkisiyle ters yönde harekete başlayacak ve A noktasından v_0 hızıyla geçecektir.

Blok A noktasından B noktasına hareket ederken yay kuvveti F_{yay} tarafından yapılan iş $W_1 = -kx^2/2$' dir. Bunun anlamı, yay kuvveti F_{yay} cismin kinetik enerjisini potansiyel enerjiye (U) dönüştürmüştür.

Blok B noktasından A noktasına hareket ederken ise, yay kuvveti F_{yay} tarafından yapılan iş $W_2 = kx^2/2$' dir. Bunun anlamı da, yay kuvveti F_{yay} cismin potansiyel enerjisini kinetik enerjiye dönüştürmüştür.

Sistemin potansiyel enerjideki değişimi yine $\Delta U = -W$ ifadesine sahiptir.



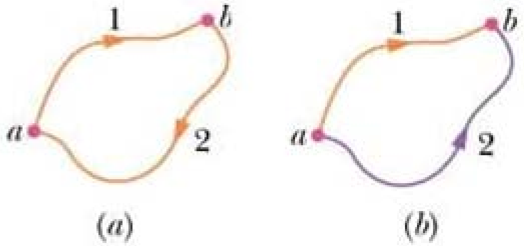
Korunumlu ve Korunumsuz Kuvvetler:

Cismin sadece kinetik ve potansiyel enerjileri arasında bir dönüşüme neden oldukları için, yerçekimi kuvveti ve yay kuvveti "**korunumlu**" kuvvetlerdir.

Buna karşın, sürtünme kuvveti "**korunumlu olmayan**" bir kuvvettir.

Sürtünmeli bir yüzey üzerinde *A* noktasından v_0 ilk hızıyla harekete başlayan bir blok düşünelim. Blok ile zemin arasındaki kinetik sürtünme katsayısı μ_k olsun. Blok, kinetik sürtünme kuvveti f_k etkisiyle *d* kadar yol aldıktan sonra *B* noktasında duracaktır.

A ve *B* noktaları arasında sürtünme kuvvetinin yaptığı iş $W_f = -\mu_k mgd$ olacaktır. Sürtünme kuvveti, bloğun tüm kinetik enerjisini "**ısı enerjisi**" ne dönüştürmüştür. Bu enerji tekrar kinetik enerjiye dönüştürülemez ve bu nedenle **sürtünme kuvveti korunumlu bir kuvvet** değildir.



1. Kapalı bir yol boyunca, korunumlu bir kuvvetin bir cisim üzerinde yaptığı net iş sıfırdır (Şekil-*a*).

$$\boxed{W_{\text{net}} = 0}$$

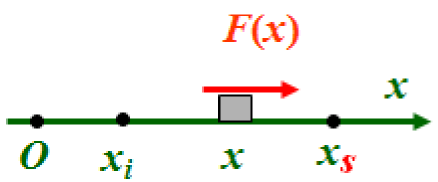
Yerden yukarı doğru fırlatılan taş ve kütle-yay sistemi buna birer örnektir. $W_{\text{net}} = W_{ab,1} + W_{ba,2} = 0$

2. *a*'dan *b*'ye giden bir cismin üzerine etki eden korunumlu bir kuvvetin yaptığı iş gidilen yoldan bağımsızdır.

$$\text{Şekil-}a'\text{dan}: \; W_{\text{net}} = W_{ab,1} + W_{ba,2} = 0 \quad \rightarrow \quad W_{ab,1} = -W_{ba,2}$$

$$\text{Şekil-}b'\text{den}: \; W_{ab,2} = -W_{ba,2}$$

$$\boxed{W_{ab,1} = W_{ab,2}}$$



Potansiyel Enerjinin bulunması :

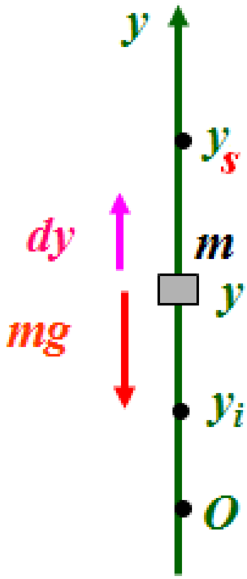
Bir cisme etkiyen korunumlu kuvveti biliyorsak, x_i ve x_s gibi iki nokta arasında cismin potansiyel enerjisindeki değişimi (ΔU) hesaplayabiliriz.

Korunumlu bir F kuvvetinin etkisindeki bir cisim x-ekseni boyunca x_i noktasından x_s noktasına hareket ediyor olsun. F kuvveti tarafından cisim üzerinde yapılan iş

$W = \int_{x_i}^{x_s} F(x)dx$ eşitliği ile verilir.

Böylece, potansiyel enerjideki değişim

$\Delta U = -W = -\int_{x_i}^{x_s} F(x)dx$ bulunur.



Yerçekimi Potansiyel Enerjisi :

Düşey doğrultuda (y-ekseni boyunca) yukarı doğru y_i noktasından y_s noktasına hareket eden m kütleli bir cisim düşünelim.

Cisme etki eden yerçekimi kuvveti nedeniyle cisim-yer sisteminin potansiyel enerjisinde değişim olacaktır. Az önce bulduğumuz sonucu kullanarak, cismin potansiyel enerjisindeki değişimi hesaplayacağız.

$$\Delta U = -\int_{y_i}^{y_s} F(y)dy = -\int_{y_i}^{y_s} (-mg)\,dy = mg\int_{y_i}^{y_s} dy = mg\,[y]_{y_i}^{y_s} = mg\,(y_s - y_i) = mg\Delta y$$

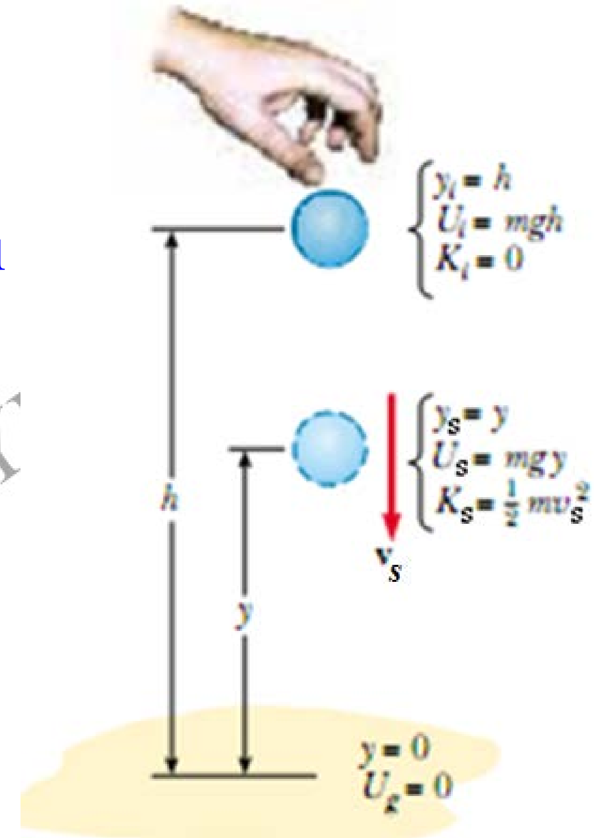
Cismin bulunduğu son noktayı genelleştirirsek $U(y) - U_i = mg\,(y - y_i)$ bulunur.

Genellikle, hareketin başladığı konum $y_i = 0$ ve bu noktadaki potansiyel $U_i = 0$ olarak seçilir. Bu durumda,

$U(y) = mgy$

bulunur.

Örnek : Yerden *h* kadar yükseklikten *m* kütleli bir cisim serbest bırakılıyor. Cismin herhangi bir andaki hızını, yerden olan yüksekliğine bağlı olarak bulunuz.



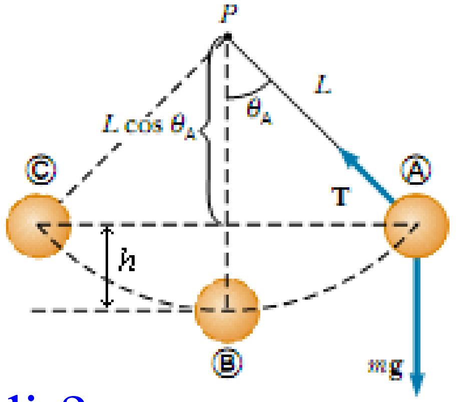
$$\Delta K = -\Delta U \rightarrow K_s - K_i = -(U_s - U_i)$$

$$K_i + U_i = K_s + U_s$$

$$0 + mgh = \frac{1}{2} m v_s^2 + mgy$$

$$v_s = \sqrt{2g(h-y)}$$

Örnek : Şekilde L uzunluğundaki bir ipin ucuna bağlı m kütlesinden oluşan bir basit sarkaç verilmiştir. Cisim θ_A açısal konumundan serbest bırakılmıştır ve dönme ekseninin geçtiği P noktası sürtünmesizdir.



a–) Cisim en alt noktadan (B noktası) geçerken hızı nedir?

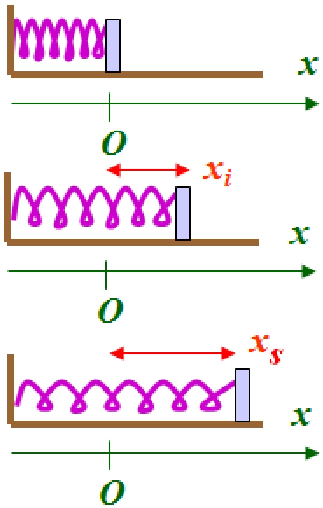
b–) Cisim en alt noktada iken ipteki gerileme kuvveti nedir?

$$a\text{–)}\ K_i + U_i = K_s + U_s \rightarrow mgh = \frac{1}{2}mv_B^2 \rightarrow v_B = \sqrt{2gL(1-\cos\theta_A)}$$

$$b\text{–)}\ \sum F_r = T_B - mg = \frac{mv_B^2}{L} \rightarrow T_B = mg + 2mg(1-\cos\theta_A)$$

$$T_B = mg(3 - 2\cos\theta_A)$$

Yaydaki Potansiyel Enerji :



Bir kütle-yay sisteminde, blok x_i noktasından x_s noktasına hareket etsin. Yay kuvveti bir iş (W) yapacaktır ve kütle-yay sisteminin potansiyel enerjisinde bir değişim meydana gelecektir.

$$W = \int_{x_i}^{x_s} F(x)dx = \int_{x_i}^{x_s} -kxdx = -\left(\frac{1}{2}kx_s^2 - \frac{1}{2}kx_i^2\right)$$

$$\Delta U = -W \rightarrow U(x_s) - U_i = \frac{1}{2}kx_s^2 - \frac{1}{2}kx_i^2$$

Genellikle hareketin başladığı konum $x_i = 0$ ve bu noktadaki potansiyel $U_i = 0$ olarak seçilir.

Denge noktasından herhangi bir x uzaklığında,

yaydaki potansiyel enerji: $U = \frac{1}{2}kx^2$

Mekanik Enerjinin Korunumu :

Bir sistemin mekanik enerjisi, o sistemin kinetik ve potansiyel enerjilerinin toplamı olarak tarif edilir

(Mekanik enerji = $E_{mek} = K + U$)

Sistemin çevresinden izole olduğunu, dış kuvvetlerin olmadığını ve sistemdeki kuvvetlerin ise korunumlu olduğunu kabul ediyoruz.

Sistemdeki iç kuvvetin yaptığı iş sistemin kinetik enerjisinde bir değişim meydana getirecektir.

$\Delta K = W$ (Eş-1)

Bu, aynı zamanda sistemin potansiyel enerjisinde de bir değişim meydana getirecektir

$\Delta U = -W$ (Eş-2).

Bu iki eşitlik birleştirilirse,

$$\Delta K = -\Delta U$$

$$K_s - K_i = -\left(U_s - U_i\right)$$

$$K_i + U_i = K_s + U_s$$

sonucuna ulaşılır.

Bu, "mekanik enerjinin korunumu" yasasıdır ve şu şekilde özetlenebilir.

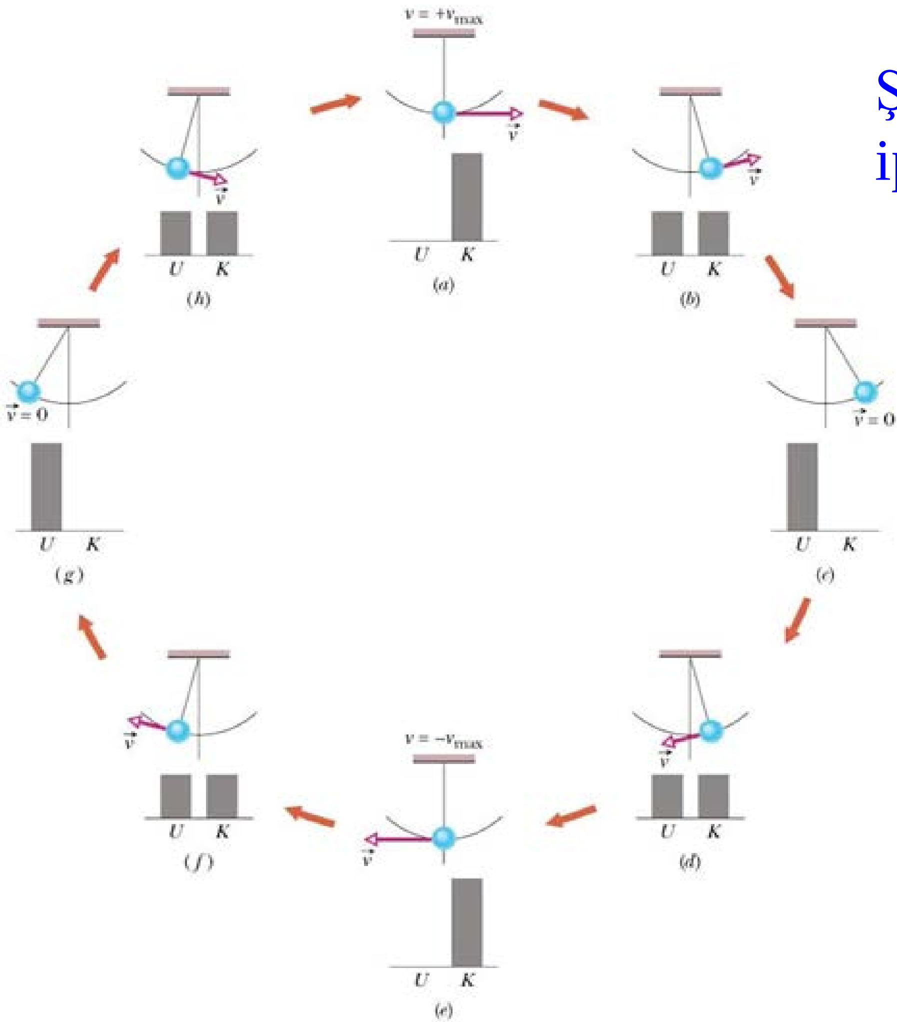
$$\Delta E_{\text{mek.}} = \Delta K + \Delta U = 0$$

Korunumlu ve korunumsuz kuvvetlerin olduğu izole bir sistemde bu yasa

$$\Delta E_{\text{mek.}} = W_{korunumsuz}$$

formundadır.

Burada $W_{korunumsuz}$, sistemdeki tüm korunumsuz kuvvetler tarafından yapılan iştir.



Şekilde *m* kütleli bir cisim ve asılı olduğu ipten oluşan basit sarkaç verilmiştir.

Cisim-yer sisteminin mekanik enerjisi sabittir. Sarkaç salındıkça, sistemin kinetik ve potansiyel enerjileri arasında sürekli bir dönüşüm olacaktır.

Cisim en alt noktadayken potansiyel enerjiyi "sıfır" seçersek, bu noktalarda kinetik enerji maksimum olacaktır (*a* ve *e* durumu).

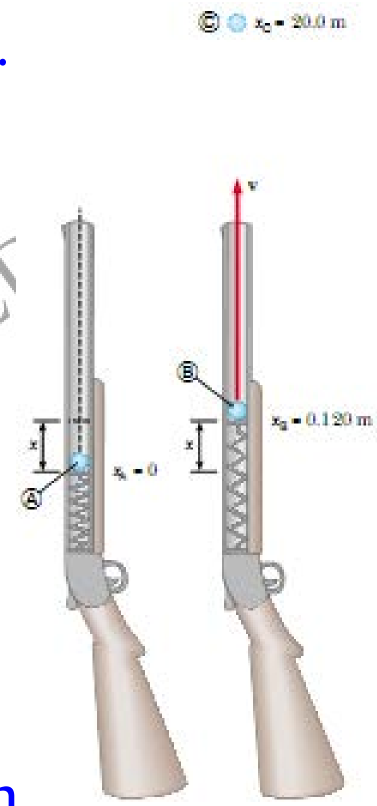
c ve *g* durumlarında ise potansiyel enerji maksimum, kinetik enerji sıfır olacaktır.

Örnek : Yaylı bir oyuncak tabancanın yay sabiti bilinmemektedir. Yay 12 cm sıkıştırılıp düşey yönde ateşlendiğinde, 35 g' lık bilye atıldığı noktadan 20 m yukarıya yükseliyor. Tüm sürtünmeleri gözardı ederek,

a–) Tabancanın yay sabitini bulunuz.

b–) Bilye tabancayı hangi hızla terkeder?

c–) Bilye atıldığı noktadan 10 m yukarıdayken hızı nedir?

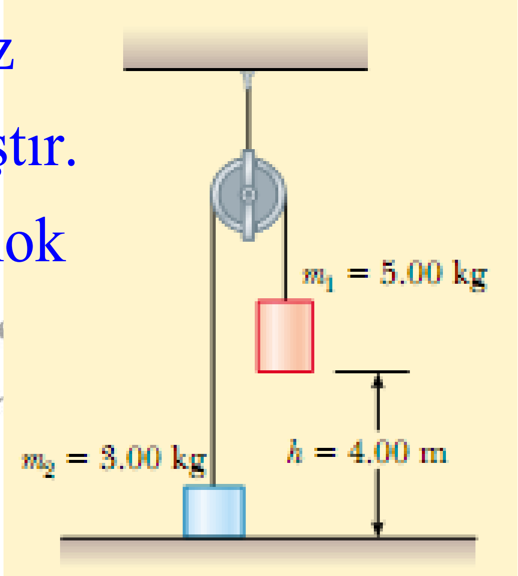


$$a\text{–)}\ E_A = E_C \rightarrow \frac{1}{2}kx^2 = mgh \rightarrow k = \frac{2mgh}{x^2} = 953\ \text{N/m}$$

$$b\text{–)}\ E_A = E_B \rightarrow \frac{1}{2}kx^2 = mgx + \frac{1}{2}mv_B^2 \rightarrow v_B = \sqrt{\frac{k}{m}x^2 - 2gx} = 19.7\ \text{m/s}$$

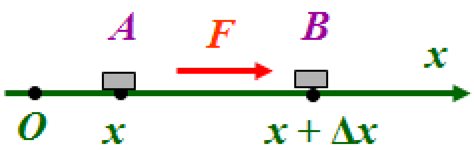
$$c\text{–)}\ \frac{1}{2}kx^2 = mgh' + \frac{1}{2}mv_{h'}^2 \rightarrow v_{h'} = \sqrt{\frac{k}{m}x^2 - 2gh'} = 14\ \text{m/s}$$

Örnek : İki blok hafif bir iple, ağırlıksız ve sürtünmesiz bir makara üzerinden şekildeki gibi birbirine bağlanmıştır. Sistem durgun halden serbest bırakılıyor. 5.00 kg' lık blok yere çarptığında, 3.00 kg' lık bloğun hızı ne olur?



$$E_i = E_s \rightarrow m_1 gh = m_2 gh + \frac{1}{2} m_2 v^2 + \frac{1}{2} m_1 v^2$$

$$v = \sqrt{\frac{2(m_1 - m_2)gh}{(m_1 + m_2)}} = \sqrt{\frac{2*(2)*(9.8)*4}{8}} = \sqrt{19.6} = 4.43 \text{ m/s}$$



Potansiyel Enerjiden Kuvvetin Bulunması :

Bilinmeyen bir F kuvvetinin etkisi altında x-ekseni boyunca hareket eden bir cismin potansiyel enerjisinin konuma bağlılığı $U(x)$ biliniyor olsun.

Cisim koordinatı x olan bir A noktasından koordinatı $x + \Delta x$ olan çok yakındaki bir B noktasına hareket etsin. Kuvvetin cisim üzerinde yaptığı iş

$W = F\Delta x$ (Eş-1)

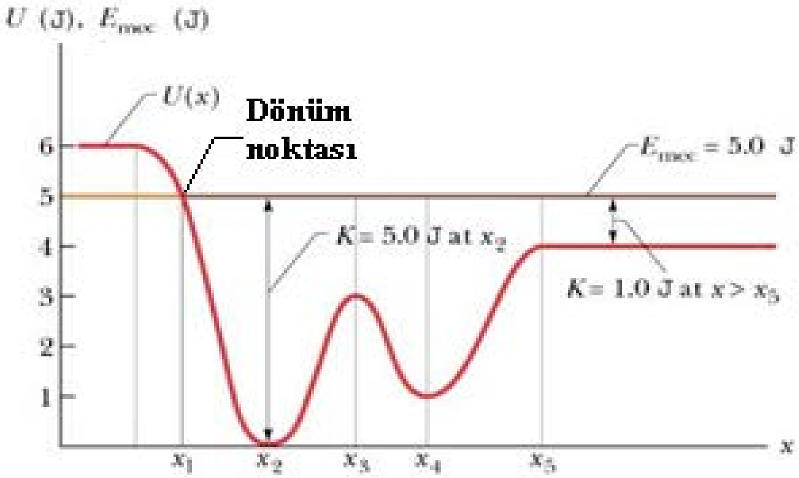
ile verilir.

Kuvvetin yaptığı bu iş, sistemin potansiyel enerjisinde bir değişim meydana getirir.

$\Delta U = -W$ (Eş-2)

Bu iki eşitlik birleştirilirse,

$F = -\dfrac{\Delta U}{\Delta x}$ bulunur. $\Delta x \to 0$ durumundaki limit değeri ise $F(x) = -\dfrac{dU(x)}{dx}$ olur.

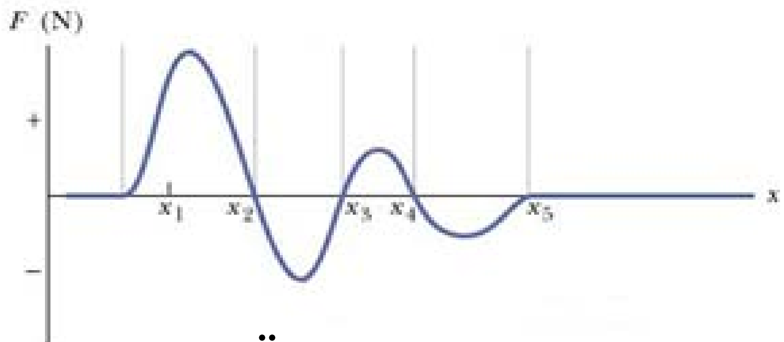


Potansiyel Enerji Eğrisi:

Cismin potansiyel enerjisinin konuma bağlı değişimini çizersek, F kuvvetinin etkisi altındaki cismin hareketi konusunda detaylı bilgiler elde etmek mümkün olur.

Cisme etki eden kuvveti aşağıdaki bağıntı yardımıyla konumun fonksiyonu olarak bulabiliriz.

$$F(x) = -\frac{dU(x)}{dx}$$

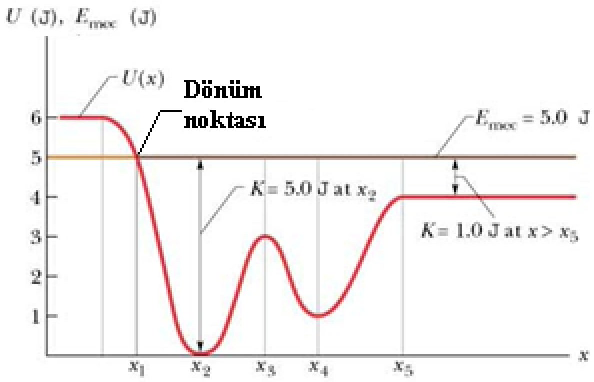


Örnek olarak yukarıdaki grafiği inceleyelim:

x_2, x_3 ve x_4 noktalarında potansiyel eğrisinin türevi sıfırdır. Dolayısıyla bu noktalarda cisme etkiyen kuvvet de sıfır olur.

x_2 ve x_3 noktaları arasında dU/dx pozitif olduğundan, kuvvet $-x$ yönündedir.

x_3 ve x_4 noktaları arasında dU/dx negatif olduğundan, kuvvet $+x$ yönündedir.



Dönüm Noktaları :

Sistemin toplam mekanik enerjisi $E_{\text{mek.}} = K(x) + U(x)$. Toplam mekanik enerji sabittir (5 J) ve yatay bir çizgi ile gösterilmiştir. Herhangi bir x noktasında $U(x)$ belirlenip yukarıdaki denklemde yerine konur ve cismin K kinetik enerjisi bulunabilir.

Kinetik enerji, tanımı gereği negatif olamaz. Böylece cismin, x-ekseninin hangi bölgesinde hareketli olduğunu belirleyebiliriz.

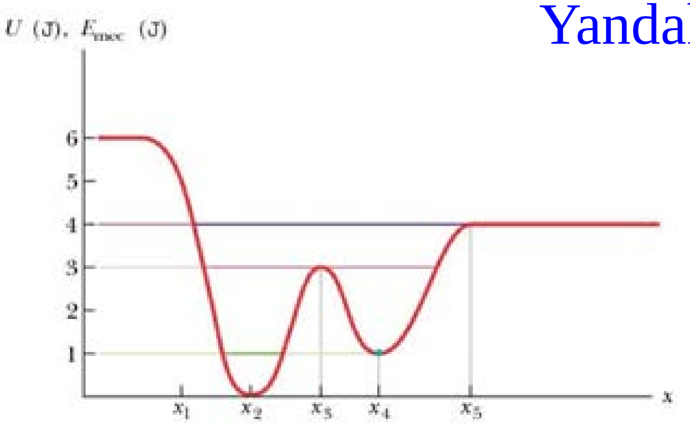
$K(x) = E_{\text{mek.}} - U(x)$

$K > 0 \rightarrow E_{\text{mek}} - U(x) > 0 \rightarrow U(x) < E_{\text{mek.}}$ Hareket izinlidir.

$K < 0 \rightarrow E_{\text{mek}} - U(x) < 0 \rightarrow U(x) > E_{\text{mek.}}$ Hareket yasaklıdır.

$E_{\text{mek.}} = U(x)$ olduğu noktalar, "dönüm noktaları" dır.

Yukarıdaki grafiğe göre, x_1 dönüm noktasıdır ve bu noktada $K = 0$'dır.



Yandaki grafikte $E_{mek.} = 4$ J durumunu gözönüne alalım.

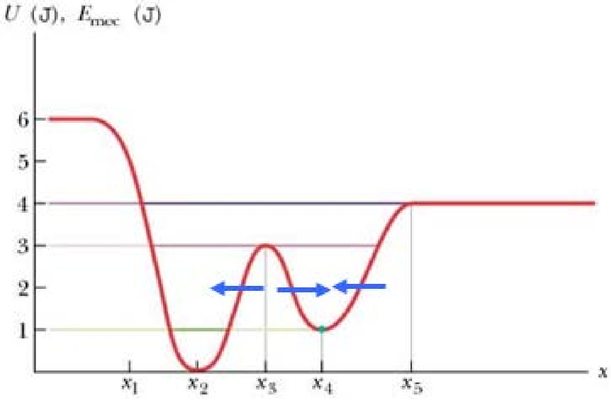
Buna göre dönüm noktaları ($E_{mek.} = U$) x_1 ve $x > x_5$ noktalarıdır. $x > x_1$ bölgesinde hareket izinlidir. Eğer mekanik enerjiyi 3 J veya 1 J' e düşürürsek, dönüm noktaları ve hareketin izinli olduğu bölge de değişecektir.

Denge Noktaları: Potansiyel enerji eğrisinde eğimin sıfır ($dU/dx = 0$) ve dolayısıyla da kuvvetin sıfır ($F = 0$) noktalar denge noktalarıdır. Kuvvetin sıfır olduğu bölgeler de ($x > x_5$) **doğal denge bölgeleridir**.

Mekanik enerjiyi $E_{mek.} = 4$ J seçersek, kinetik enerji $K = 0$ olur ve cisim $x > x_5$ bölgesinde hareketsiz olur.

Potansiyel enerji-konum eğrisinde **minimumlar**, kararlı denge konumları,

Potansiyel enerji-konum eğrisinde **maksimumlar**, kararsız denge konumlarıdır.



Not: Şekil üzerindeki mavi oklar,

$$F(x) = -\frac{dU(x)}{dx}$$

bağıntısı uyarınca cisim üzerine etkiyen kuvvetlerin yönünü göstermektedir.

Kararlı Denge Konumları: Potansiyelin minimum olduğu x_4 noktasını gözönüne alalım. Mekanik enerji $E_{mek.}$ = 1 J olsaydı, bu noktada cisim hareketsiz olacaktı (K = 0). Cismi x_4 noktasının çok az soluna veya sağına çekersek, cismi denge noktasına getirmek için bir kuvvet oluşur. Bu nokta kararlı denge noktasıdır.

Kararsız Denge Konumları: Potansiyelin maksimum olduğu x_3 noktasını gözönüne alalım. Mekanik enerji $E_{mek.}$ = 3 J olsaydı, bu noktada cisim hareketsiz olacaktı (K = 0). Cismi x_3 noktasının çok az soluna veya sağına çekersek, her iki durumda da cismi bu noktadan daha fazla uzaklaştıracak şekilde bir kuvvet oluşur. Bu nokta kararsız denge noktasıdır.

Örnek : Bir moleküldeki iki nötr atom arasındaki etkileşme kuvveti ile ilgili potansiyel, Lennard-Jones potansiyel enerji fonksiyonu ile verilir:

$$U(x) = 4\varepsilon\left[\left(\frac{\sigma}{x}\right)^{12} - \left(\frac{\sigma}{x}\right)^{6}\right]$$

x atomlar arasındaki mesafe, σ ve ε ise deneysel sabitlerdir.

İki tipik atom için, $\sigma = 0.265$ nm ve $\varepsilon = 1.51\times10^{-22}$ J' dür.

Atomlar arasındaki etkileşme kuvvetini ve kararlı denge durumunda iki molekül arasındaki minimum uzaklığı bulunuz.

$$F_x = -\frac{dU}{dx} = -4\varepsilon\frac{d}{dx}\left[\sigma^{12}x^{-12} - \sigma^{6}x^{-6}\right] = -4\varepsilon\left[-12\sigma^{12}x^{-13} + 6\sigma^{6}x^{-7}\right]$$

$$F_x = 4\varepsilon\left[\frac{12\sigma^{12}}{x^{13}} - \frac{6\sigma^{6}}{x^{7}}\right]$$

$$F_x = 4\varepsilon\left[\frac{12\sigma^{12}}{x^{13}} - \frac{6\sigma^{6}}{x^{7}}\right] = 0 \rightarrow x = 2^{1/6}\sigma = 0.3 \text{ nm}$$

Örnek : İki boyutlu uzayda bir kuvvetle bağlantılı potansiyel enerji fonksiyonu,

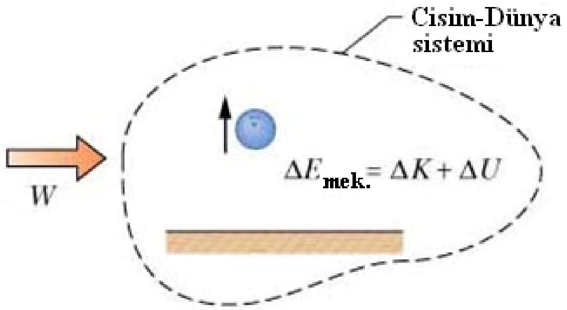
$$U(x,y) = 3x^3 y - 7x$$

ile veriliyor. Cisme etkiyen kuvveti bulunuz.

$$F_x = -\frac{dU}{dx} = -\frac{d}{dx}\left[3x^3 y - 7x\right] = -\left[9x^2 y - 7\right]$$

$$F_y = -\frac{dU}{dy} = -\frac{d}{dy}\left[3x^3 y - 7x\right] = -\left[3x^3\right]$$

$$\vec{F} = F_x\hat{\mathrm{i}} + F_y\hat{\mathrm{j}} = \left(7 - 9x^2 y\right)\hat{\mathrm{i}} - \left(3x^3\right)\hat{\mathrm{j}}$$



Dış Kuvvetin Bir Sistem üzerinde Yaptığı İş:

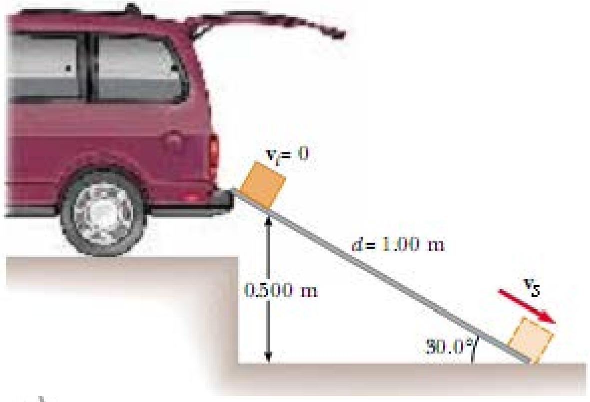
Şu ana kadar, dış kuvvetlerin olmadığı izole sistemleri ele aldık. Şimdi de, dış kuvvetlerin etkidiği bir sistemi ele alalım.

Bir oyuncu tarafından fırlatılan bovling topunu göz önüne alalım. Bovling topu ve dünya bir sistem oluşturur.

Oyuncu tarafından topa uygulanan kuvvet dış kuvvettir. Bu durumda sistemin mekanik enerjisi sabit değildir, dış kuvvetin yaptığı iş kadar değişir.

$$W = \Delta E_{mek.} = \Delta K + \Delta U$$

Örnek : Uzunluğu 1 m olan 30^{o}' lik eğik düzlemin en üst noktasından, kütlesi 3 kg olan bir kutu durgun halden aşağıya doğru kaymaya başlıyor. Kutuya 5 N' luk sabit bir sürtünme kuvveti etkimektedir.



a–) Eğik düzlemin tabanında kutunun hızı ne olur?

b–) Kutunun ivmesi nedir?

$$a\text{–)}\ E_i = \cancel{K_i} + U_i = mgh = 3(9.8)(0.5) = 14.7\ \text{J}\ ;\ E_s = K_s + \cancel{U_s} = \frac{1}{2}mv^2$$

$$\Delta E = -f_k d = -5(1) = -5\ \text{J}$$

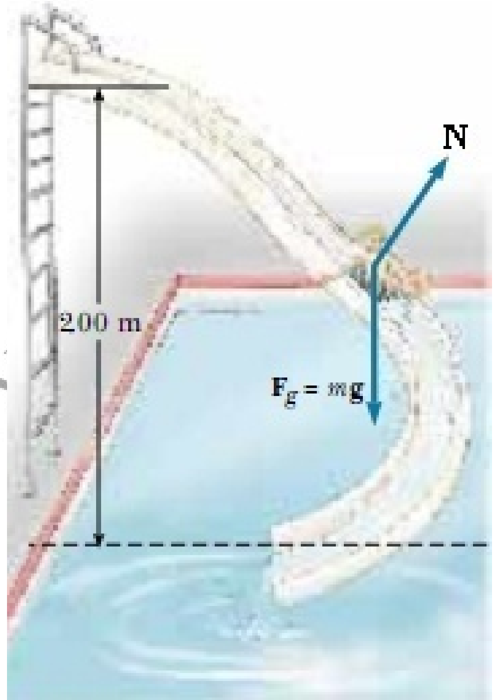
$$E_s - E_i = \frac{1}{2}mv^2 - 14.7 = -5 \rightarrow v = \sqrt{\frac{2(9.7)}{3}} = 2.54\ \text{m/s}$$

$$b\text{–)}\ \sum F_x = mg\sin(30) - f_k = ma \rightarrow a = \frac{3(9.8)(0.5) - 5}{3} = 3.23\ \text{m/s}^2$$

Örnek : Kütlesi 20 kg olan bir çocuk, 2 m yüksekliğinde düzgün olmayan bir kaydırağın tepesinden ilk hızsız kaymaya başlıyor.

a–) Sürtünme olmadığını varsayarak, kaydırağın en alt noktasında çocuğun hızı nedir?

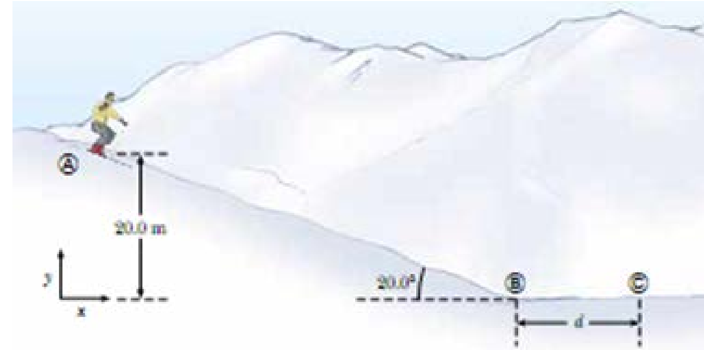
b–) Sürtünme olması durumunda, çocuğun en alt noktadaki hızı 3 m/s olduğuna göre sistemin mekanik enerjisindeki kayıp ne kadardır?



$$a\text{–)}\quad \cancel{K_i} + U_i = K_s + \cancel{U_s} \rightarrow mgh = \frac{1}{2}mv_s^2$$

$$v_s = \sqrt{2gh} = \sqrt{2(9.8)(2)} = 6.26\ \mathrm{m/s}$$

$$b\text{–)}\quad \Delta E = E_s - E_i = \frac{1}{2}mv_{s'}^2 - mgh = \frac{1}{2}(20)(3)^2 - 20(9.8)(2) = -302\ \mathrm{J}$$



Örnek : Bir kayakçı 20 m yükseklikteki rampadan ilk hızsız kaymaya başlıyor. Rampanın alt ucundan sonra, düz olan bölgede kayakçı ile zemin arasında sürtünme katsayısı 0.21' dir.

a–) Kayakçı, rampanın alt ucundan duruncaya kadar ne kadar yol alır?

b–) Eğik düzlemin kendisi de aynı sürtünme kaysayısına sahip olsaydı, (*a*) şıkkının cevabı ne olurdu?

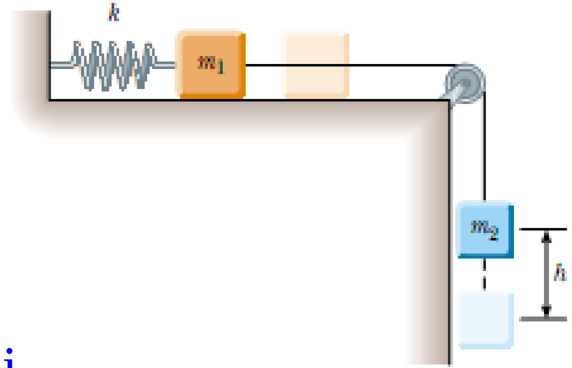
$$a\text{–)}\ \cancel{K_i} + U_i = K_s + \cancel{U_s} \rightarrow mgh = \frac{1}{2}mv_B^2 \rightarrow v_B = \sqrt{2gh} = 19.8\ \mathrm{m/s}$$

$$\Delta E = E_C - E_B = 0 - \frac{1}{2}mv_B^2 = -\mu_k mgd \rightarrow d = \frac{v_B^2}{2\mu_k g} = 95.2\ \mathrm{m}$$

$$b\text{–)}\ mgh - \mu_k mg\cos\theta L = \frac{1}{2}mv_B^2 \rightarrow v_B = \sqrt{2gh\left[1-\mu_k\cot(20)\right]} = 12.9\ \mathrm{m/s}$$

$$d = \frac{v_B^2}{2\mu_k g} = 40.3\ \mathrm{m}$$

Örnek : İki blok hafif bir iple, sürtünmesiz ve ağırlıksız bir makara üzerinden birbirine bağlıdır. Yatayda bulunan m_1 kütleli blok, yay sabiti k olan bir yaya bağlıdır. Yay uzamasız durumda iken sistem serbest bırakılıyor ve m_2 kütleli blok h kadar düşünce bir an için duruyor. m_1 kütleli blok ile zemin arasındaki sürtünme katsayısı nedir?

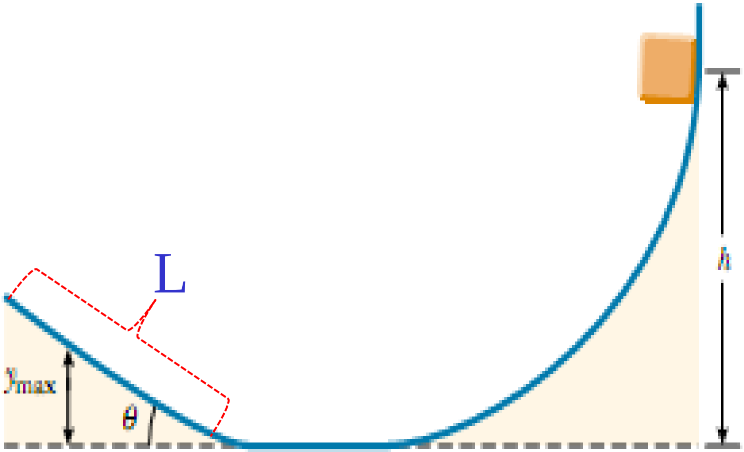


$$\Delta K = 0 \qquad \text{ve} \qquad \Delta E = \Delta U_g + \Delta U_{yay} = -\mu_k m_1 g h$$

$$\left.\begin{array}{l} \Delta U_g = U_s - U_i = 0 - m_2 g h \\ \Delta U_{yay} = \dfrac{1}{2} k h^2 \end{array}\right\} \rightarrow -\mu_k m_1 g h = \frac{1}{2} k h^2 - m_2 g h$$

$$\mu_k = \left(\frac{m_2 g - \frac{1}{2} k h}{m_1 g} \right)$$

Örnek : Bir blok, h yüksekliğindeki sürtünmesiz bir rampadan ilk hızsız kaymaya başlıyor ve karşıda bulunan ve eğim açısı θ olan bir eğik düzlemi tırmanıyor. Blok ile eğik düzlemin arasındaki kinetik sürtünme katsayısı μ_k olduğuna göre, blok bu düzlemde ne kadar yükselir?

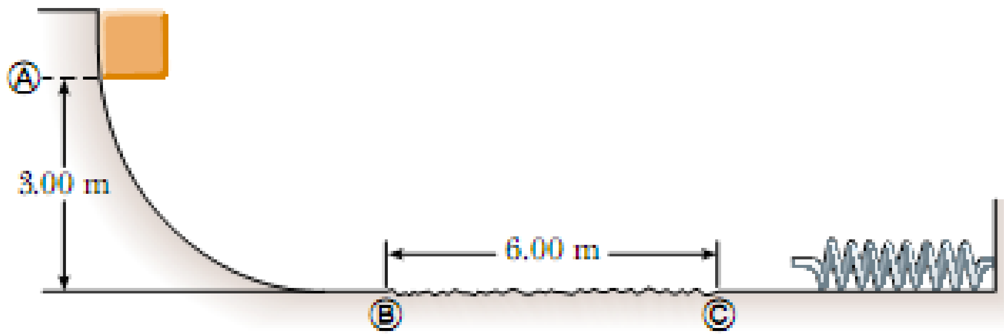


$$\Delta K = 0 \;\; ; \;\; \Delta E = \Delta U_g = -\mu_k mg\cos\theta\left(L\right) \qquad ; \qquad L = \frac{y_{max}}{\sin\theta}$$

$$\Delta U_g = U_s - U_i = mgy_{max} - mgh$$

$$-\mu_k mg\cos\theta\left(\frac{y_{max}}{\sin\theta}\right) = mgy_{max} - mgh \rightarrow y_{max} = \frac{h}{\left(1+\mu_k\cot\theta\right)}$$

Örnek : Kütlesi 10 kg olan blok, ilk hızsız olarak *A* noktasından bırakılıyor. Uzunluğu 6 m olan sürtünmeli bir bölgeyi ($\overline{BC}$ arası) geçtikten sonra, yay sabiti k = 2250 N/m yaya çarparak 30 cm sıkıştırıyor. $\overline{BC}$ arası bölgenin sürtünme katsayısını bulunuz.

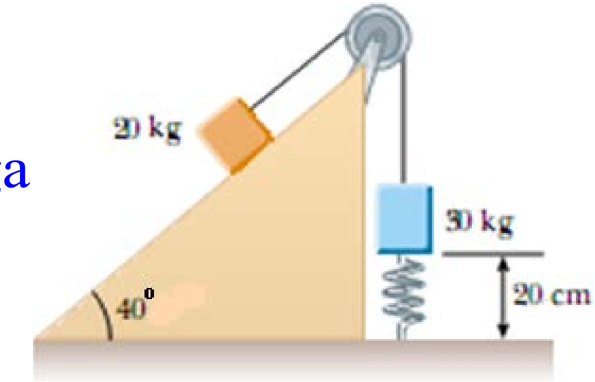


$$\Delta K = 0 \;\; ; \;\; \Delta E = \Delta U_g + \Delta U_{yay} = -\mu_k mgL$$

$$\Delta U_g = U_s - U_i = 0 - mgh \;\; ; \;\; \Delta U_{yay} = \frac{1}{2}kx_m^2 - 0$$

$$-\mu_k mgL = \frac{1}{2}kx_m^2 - mgh \rightarrow \mu_k = \frac{mgh - \frac{1}{2}kx_m^2}{mgL} = 0.328$$

Örnek : Eğik düzlem üzerindeki $m_1 = 20$ kg'lık blok, hafif bir iple, $m_2 = 30$ kg'lık başka bir bloğa bağlıdır. m_2 bloğu da, şekildeki gibi yay sabiti 250 N/m olan bir yaya bağlıdır. Bu haliyle yay uzamasızdır ve eğik düzlem sürtünmesizdir. m_1 bloğu eğik düzlemden aşağı doğru 20 cm çekilip (m_2 bloğu yerden 40 cm yüksekte) ilk hızsız bırakılıyor. Yay uzamasız hale geldiğinde blokların hızı ne olur?



$$\Delta E = \Delta K + \Delta U_g + \Delta U_{yay} = 0 \quad \text{(Tüm kuvvetler korunumlu olduğu için)}$$

$$\Delta K = \left(\frac{1}{2}m_1 v^2 + \frac{1}{2}m_2 v^2\right) \; ; \Delta U_g = (m_1 g L \sin\theta - m_2 g L) \quad ; \Delta U_{yay} = -\frac{1}{2}kL^2$$

$$\frac{1}{2}(m_1 + m_2)v^2 + (m_1 \sin\theta - m_2)gL - \frac{1}{2}kL^2 = 0$$

$L = 20$ cm
$k = 250$ N/m
$m_1 = 20$ kg
$m_2 = 30$ kg

$$v = \sqrt{\frac{kL^2 + 2(m_2 - m_1 \sin\theta)gL}{m_1 + m_2}} = \sqrt{\frac{10 + 67.2}{50}} = 1.24 \text{ m/s}$$

BÖLÜM-9
Kütle Merkezi ve Çizgisel Momentum

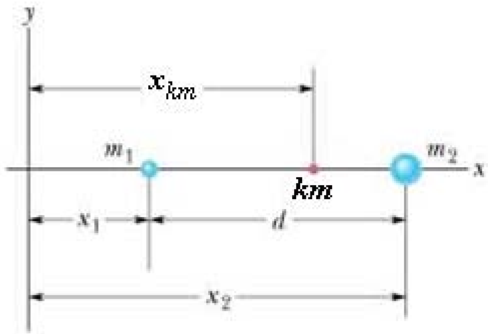
Bu bölümde aşağıdaki konulara değinilecektir:

- **Bir parçacık sisteminin kütle merkezi**
- **Kütle merkezinin hızı ve ivmesi**
- **Bir parçacığın ve parçacık sistemlerinin çizgisel momentumu**

Kütle merkezinin nasıl hesaplanacağını ve çizgisel momentumun korunumu ilkesini öğreneceğiz.

Son olarak, çizgisel momentumun korunum ilkesi yardımıyla bir ve iki boyutta çarpışma problemlerini çözeceğiz.

Kütle Merkezi :



x-ekseni üzerinde x_1 ve x_2 noktalarında bulunan, sırasıyla, m_1 ve m_2 kütlelerine sahip iki noktasal cismin kütle merkezi,

$$x_{\mathrm{km}} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2}$$

bağıntısı ile verilir.

x-ekseni üzerine yerleştirilmiş n tane parçacık durumunda bu bağıntı:

$$x_{\mathrm{km}} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + m_3 x_3 + \ldots + m_n x_n}{m_1 + m_2 + m_3 + \ldots + m_n} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + m_3 x_3 + \ldots + m_n x_n}{M} = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{n} m_i x_i$$

olur. Burada M sistemdeki parçacıkların toplam kütlesidir.

Üç-boyutlu uzayda (xyz-koordinat sistemi) parçacık sisteminin kütle merkezi de, kütlesi m_i olan parçacığın konum vektörü $\vec{r}_i$ olmak üzere, daha genel bir ifade olan

$$\vec{r}_{\mathrm{km}} = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{n} m_i \vec{r}_i$$ bağıntısına sahiptir.

Konum vektörü $\vec{r}_{\text{km}} = x_{\text{km}}\hat{\text{i}} + y_{\text{km}}\hat{\text{j}} + z_{\text{km}}\hat{\text{k}}$ biçiminde de yazılabileceğinden, kütle merkezinin koordinatları

$$x_{\text{km}} = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{n} m_i x_i \qquad y_{\text{km}} = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{n} m_i y_i \qquad z_{\text{km}} = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{n} m_i z_i$$

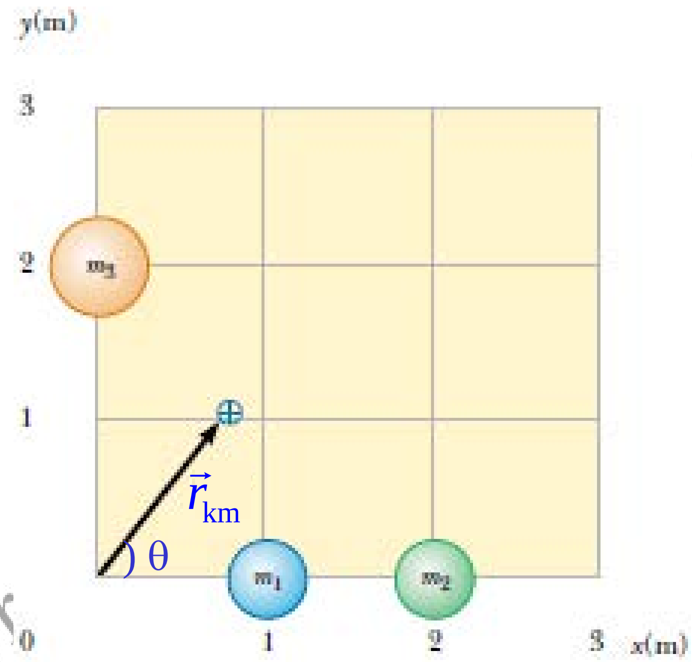
ile verilebilir.

Bir parçacık sisteminin kütle merkezi, sistemdeki tüm parçacıkların toplandığı bir nokta ve sistem üzerine etki eden tüm dış kuvvetler o noktaya etkiyormuş gibi düşünülebilir.

Bir beyzbol sopasının şekildeki gibi havaya fırlatıldığını ve yer-çekimi kuvvetinin etkisi altındaki hareketini düşünelim. Sopanın kütle merkezi siyah bir nokta ile işaretlenmiştir. Kütle merkezinin hareketine bakıldığında, bunun bir eğik atış hareketi olduğu kolayca görülür.

Ancak, kütle merkezi dışındaki noktaların hareketleri oldukça karmaşıktır.

Örnek : Konumları şekilde verilen $m_1 = m_2 = 1.0$ kg ve $m_3 = 2$ kg kütleli üç parçacıktan oluşan sistemin kütle merkezini bulunuz.



$$x_{km} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i x_i}{M} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + m_3 x_3}{m_1 + m_2 + m_3} = \frac{(1)(1) + (1)(2) + (2)(0)}{1+1+2} = 0.75 \text{ m}$$

$$y_{km} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i y_i}{M} = \frac{m_1 y_1 + m_2 y_2 + m_3 y_3}{m_1 + m_2 + m_3} = \frac{(1)(0) + (1)(0) + (2)(2)}{1+1+2} = 1 \text{ m}$$

$$\vec{r}_{km} = 0.75\hat{\mathrm{i}} + \hat{\mathrm{j}} \text{ m}$$

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{1}{0.75}\right) = 53.1^{\circ}$$

Örnek : xy-düzlemindeki konumları $\vec{r}_1 = 12\hat{\mathrm{j}}$ (cm), $\vec{r}_2 = -12\hat{\mathrm{i}}$ (cm) ve $\vec{r}_3 = 12\hat{\mathrm{i}} - 12\hat{\mathrm{j}}$ (cm) olan cisimlerin kütleleri de sırasıyla, $m_1 = 0.4$ kg ve $m_2 = m_3 = 0.8$ kg ile veriliyor. Sistemin kütle merkezini bulunuz.

$$x_{\mathrm{km}} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i x_i}{M} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + m_3 x_3}{m_1 + m_2 + m_3} = \frac{(0.4)(0) + (0.8)(-12) + (0.8)(12)}{0.4 + 0.8 + 0.8} = 0$$

$$y_{\mathrm{km}} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i y_i}{M} = \frac{m_1 y_1 + m_2 y_2 + m_3 y_3}{m_1 + m_2 + m_3} = \frac{(0.4)(12) + (0.8)(0) + (0.8)(-12)}{0.4 + 0.8 + 0.8} = -2.4 \text{ cm}$$

$$\vec{r}_{\mathrm{km}} = x_{km}\hat{\mathrm{i}} + y_{km}\hat{\mathrm{j}} = -2.4\hat{\mathrm{j}} \text{ cm}$$

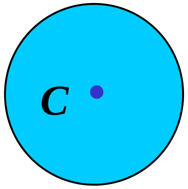
Katı Cisimlerin Kütle Merkezi :

Maddenin, içinde homojen bir şekilde dağıldığı sistemlere katı cisimler diyebiliriz. Böyle cisimlerin kütle merkezlerini bulmak için, kesikli toplama işlemi yerine sürekli toplama işlemi olan integrali kullanacağız:

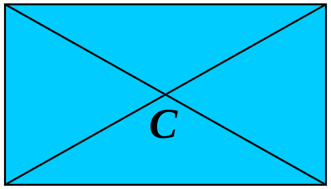
$$x_{\mathrm{km}} = \frac{1}{M}\int x\,dm \qquad y_{\mathrm{km}} = \frac{1}{M}\int y\,dm \qquad z_{\mathrm{km}} = \frac{1}{M}\int z\,dm$$

Cisimlerin simetrisi (simetri noktası, simetri ekseni, simetri düzlemi) uygun ise integral alma işlemine gerek kalmayabilir. Kütle merkezi simetri elemanı üzerinde olacaktır.

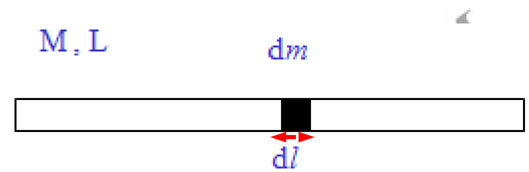
Örneğin bir kürenin kütle merkezi, kürenin merkezidir.



Bir dikdörtgenin kütle merkezi, karşılıklı köşegenleri birleştiren doğruların kesişim noktasıdır.

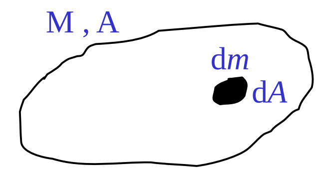


Katı cisim L uzunluğuna ve M kütlesine sahip bir çubuk ise, kütle yoğunluğu çizgiseldir:



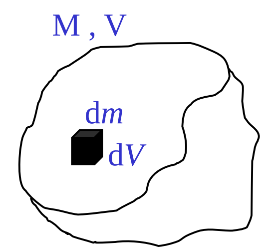
$$\lambda = \frac{dm}{dl} = \frac{M}{L} \quad \rightarrow \quad x_{\text{km}} = \frac{1}{M}\int x\lambda dx$$

Katı cisim A yüzey alanına ve M kütlesine sahip ince bir plaka ise, kütle yoğunluğu yüzeyseldir:



$$\sigma = \frac{dm}{dA} = \frac{M}{A} \quad \rightarrow \quad x_{\text{km}} = \frac{1}{M}\int x\sigma dA \;;\; y_{\text{km}} = \frac{1}{M}\int y\sigma dA$$

Katı cisim V hacmine ve M kütlesine sahip ise, kütle yoğunluğu hacimseldir:

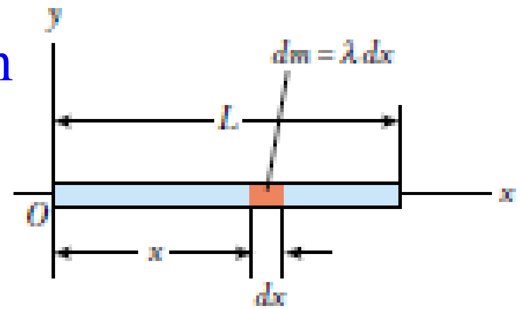


$$\rho = \frac{dm}{dV} = \frac{M}{V} \quad \rightarrow \quad x_{\text{km}} = \frac{1}{M}\int x\rho dV \;;\; y_{\text{km}} = \frac{1}{M}\int y\rho dV \;;\; z_{\text{km}} = \frac{1}{M}\int z\rho dV$$

Örnek :

a–) Kütlesi M ve uzunluğu L olan homojen bir çubuğun kütle merkezini bulunuz.

b–) Çubuğun çizgisel kütle yoğunluğu $\lambda = \alpha x$ ise, kütle merkezini bulunuz. (x çubuğun sol ucundan olan uzaklık, α da bir sabittir).



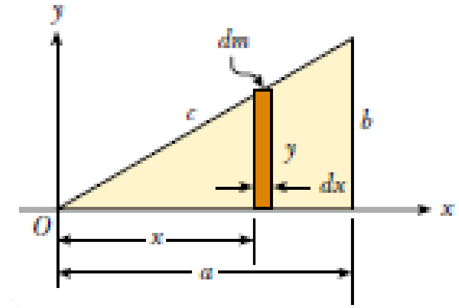
$$a\text{–)}\; x_{\text{km}} = \frac{1}{M}\int x\,dm = \frac{1}{M}\int_0^L x\lambda\,dx = \frac{\lambda}{2M}\left[x^2\right]_0^L = \frac{\lambda L^2}{2M} = \frac{L^2}{2M}\left(\frac{M}{L}\right) = \frac{L}{2}$$

$$b\text{–)}\; x_{\text{km}} = \frac{1}{M}\int x\,dm = \frac{1}{M}\int_0^L x\lambda\,dx = \frac{1}{M}\int_0^L x(\alpha x)\,dx = \frac{\alpha}{3M}\left[x^3\right]_0^L = \frac{\alpha L^3}{3M}$$

$$M = \int_0^L \lambda\,dx = \int_0^L (\alpha x)\,dx = \frac{\alpha}{2}\left[x^2\right]_0^L = \frac{\alpha L^2}{2}$$

$$x_{\text{km}} = \frac{\alpha L^3}{3M} = \frac{L^3}{3M}\left(\frac{2M}{L^2}\right) = \frac{2}{3}L$$

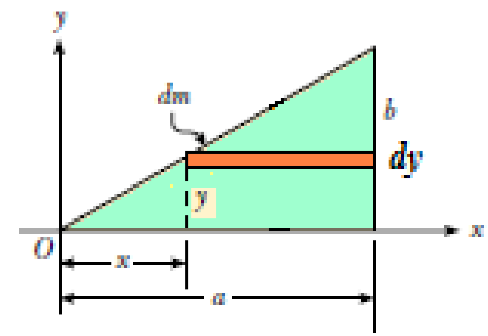
Örnek : Kütlesi M ve boyutları şekilde verilen dik üçgen biçimindeki plakanın kütle merkezini bulunuz.



$$dm = \frac{M}{\left(\frac{1}{2}ab\right)} \times (ydx) = \frac{2M}{ab} \times (ydx) \quad \text{ve} \quad \frac{y}{x} = \frac{b}{a}$$

$$x_{\text{km}} = \frac{1}{M}\int xdm = \frac{2}{ab}\int_0^a xydx = \frac{2}{ab}\int_0^a x\left(\frac{b}{a}x\right)dx = \frac{2}{a^2}\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^a = \frac{2}{3}a$$

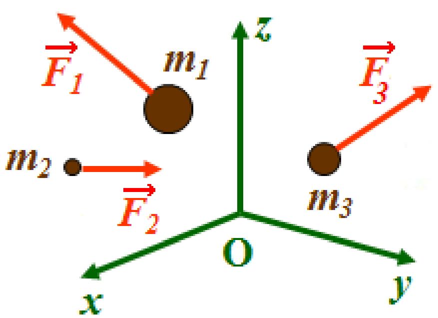
$$dm = \frac{M}{\left(\frac{1}{2}ab\right)} \times (a-x)dy = \frac{2M}{ab} \times (a-x)dy \quad \text{ve} \quad \frac{b-y}{a-x} = \frac{b}{a}$$



$$y_{\text{km}} = \frac{1}{M}\int ydm = \frac{2}{ab}\int_0^b y(a-x)dy = \frac{2}{ab}\int_0^b y\frac{a}{b}(b-y)dy$$

$$y_{\text{km}} = \frac{2}{b^2}\left[b\frac{y^2}{2} - \frac{y^3}{3}\right]_0^b = \frac{1}{3}b$$

Parçacık Sistemlerinde Newton'un İkinci Yasası :



Kütleleri $m_1, m_2, m_3, ..., m_n$ ve konum vektörleri $\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{r}_3, ..., \vec{r}_n$ olan n parçacıklı bir sistem düşünelim. Kütle merkezinin konum vektörü şu ifadeyle verilir:

$$\vec{r}_{\text{km}} = \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2 + m_3\vec{r}_3 + ... + m_n\vec{r}_n}{M}$$

Her iki tarafın zamana göre türevi alınırsa,

$$\frac{d}{dt}\vec{r}_{\text{km}} = \frac{1}{M}\left(m_1\frac{d}{dt}\vec{r}_1 + m_2\frac{d}{dt}\vec{r}_2 + m_3\frac{d}{dt}\vec{r}_3 + ... + m_n\frac{d}{dt}\vec{r}_n \right)$$

$$M\vec{v}_{\text{km}} = m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 + m_3\vec{v}_3 + ... + m_n\vec{v}_n$$

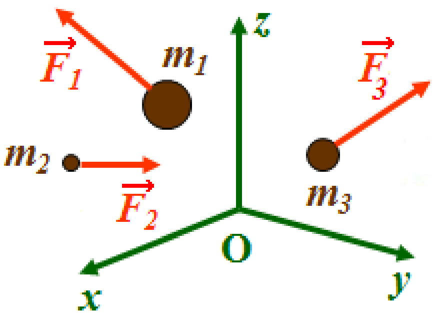
bulunur. Burada $\vec{v}_{\text{km}}$ kütle merkezinin hızı, $\vec{v}_i$' de i. parçacığın hızıdır.

Her iki tarafın bir kez daha zamana göre türevi alınırsa,

$$\frac{d}{dt}\vec{v}_{\text{km}} = \frac{1}{M}\left(m_1\frac{d}{dt}\vec{v}_1 + m_2\frac{d}{dt}\vec{v}_2 + m_3\frac{d}{dt}\vec{v}_3 + ... + m_n\frac{d}{dt}\vec{v}_n \right)$$

$$M\vec{a}_{\text{km}} = m_1\vec{a}_1 + m_2\vec{a}_2 + m_3\vec{a}_3 + ... + m_n\vec{a}_n$$

bulunur. Burada $\vec{a}_{\text{km}}$ kütle merkezinin ivmesi, $\vec{a}_i$' de i. parçacığın ivmesidir.



i. parçacığa etkiyen kuvvet $\vec{F}_i$' dir ve Newton'un ikinci yasası gereği,

$$m_i\vec{a}_i = \vec{F}_i \rightarrow M\vec{a}_{\text{km}} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \ldots + \vec{F}_n$$

yazılabilir.

$\vec{F}_i$ kuvveti dış ve iç olmak üzere iki bileşene ayrılabilir: $\vec{F}_i = \vec{F}_i^{\text{dış}} + \vec{F}_i^{\text{iç}}$

Bu durumda yukarıdaki eşitlik şöyle bir forma dönüşür:

$$M\vec{a}_{\text{km}} = \left(\vec{F}_1^{\text{dış}} + \vec{F}_1^{\text{iç}}\right) + \left(\vec{F}_2^{\text{dış}} + \vec{F}_2^{\text{iç}}\right) + \left(\vec{F}_3^{\text{dış}} + \vec{F}_3^{\text{iç}}\right) + \ldots + \left(\vec{F}_n^{\text{dış}} + \vec{F}_n^{\text{iç}}\right)$$

$$M\vec{a}_{\text{km}} = \left(\vec{F}_1^{\text{dış}} + \vec{F}_2^{\text{dış}} + \vec{F}_3^{\text{dış}} + \ldots + \vec{F}_n^{\text{dış}}\right) + \left(\vec{F}_1^{\text{iç}} + \vec{F}_2^{\text{iç}} + \vec{F}_3^{\text{iç}} + \ldots + \vec{F}_n^{\text{iç}}\right)$$

Eşitliğin sağındaki ilk parantez, sistem üzerine etki eden net kuvvettir ($\vec{F}_{\text{net}}$).

İkinci parantez ise, Newton'un üçüncü yasası gereği sıfırdır. Bu durumda, kütle merkezinin hareket denklemi $M\vec{a}_{\text{km}} = \vec{F}_{\text{net}}$' dir ve bileşenler cinsinden

$$F_{\text{net},x} = Ma_{\text{km},x} \qquad F_{\text{net},y} = Ma_{\text{km},y} \qquad F_{\text{net},z} = Ma_{\text{km},z}$$

bağıntıları ile verilir.

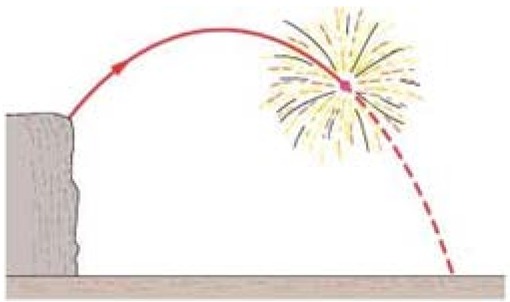
Yandaki eşitlikler, bir parçacık sisteminin kütle merkezinin, sistemdeki tüm parçacıkların toplandığı ve tüm dış kuvvetlerin etkidiği bir noktasal kütle gibi hareket edeceğini göstermektedir.

$$\boxed{M\vec{a}_{\text{km}} = \vec{F}_{\text{net}}}$$

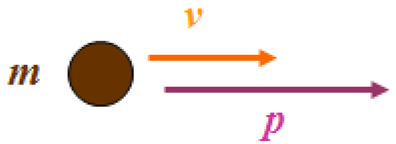
$$\boxed{\begin{aligned} F_{\text{net},x} &= Ma_{\text{km},x} \\ F_{\text{net},y} &= Ma_{\text{km},y} \\ F_{\text{net},z} &= Ma_{\text{km},z} \end{aligned}}$$

Şekildeki örneği ele alalım.

* Yerden ateşlenen bir roket yerçekimi kuvvetinin etkisi altında parabolik bir yol izler.
* Belli bir anda roket patlar ve birçok parçaya ayrılır.
* Patlama olmasaydı, roketin izleyeceği yol kesikli çizgiyle gösterilen yörünge olacaktı.
* Patlamada ortaya çıkan kuvvetler iç kuvvetler olduğundan vektörel toplamı sıfır olacaktır.



* Roket üzerinde etkin olan kuvvet hala yerçekimi kuvvetidir.
* Bunun anlamı, patlamada ortaya çıkan parçalar da yerçekimi kuvveti etkisiyle parabolik bir yörüngede hareket ederler.
* Dolayısıyla kütle merkezinin yörüngesi, patlamadan önceki yörüngesiyle aynı olacaktır.



$$\boxed{\vec{p} = m\vec{v}}$$

Çizgisel Momentum :

Kütlesi m ve hızı $\vec{v}$ olan bir cismin çizgisel momentumu

$$\vec{p} = m\vec{v}$$

ile tanımlanır. SI sistemindeki birimi kg.m/s' dir.

Momentum ifadesinin her iki tarafının zamana göre türevi alınırsa,

$$\vec{p} = m\vec{v} \rightarrow \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(m\vec{v}\right) = m\frac{d\vec{v}}{dt} = m\vec{a} = \vec{F}_{\text{net}}$$

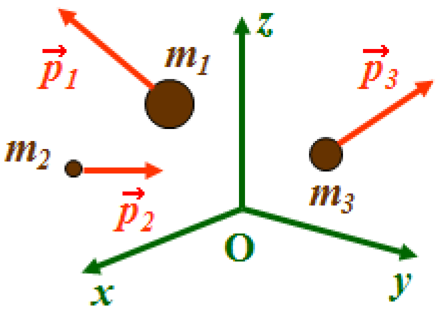
$$\vec{F}_{\text{net}} = \frac{d\vec{p}}{dt}$$ bulunur.

Bu ifade Newton' un ikinci yasasının bir başka ifade şeklidir.

Sözlü olarak: "Bir cismin çizgisel momentumunun değişim hızı, o cisme etkiyen net kuvvetin büyüklüğüne eşittir ve onunla (net kuvvetle) aynı yöndedir.

Bu eşitlik, bir cismin çizgisel momentumunun ancak bir dış kuvvetle değişebileceğini göstermektedir. Dış kuvvet sıfır ise, cismin çizgisel momentumu değişmez.

Parçacık Sistemlerinin Çizgisel Momentumu :



i. parçacığın kütlesi m_i, hızı $\vec{v}_i$ ve çizgisel momentumu $\vec{p}_i$ olsun. n tane parçacıktan oluşan bir sistemin çizgisel momentumu şu şekilde verilir:

$$\vec{P} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \vec{p}_3 + \ldots + \vec{p}_n = m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 + m_3\vec{v}_3 + \ldots + m_n\vec{v}_n = M\vec{v}_{\text{km}}$$

Bir parçacık sisteminin çizgisel momentumu, sistemdeki parçacıkların toplam kütlesi (M) ile kütle merkezinin hızının ($\vec{v}_{\text{km}}$) çarpımına eşittir.

Her iki tarafın zamana göre türevi alınırsa,

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(M\vec{v}_{\text{km}}\right) = M\vec{a}_{\text{km}} = \vec{F}_{\text{net}}$$

bulunur. Bu eşitlik, parçacık sisteminin çizgisel momentumunun ancak bir dış kuvvetle değişecebileceğini göstermektedir.

Dış kuvvet sıfır ise, parçacık sisteminin çizgisel momentumu değişmez.

Örnek : Kütlesi 2 kg olan bir cismin hızı $(2\hat{\mathrm{i}}-3\hat{\mathrm{j}})$ m/s ve kütlesi 3 kg olan bir cismin hızı da $(\hat{\mathrm{i}}+6\hat{\mathrm{j}})$ m/s' dir. İki parçacıktan oluşan bu sistemin kütle merkezinin hızını ve momentumunu bulunuz.

$$\vec{v}_{\mathrm{km}}=\frac{\sum_{i=1}^{N} m_i\vec{v}_i}{M}=\frac{2(2\hat{\mathrm{i}}-3\hat{\mathrm{j}})+3(\hat{\mathrm{i}}+6\hat{\mathrm{j}})}{2+3}=1.4\hat{\mathrm{i}}+2.4\hat{\mathrm{j}}\ \mathrm{m/s}$$

$$\vec{P}_{\mathrm{km}}=M\vec{v}_{\mathrm{km}}=5\left(1.4\hat{\mathrm{i}}+2.4\hat{\mathrm{j}}\right)=7\hat{\mathrm{i}}+12\hat{\mathrm{j}}\ \mathrm{kg\cdot m/s}$$

Örnek : Yerden yukarı doğru ateşlenen bir roket 1000 m yükseklikte 300 m/s hıza sahipken patlayarak üç eşit parçaya bölünüyor. Birinci parça 450 m/s hızla aynı yönde, ikincisi 240 m/s hızla doğuya gidiyor. Üçüncü parçanın hızı nedir?

$$m_1=m_2=m_3=\frac{M}{3}$$

$$M\vec{v}_i=m_1\vec{v}_1+m_2\vec{v}_2+m_3\vec{v}_3\rightarrow\vec{v}_3=3\vec{v}_i-\vec{v}_1-\vec{v}_2$$

$$\vec{v}_3=\left(900-450\right)\hat{K}-240\hat{D}=450\hat{K}-240\hat{D}\ \mathrm{m/s}$$

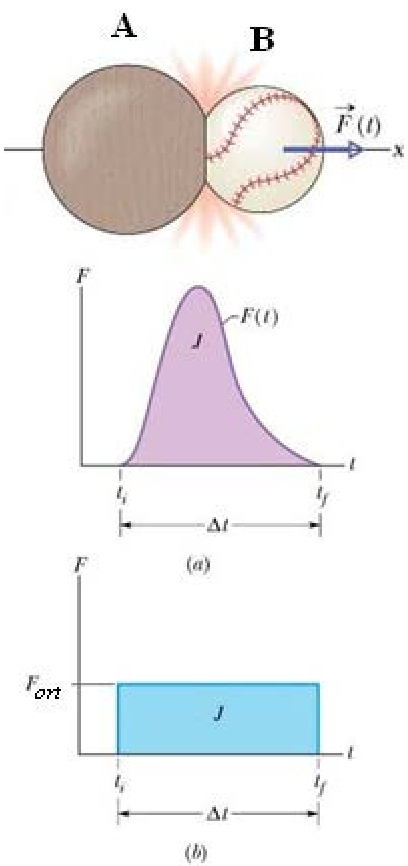
Çarpışma ve İtme :

Bir cisme sıfırdan farklı bir dış kuvvet etkidiğinde cismin çizgisel momentumunun değişebileceğini öğrendik.

∗ İki cismin çarpışması sürecinde böyle kuvvetler ortaya çıkar.

∗ Bu kuvvetlerin şiddetleri çok büyük ancak, etkime süreleri çok kısadır.

∗ Çarpışan cisimlerin çizgisel momentumlarındaki değişimin kaynağıdırlar.



İki cisim arasındaki çarpışmayı düşünelim. Çarpışma, cisimlerin temas ettiği t_i anında başlar ve temasın kesildiği t_s anında biter. Cisimler çarpışma süresince birbirlerine $\vec{F}(t)$ ile verilen değişken bir kuvvet uygularlar. Bu kuvvetin değişimi Şekil-*a*' da verilmiştir.

$\vec{F}(t) = \dfrac{d\vec{p}}{dt}$ ile verilir. Burada $\vec{p}$, cisimlerden birisinin çizgisel momentumudur.

$$d\vec{p} = \vec{F}(t)dt \rightarrow \int_{t_i}^{t_s} d\vec{p} = \int_{t_i}^{t_s} \vec{F}(t)dt$$

$$\int_{t_i}^{t_s} d\vec{p} = \vec{p}_s - \vec{p}_i = \Delta\vec{p} = \text{ momentumdaki değişim}$$

$$\vec{J} = \int_{t_i}^{t_s} \vec{F}(t)dt = \text{"itme" veya "impuls" olarak tanımlanır.}$$

İtme, çarpışan bir cismin çizgisel momentumundaki değişime eşittir: $\vec{J} = \Delta\vec{p}$

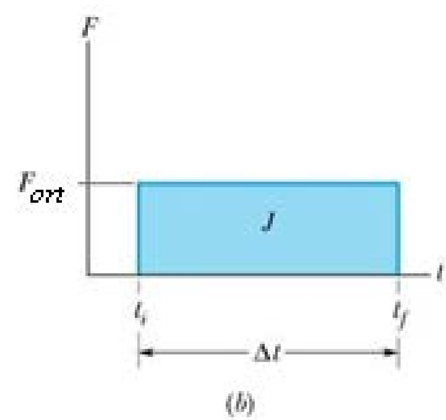
Genellikle, çarpışma süresince cisimler arasındaki etkileşme kuvvetinin zamanla nasıl değiştiğini bilemeyiz. Ancak, itmenin büyüklüğü kuvvet-zaman grafiğinde eğri altında kalan alana eşittir.

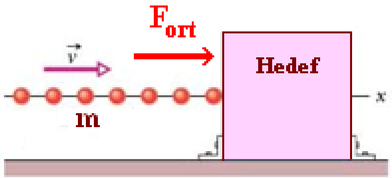
Aynı alanı verecek şekilde ortalama bir kuvvet (F_{ort}) bulursak, cisimlerin birbirlerine uyguladığı itmeyi,

$J = F_{\text{ort}}\Delta t = F_{\text{ort}}(t_s - t_i)$

şeklinde yazabiliriz.

Geometrik olarak, $F(t)$-t grafiği altında kalan alan ile F_{ort}-t grafiği altında kalan alan aynıdır (Şekil-*b*)





Seri Çarpışmalar :

Kütlesi m ve $+x$-yönünde hızı $\vec{v}$ olan özdeş parçacıkların sürekli bir şekilde sabitlenmiş bir hedefe çarptığını düşünelim.

Δt süresince n tane parçacığın hedefe çarptığını varsayalım. Herbir parçacığın momentumundaki değişim Δp olacaktır. Herbir çarpışmada $-\Delta p$ kadarlık bir momentum hedefe aktarılacaktır.

Δt süresince hedef üzerindeki itme (impuls) $J = -n\Delta p$ olduğundan,

$F_{ort} = \dfrac{J}{\Delta t} = \dfrac{-n\Delta p}{\Delta t} = -\dfrac{n}{\Delta t} m\Delta v$ olur. Burada Δv, çarpışma nedeniyle herbir parçacığın hızındaki değişim miktarıdır. Dolayısıyla,

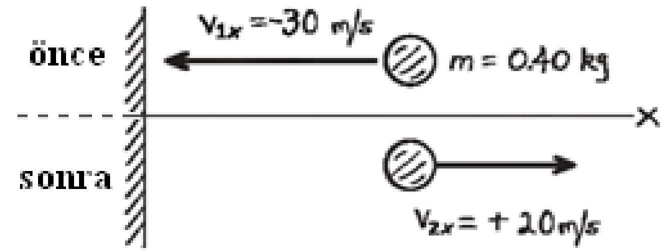
$$F_{ort} = -\frac{\Delta m}{\Delta t}\Delta v$$

yazılabilir. Buradaki $\dfrac{\Delta m}{\Delta t}$, birim zamanda hedefe çarpan kütle miktarıdır.

Çarpışmadan sonra parçacıklar duruyorsa, $\Delta v = 0 - v = -v$ olur.

Çarpışmadan sonra parçacıklar tam olarak yansıyorsa, $\Delta v = -v - v = -2v$ olur.

Örnek : Kütlesi 400 g olan bir top 30 m/s hızla, şekildeki gibi bir duvara doğru fırlatılıyor. Top duvara çarptıktan sonra geliş doğrultusunun tersi yönünde 20 m/s hıza sahiptir.



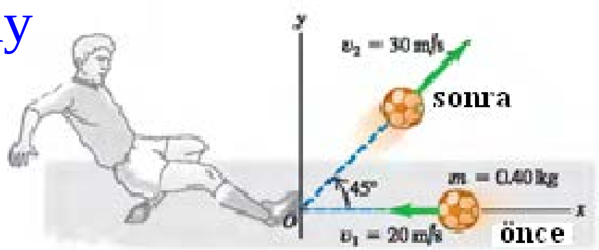
a–) Duvarın topa uyguladığı itme nedir?

b–) Topun duvarla temas süresi 10 ms ise, duvarın topa uyguladığı ortalama kuvvet nedir?

$$a\text{–)}\ \vec{J} = \Delta\vec{p} = m\vec{v}_s - m\vec{v}_i = 0.4\left[20\hat{\mathrm{i}} - (-30\hat{\mathrm{i}})\right] = 20\hat{\mathrm{i}}\ \mathrm{kg\cdot m/s}$$

$$b\text{–)}\ \vec{J} = \vec{F}_{ort}\Delta t \rightarrow \vec{F}_{ort} = \frac{\vec{J}}{\Delta t} = \frac{20\hat{\mathrm{i}}}{0.01} = 2000\hat{\mathrm{i}}\ \mathrm{N}$$

Örnek : Kütlesi 400 g olan bir top 20 m/s hızla yatay doğrultuda sola doğru geliyor. Oyuncu topa geliş doğrultusunun tersi yönünde yatayla 45^{o} ' lik bir açıyla vuruyor ve topa 30 m/s' lik bir hız kazandırıyor. Top ile oyuncu arasındaki temas süresi 10 ms olduğuna göre,



a–) Oyuncunun topa uyguladığı itme nedir?

b–) Oyuncunun topa uyguladığı ortalama kuvvet nedir?

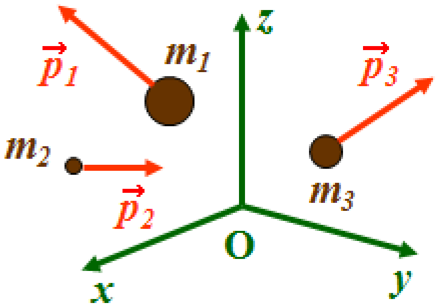
$$a\text{–)}\ \vec{J} = \Delta\vec{p} = m\vec{v}_s - m\vec{v}_i = 0.4\left[30\cos 45\hat{\mathrm{i}} + 30\sin 45\hat{\mathrm{j}} - (-20\hat{\mathrm{i}})\right]$$

$$\vec{J} = 16.5\hat{\mathrm{i}} + 8.5\hat{\mathrm{j}}\ \mathrm{kg\cdot m/s}$$

$$b\text{–)}\ \vec{J} = \vec{F}_{ort}\Delta t \rightarrow \qquad \vec{F}_{ort} = \frac{\vec{J}}{\Delta t} = \frac{16.5\hat{\mathrm{i}} + 8.5\hat{\mathrm{j}}}{0.01} = 1650\hat{\mathrm{i}} + 850\hat{\mathrm{j}}\ \mathrm{N}$$

$$F_{ort} = \sqrt{(1650)^2 + (850)^2} = 1856\ \mathrm{N}\ ;\ \theta = \tan^{-1}\left(\frac{850}{1650}\right) = 27.25^{o}$$

Çizgisel Momentumun Korunumu :



Bir parçacık sistemi üzerine etkiyen net kuvvet

$$\vec{F}_{\text{net}} = 0 \rightarrow \frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{F}_{\text{net}} = 0 \rightarrow \vec{P} = \text{ sabit}$$

Bir parçacık sistemi üzerine dış kuvvet etkimiyorsa, toplam çizgisel momentum $\vec{P}$ değişmez.

$$\left[\begin{array}{l}\textbf{Herhangi bir } \boldsymbol{t_i} \textbf{ anındaki}\\ \textbf{çizgisel momentum}\end{array}\right] = \left[\begin{array}{l}\textbf{Herhangi bir } \boldsymbol{t_s} \textbf{ anındaki}\\ \textbf{çizgisel momentum}\end{array}\right]$$

Çizgisel momentumun korunumu önemli bir ilkedir ve çarpışma problemlerinin çözümünde büyük kolaylık sağlar.

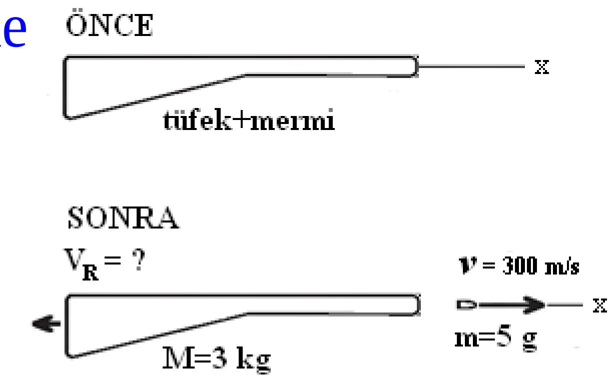
Not : Bir sistem üzerine etkiyen dış kuvvet $\vec{F}_{\text{net}} = 0$ ise, iç kuvvetler ne kadar büyük olursa olsun, çizgisel momentum her zaman korunur.

Örnek : Bir nişancı 3 kg' lık bir tüfeği geri tepmesine izin verecek şekilde tutuyor. Yatay doğrultuda nişan alarak 5 g' lık mermiyi 300 m/s hızla eteşliyor.

a–) Tüfeğin geri tepme hızını,

b–) Merminin ve tüfeğin momentumunu,

c–) Merminin ve tüfeğin kinetik enerjisini bulunuz.



$$a–)\ \vec{P} = m\vec{v} + M\vec{V}_R = 0 \rightarrow \vec{V}_R = -\frac{m\vec{v}}{M} = -\left(\frac{0.005}{3}\right)300\hat{\text{i}} = -0.5\hat{\text{i}}\ \text{m/s}$$

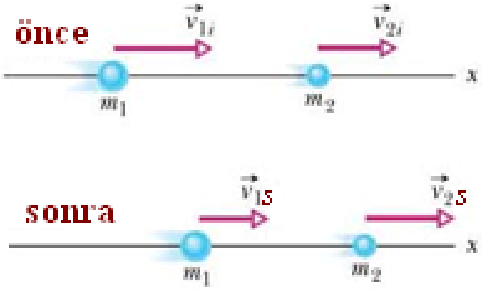
$$b–)\ \vec{P}_m = m\vec{v} = (0.005)300\hat{\text{i}} = 1.5\hat{\text{i}}\ \text{kg}\cdot\text{m/s}$$

$$\vec{P}_R = M\vec{V}_R = (3)\left(-0.5\hat{\text{i}}\right) = -1.5\hat{\text{i}}\ \text{kg}\cdot\text{m/s}$$

$$c–)\ K_m = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}(0.005)(300)^2 = 226\ \text{J}$$

$$K_R = \frac{1}{2}mV_R^2 = \frac{1}{2}(3)(0.5)^2 = 0.375\ \text{J}$$

Çarpışmalarda Momentum ve Kinetik Enerji :



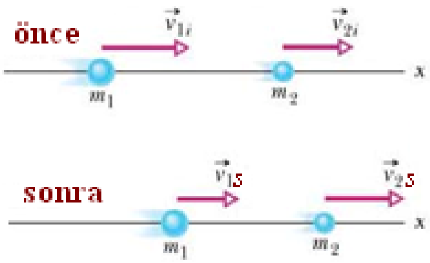
Kütleleri m_1 ve m_2, ilk hızları $\vec{v}_{1i}$ ve $\vec{v}_{2i}$, çarpışmadan sonraki hızları da $\vec{v}_{1s}$ ve $\vec{v}_{2s}$ olan iki cisim düşünelim.

Sistem izole ve $\vec{F}_{\text{net}} = 0$ ise, çizgisel momentum korunur. Bu kural, çarpışmanın türüne bakılmaksızın doğrudur.

Çarpışmaları iki sınıfta toplamak mümkündür. "Esnek (elastik)" ve "Esnek olmayan" olmayan çarpışmalar.

Kinetik enerjide bir kayıp yoksa ($K_i = K_s$), çarpışma esnek çarpışmadır.
Kinetik enerjide bir kayıp varsa ($K_s < K_i$), çarpışma esnek olmayan çarpışmadır.
Bu kayıp başka bir enerji formuna dönüşmüştür deriz.

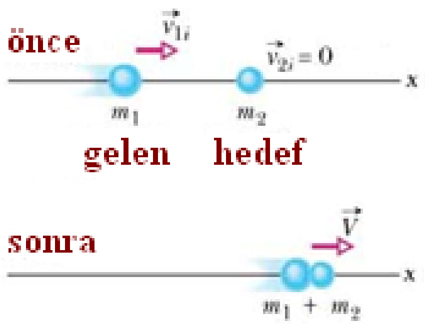
İki cisim çarpıştıktan sonra birbirine yapışıp birlikte hareket ediyorsa, cisimler "tamamen esnek olmayan" veya "esnek olmayan tam çarpışma" yapmıştır deriz. Bu tür çarpışmalar esnek olmayan çarpışma türüdür ve kinetik enerjideki kaybın en fazla olduğu çarpışma türüdür.



Bir - Boyutta Esnek Olmayan Çarpışma :

Bu tür çarpışmalarda, çarpışan cisimlerin çizgisel momentumları korunur:

$$\vec{p}_{1i} + \vec{p}_{2i} = \vec{p}_{1s} + \vec{p}_{2s} \rightarrow m_1\vec{v}_{1i} + m_2\vec{v}_{2i} = m_1\vec{v}_{1s} + m_2\vec{v}_{2s}$$

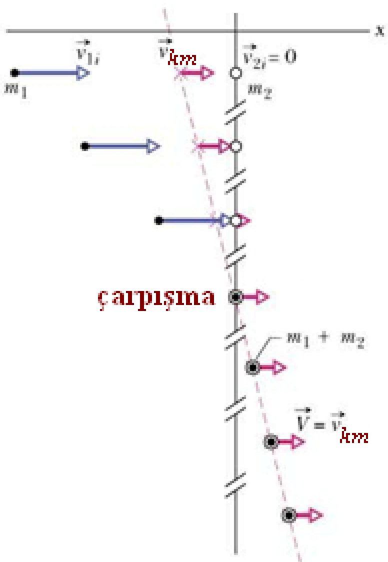


Bir - Boyutta Tamamen Esnek Olmayan Çarpışma :

Bu tür çarpışmalarda, çarpışan cisimler yapışır ve çarpışmadan sonra birlikte hareket ederler. Soldaki resimde, $\vec{v}_{2i} = 0$ özel durumu için:

$$m_1 v_{1i} = m_1 V + m_2 V \rightarrow V = \frac{m_1}{m_1 + m_2} v_{1i}$$

bulunur.

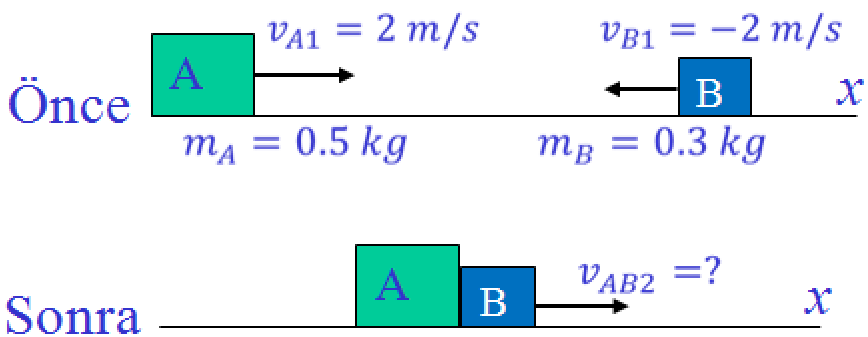


Bu tür çarpışmalarda kütle merkezinin hızı

$$\vec{v}_{\text{km}} = \frac{\vec{P}}{m_1 + m_2} = \frac{\vec{p}_{1i} + \vec{p}_{2i}}{m_1 + m_2} = \frac{m_1\vec{v}_{1i}}{m_1 + m_2}$$

ile verilir.

Örnek : Kütleleri 0.5 kg ve 0.3 kg olan iki blok şekildeki gibi birbirine doğru 2 m/s' lik hızlarla hareket ediyorlar. Çarpışmadan sonra iki blok birleşip birlikte hareket ettiklerine göre, çarpışmadan sonra blokların ortak hızı nedir? Sistemin çarpışmadan önceki ve sonraki kinetik enerjisini kıyaslayınız.



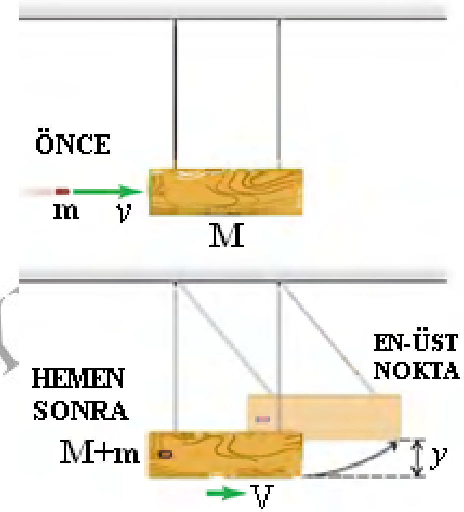
$$m_A \vec{v}_{A1} + m_B \vec{v}_{B1} = \left(m_A + m_B\right) \vec{v}_{AB2}$$

$$\vec{v}_{AB2} = \frac{(0.5)\left(2\hat{i}\right) + (0.3)(-2\hat{i})}{0.5 + 0.3} = 0.5\hat{i}\ \text{m/s}$$

$$K_1 = \frac{1}{2} m_A v_{A1}^2 + \frac{1}{2} m_B v_{B1}^2 = 1.6\ \text{J}\ ; \qquad K_2 = \frac{1}{2}\left(m_A + m_B\right) v_{AB2}^2 = 0.1\ \text{J}$$

$\Delta K = K_2 - K_1 = -1.5$ J' lük enerji kaybı vardır.

Örnek : Kütlesi m olan bir mermi, kütlesi M olan tahta bloğa doğru ateşleniyor ve tamamen esnek olmayan çarpışma yapıyorlar. Blok+mermi sistemi maksimum y yüksekliğine çıkıyor. Merminin geliş hızını, bilinenler cinsinden bulunuz.

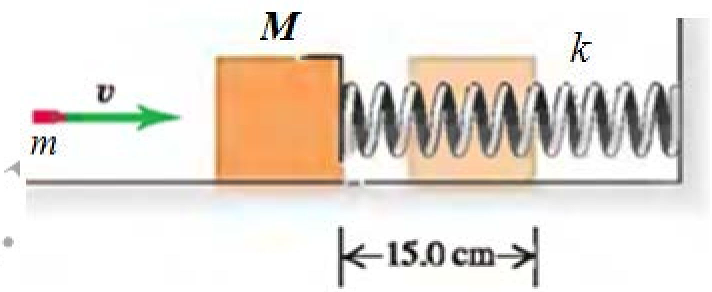


$$mv = (m+M)V \rightarrow V = \frac{mv}{m+M}$$

$$\frac{1}{2}(m+M)V^2 = (m+M)gy \rightarrow V^2 = 2gy$$

$$\left(\frac{m}{m+M}\right)^2 v^2 = 2gy \rightarrow v = \left(\frac{m+M}{m}\right)\sqrt{2gy}$$

Örnek : Bir tüfekten ateşlenen 8 g kütleli mermi yatay, sürtünmesiz bir yüzeyde bulunan ve bir yaya bağlanmış 0.992 kg kütleli tahta bloğa saplanıyor. Blok+mermi yayı 15.0 cm sıkıştırıyor. Yayı 0.25 cm uzatmak için gerekli kuvvet 0.75 N olduğuna göre, çarpışmadan hemen sonra blok+mermi sisteminin hızı nedir?



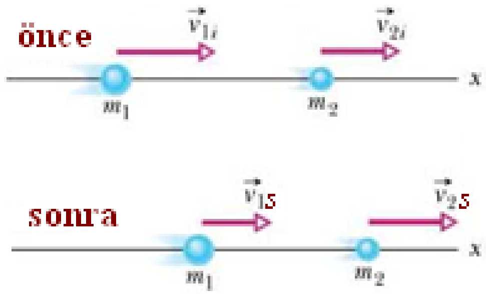
Merminin çarpışmadan önceki hızı nedir?

$$k = \frac{0.75}{0.25\times10^{-2}} = 300 \text{ N/m}$$

$$mv = (m+M)V \rightarrow V = \frac{mv}{m+M}$$ Blok+merminin çarpışmadan sonraki hızı

$$\frac{1}{2}(m+M)V^2 = \frac{1}{2}kx^2 \rightarrow V = \sqrt{\frac{k}{m+M}}x = 2.6 \text{ m/s}$$

Merminin çarpmadan önceki hızı: $v = \frac{m+M}{m}V = 325 \text{ m/s}$



Bir - Boyutta Esnek Çarpışma :

Kütleleri m_1 ve m_2, ilk hızları $\vec{v}_{1i}$ ve $\vec{v}_{2i}$, çarpışmadan sonraki hızları da $\vec{v}_{1s}$ ve $\vec{v}_{2s}$ olan iki cisim düşünelim.

Bu tür çarpışmalarda hem çizgisel momentum, hem de kinetik enerji korunur.

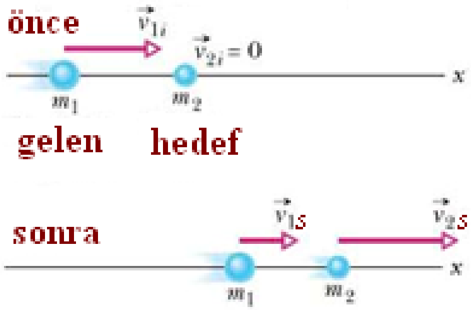
Çizgisel momentumun korunumu: $m_1\vec{v}_{1i} + m_2\vec{v}_{2i} = m_1\vec{v}_{1s} + m_2\vec{v}_{2s}$ (Eş-1)

Kinetik enerjinin korunumu : $\frac{1}{2} m_1 v_{1i}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{2i}^2 = \frac{1}{2} m_1 v_{1s}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{2s}^2$ (Eş-2)

İki bilinmeyenli ($\vec{v}_{1s}$ ve $\vec{v}_{2s}$) bu iki denklem çözülürse, cisimlerin çarpışmadan sonraki hızları için şu ifadeler elde edilir:

$$\vec{v}_{1s} = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\vec{v}_{1i} + \frac{2m_2}{m_1 + m_2}\vec{v}_{2i}$$

$$\vec{v}_{2s} = \frac{2m_1}{m_1 + m_2}\vec{v}_{1i} + \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2}\vec{v}_{2i}$$



Esnek Çarpışmada Özel Durum $\left(\vec{v}_{2i}=0\right)$:

Az önce elde edilen eşitliklerde $\vec{v}_{2i}=0$ yazarsak,

$\vec{v}_{1s}$ ve $\vec{v}_{2s}$:

$$\vec{v}_{1s}=\frac{m_1-m_2}{m_1+m_2}\vec{v}_{1i}+\frac{2m_2}{m_1+m_2}\vec{v}_{2i}\rightarrow \vec{v}_{1s}=\frac{m_1-m_2}{m_1+m_2}\vec{v}_{1i}$$

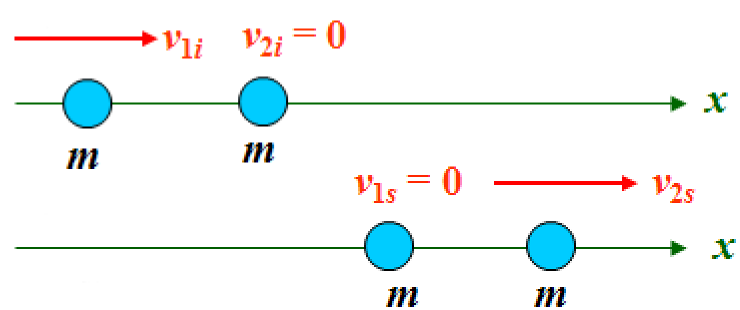
$$\vec{v}_{2s}=\frac{2m_1}{m_1+m_2}\vec{v}_{1i}+\frac{m_2-m_1}{m_1+m_2}\vec{v}_{2i}\rightarrow \vec{v}_{2s}=\frac{2m_1}{m_1+m_2}\vec{v}_{1i}$$

bulunur. Aşağıdaki özel durumlara göz atalım:

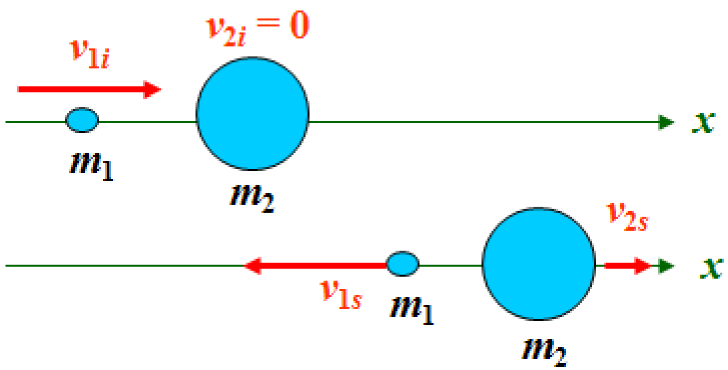
1. $m_1=m_2=m$

$$\vec{v}_{1s}=\frac{m_1-m_2}{m_1+m_2}\vec{v}_{1i}=\frac{m-m}{m+m}\vec{v}_{1i}=0$$

$$\vec{v}_{2s}=\frac{2m_1}{m_1+m_2}\vec{v}_{1i}=\frac{2m}{m+m}\vec{v}_{1i}=\vec{v}_{1i}$$



Çarpışan cisimler hızlarını değiştirirler.



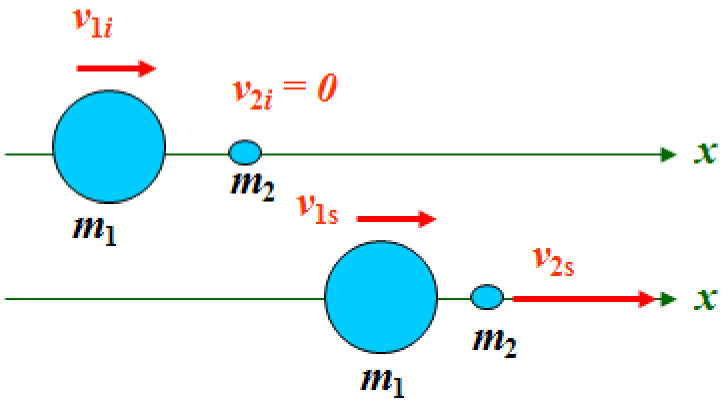
2. $m_2 \gg m_1 \rightarrow \dfrac{m_1}{m_2} \ll 1$

$$\vec{v}_{1s} = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\vec{v}_{1i} = \frac{\dfrac{m_1}{m_2} - 1}{\dfrac{m_1}{m_2} + 1}\vec{v}_{1i} \approx -\vec{v}_{1i}$$

$$\vec{v}_{2s} = \frac{2m_1}{m_1 + m_2}\vec{v}_{1i} = \frac{2\left(\dfrac{m_1}{m_2}\right)}{\dfrac{m_1}{m_2} + 1}\vec{v}_{1i} \approx 2\left(\frac{m_1}{m_2}\right)\vec{v}_{1i}$$

m_1 cismi (küçük cisim) aynı hızla geliş yönünün tersi yönünde hareket eder.

m_2 cismi (büyük cisim) ileri yönde çok küçük bir hızla hareket eder ($\dfrac{m_1}{m_2} \ll 1$).



3. $m_1 \gg m_2 \rightarrow \dfrac{m_2}{m_1} \ll 1$

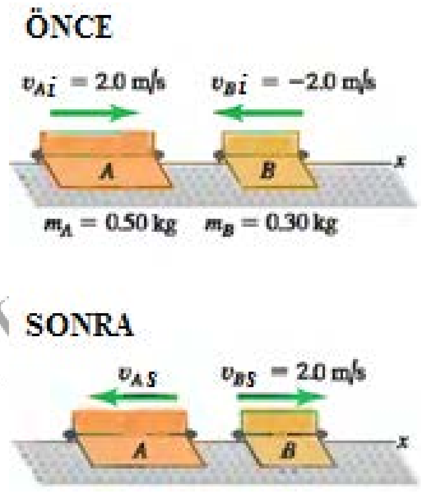
$$\vec{v}_{1s} = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\vec{v}_{1i} = \frac{1 - \dfrac{m_2}{m_1}}{1 + \dfrac{m_2}{m_1}}\vec{v}_{1i} \approx \vec{v}_{1i}$$

$$\vec{v}_{2s} = \frac{2m_1}{m_1 + m_2}\vec{v}_{1i} = \frac{2}{1 + \dfrac{m_2}{m_1}}\vec{v}_{1i} \approx 2\vec{v}_{1i}$$

m_1 cismi (büyük cisim) neredeyse aynı hızla yoluna devam eder.

m_2 cismi (küçük cisim) gelen cismin yaklaşık iki katı bir hızla hareket eder.

Örnek : Kütleleri 0.50 kg ve 0.30 kg olan *A* ve *B* blokları birbirine doğru 2.0 m/s hızlarla yaklaşıp çarpışıyorlar. Çarpışmadan sonra *B* bloğu aynı hızla ters yönde giderken *A* bloğunun hızı ne olur? Çarpışmanın türü ne olabilir?



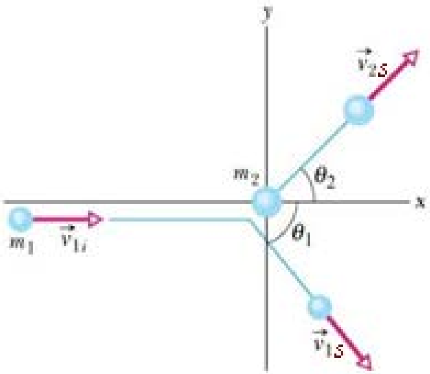
$$m_A\vec{v}_{Ai} + m_B\vec{v}_{Bi} = m_A\vec{v}_{As} + m_B\vec{v}_{Bs} \rightarrow 0.50(2.0\hat{i}) + 0.30(-2.0\hat{i}) = 0.50\vec{v}_{As} + 0.30(2.0\hat{i})$$

$$\vec{v}_{As} = -\frac{0.20\hat{i}}{0.50} = -0.40\hat{i} \text{ m/s}$$

$$K_i = \frac{1}{2}m_A v_{Ai}^2 + \frac{1}{2}m_B v_{Bi}^2 = \frac{1}{2}(0.50)(2.0)^2 + \frac{1}{2}(0.30)(-2.0)^2 = 1.6 \text{ J}$$

$$K_s = \frac{1}{2}m_A v_{As}^2 + \frac{1}{2}m_B v_{Bs}^2 = \frac{1}{2}(0.50)(-0.40)^2 + \frac{1}{2}(0.30)(2.0)^2 = 0.64 \text{ J}$$

Kinetik enerji korunmuyor $\rightarrow$ "esnek olmayan çarpışma"



İki - Boyutta Çarpışma :

Kütleleri m_1 and m_2 olan iki cismin xy-düzleminde çarpıştıklarını gözönüne alalım.

Sistemin çizgisel momentumu korunur: $\vec{p}_{1i} + \vec{p}_{2i} = \vec{p}_{1s} + \vec{p}_{2s}$

Çarpışma esnek ise kinetik enerji de korunur: $K_{1i} + K_{2i} = K_{1s} + K_{2s}$

Çarpışmadan önce m_2 parçacığının durgun olduğunu, çarpışmadan sonra da m_1 cisminin geliş doğrultusuyla θ_1, m_2 cisminin de θ_2 açısı yaptığını varsayalım. Bu durumda, momentumun ve kinetik enerjinin korunum ifadeleri:

$$x-\text{ekseni:}\quad m_1 v_{1i} = m_1 v_{1s}\cos\theta_1 + m_2 v_{2s}\cos\theta_2 \quad \text{(Eş-1)}$$

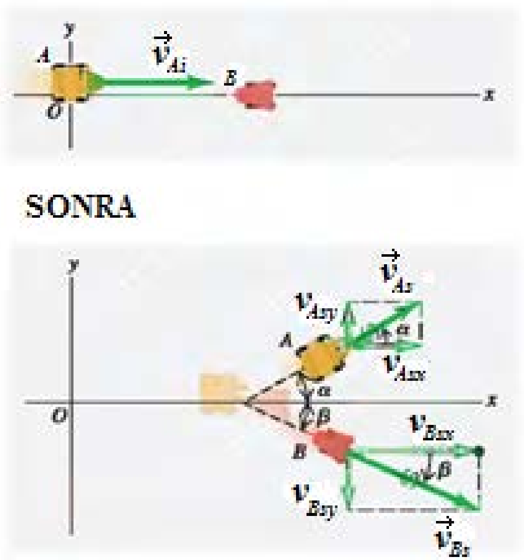
$$y-\text{ekseni:}\quad 0 = -m_1 v_{1s}\sin\theta_1 + m_2 v_{2s}\sin\theta_2 \quad \text{(Eş-2)}$$

$$\frac{1}{2}m_1 v_{1i}^2 = \frac{1}{2}m_1 v_{2s}^2 + \frac{1}{2}m_2 v_{2s}^2 \quad \text{(Eş-3)}$$

olur.

Yedi bilinmeyenli $(m_1, m_2, v_{1i}, v_{1s}, v_{2s}, \theta_1, \theta_2)$ üç tane denklemimiz var. Bunlardan herhangi dört tanesinin verilmesi halinde, diğer üçü kolaylıkla bulunabilir.

Örnek : Kütlesi 20 kg bir oyuncak robot (A) +x yönünde 2 m/s hızla giderken, yolu üzerinde durgun halde bulunan ve kütlesi 12 kg olan başka bir robota (B) şekildeki gibi çarpıyor. Çarpışmadan sonra A robotu geliş doğrultusu ile 30^{o} açı yapacak şekilde yukarı yönde 1 m/s hızla hareket ediyorsa, B robotunun hızı ne olur?



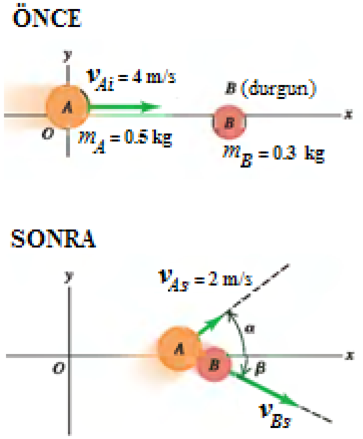
$$m_A\vec{v}_{Ai} + m_B\vec{v}_{Bi} = m_A\vec{v}_{As} + m_B\vec{v}_{Bs}$$ Momentumun korunumu

$$P_{xi} = P_{xs} \quad \rightarrow \quad 20(2\hat{\mathrm{i}}) = (20\cos 30)\hat{\mathrm{i}} + (12v_B\cos\beta)\hat{\mathrm{i}} \rightarrow v_B\cos\beta = 1.89$$

$$P_{yi} = P_{ys} \quad \rightarrow \quad 0 = (20\sin 30)\hat{\mathrm{j}} + (-12v_B\sin\beta)\hat{\mathrm{j}} \rightarrow v_B\sin\beta = 0.833$$

$$\beta = \tan^{-1}(\frac{0.833}{1.89}) = 23.8^{o} \rightarrow v_B = \frac{0.833}{\sin\beta} = 2.06 \text{ m/s}$$

Örnek : Kütlesi 0.5 kg olan bir bilye (A) +x yönünde 4 m/s hızla giderken, yolu üzerinde durgun halde bulunan ve kütlesi 0.3 olan başka bir bilyeye (B) esnek olarak çarpıyor. Çarpışmadan sonra A bilyesi geliş doğrultusu ile bilinmeyen bir α açısı yapacak şekilde 2 m/s hızla hareket etmektedir. B bilyesinin hızını, α ve β açılarını hesaplayınız.



$$\frac{1}{2}m_A v_{Ai}^2 + \frac{1}{2}m_B v_{Bi}^2 = \frac{1}{2}m_A v_{As}^2 + \frac{1}{2}m_B v_{Bs}^2$$

Kinetik enerjinin korunumu

$$v_{Bs} = \sqrt{\frac{m_A}{m_B}(v_{Ai}^2 - v_{As}^2)} = \sqrt{\frac{0.5}{0.3}(16-4)} = 4.47 \text{ m/s}$$

$$m_A\vec{v}_{Ai} + m_B\vec{v}_{Bi} = m_A\vec{v}_{As} + m_B\vec{v}_{Bs}$$

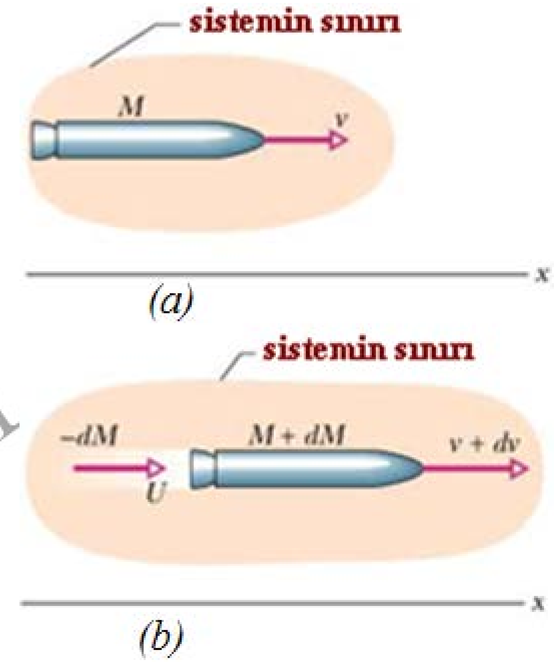
Momentumun korunumu

$$P_{xi} = P_{xs} \quad \rightarrow \quad 0.5(4\hat{i}) = 0.5(2\cos\alpha)\hat{i} + 0.3(4.47\cos\beta)\hat{i} \rightarrow \cos\alpha + 1.341\cos\beta = 2$$

$$P_{yi} = P_{ys} \quad \rightarrow \quad 0 = 0.5(2\sin\alpha)\hat{j} + 0.3(-4.47\sin\beta)\hat{j} \quad \rightarrow \sin\alpha - 1.341\sin\beta = 0$$

$$\alpha = 36.8^{o} \quad \text{ve} \quad \beta = 26.5^{o}$$

Değişken Kütleli Sistemler (Roketler) :



∗ Hızı v kütlesi M olan bir roket, $\dfrac{dM}{dt}$' lik bir hızla kütle kaybeder.

∗ Kaybolan bu kütle, rokete göre ters yönde $v_{\text{bağıl}}$ hızına sahiptir.

∗ Böylece roket kütle kaybeder ve ivmelenir.

∗ Çizgisel momentumun korunumunu kullanarak roketin v hızını bulabiliriz.

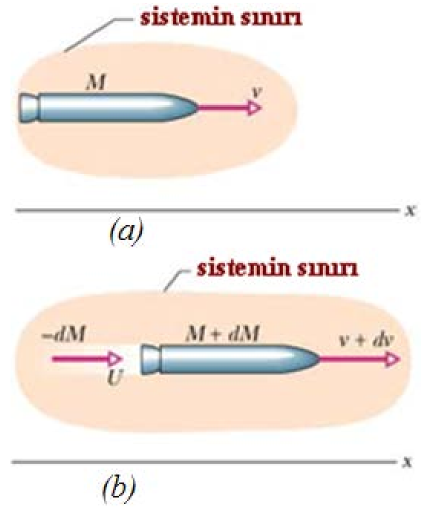
Şekil (a) ve (b), roketin t ve $t+dt$ anlarındaki durumunu göstermektedir. Rokete herhangi bir dış kuvvet etkimiyorsa çizgisel momentum korunur.

$$p(t) = p(t+dt) \rightarrow Mv = -UdM + (M+dM)(v+dv) \qquad \text{(Eş-1)}$$

Roket zamanla kütle kaybettiği için, dM negatiftir. U, atılan gazın yere göre hızıdır ve $U = v + dv - v_{\text{bağıl}}$ ifadesine sahiptir. Bunu yukarıdaki ifadede yerine koyarsak,

$$Mdv = -dMv_{\text{bağıl}} \qquad \text{(Eş-2)}$$

bulunur.



Yakıtın $\dfrac{dM}{dt} = -R$ (Eş-3) sabit hızıyla roketten atıldığını varsayalım. Burada, R sabit bir sayıdır.

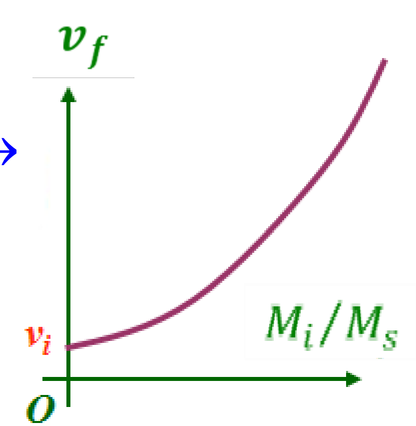
Eş-2' nin her iki tarafını dt ile bölersek $\rightarrow M\dfrac{dv}{dt} = -\dfrac{dM}{dt}v_{\text{bağıl}} = Rv_{\text{bağıl}} \rightarrow$

$Ma = Rv_{\text{bağıl}}$ (birinci roket denklemi) elde edilir. Burada a, roketin ivmesidir.

Eş-2' den roketin hızını zamanın fonksiyonu olarak bulabiliriz:

$$dv = -v_{\text{bağıl}}\frac{dM}{M} \rightarrow \int_{v_i}^{v_s} dv = -v_{\text{bağıl}}\int_{M_i}^{M_s}\frac{dM}{M} \rightarrow v_s - v_i = -v_{\text{bağıl}}\left[\ln M\right]_{M_i}^{M_s} \rightarrow$$

$$v_s - v_i = v_{\text{bağıl}}\ln\left(\frac{M_i}{M_s}\right)$$ (ikinci roket denklemi)



BÖLÜM-10
Dönme

Bu bölümde, katı cisimlerin bir eksen etrafındaki dönü hareketi incelenecektir. Bu konu kapsamında aşağıdaki konulara değinilecektir:

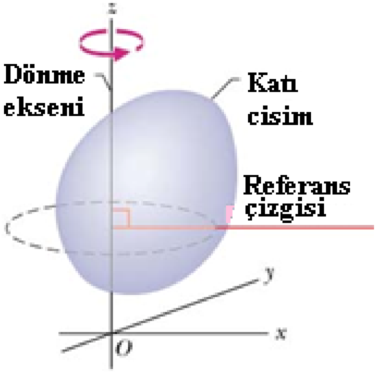
- **Açısal yer-değiştirme**
- **Ortalama ve anlık açısal hız (ω)**
- **Ortalama ve anlık açısal ivme (α)**
- **Dönme eylemsizlik momenti (I)**
- **Tork (τ)**

Ayrıca,

- dönen katı cisimlerin kinetik enerjisi,
- dönen cisimler için Newton' un ikinci yasası
- dönme hareketi için iş-kinetik enerji teoremi

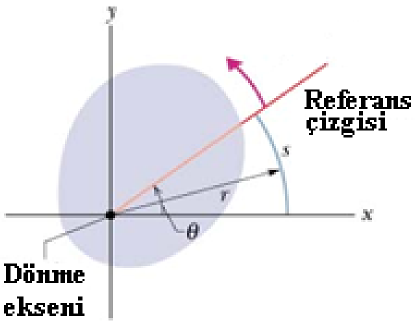
üzerinde de durulacaktır.

Dönmedeki Değişkenler:



Katı cisim, üzerindeki tüm noktaların birbirlerine göre hareket etmediği cisimlerdir.

Bir eksen etrafında dönen katı bir cismi tek bir değişkenle tarif edebiliriz.



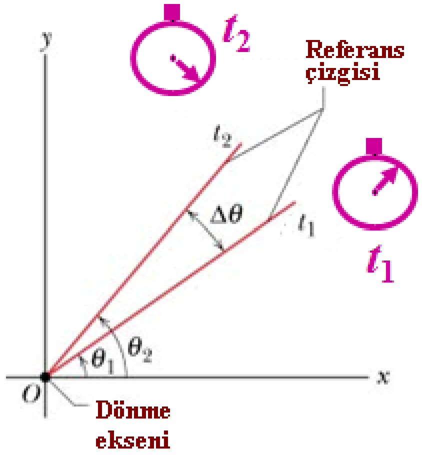
Dönme ekseninin *z*-ekseni olduğu soldaki katı cismi göz önüne alalım. Cisim içinde ve dönme eksenine dik bir referans çizgisi seçelim. Katı cismin üstten görünüşü hemen alttaki resimde verilmiştir.

Herhangi bir t anında referans çizgisinin açısal konumu, $t = 0$ anındaki açısal konumuyla θ kadar bir açı yapıyor olsun. Katı cisim üzerindeki noktalar birbirlerine göre hareketsiz olduklarından, θ referans çizgisi üzerindeki tüm noktaların açısal konumudur ve dönme ekseninden r kadar uzaktaki bir noktanın çizdiği yay uzunluğu s' ye şu şekilde bağlıdır:

$$\theta = \frac{s}{r}$$

Not: θ **radyan** cinsindendir.

(10-2)



Açısal Yer-değiştirme:

Soldaki resimde t_1 ve t_2 anlarındaki referans çizgileri gösterilmiştir. Bu zaman aralığında katı cismin yaptığı açısal yer-değiştirme $\Delta\theta = \theta_2 - \theta_1$ kadardır.

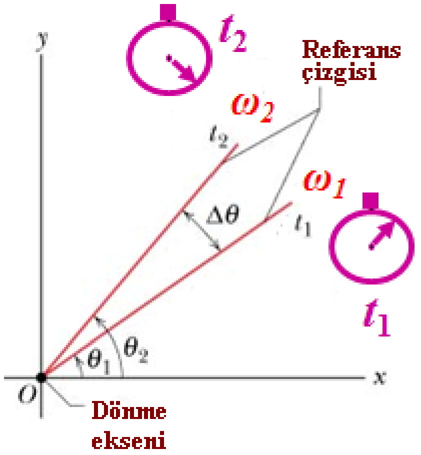
Açısal Hız:

(t_1, t_2) zaman aralığında ortalama açısal hız: $\omega_{\text{ort}} = \dfrac{\theta_2 - \theta_1}{t_2 - t_1} = \dfrac{\Delta\theta}{\Delta t}$

ile tanımlanır ve SI sistemindeki birimi rad/s' dir.

Anlık açısal hız ise, ortalama açısal hızın $\Delta t \to 0$ durumundaki limitidir:

$$\omega = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{d\theta}{dt}$$



Açısal İvme :

Dönen katı cismin açısal hızında bir değişim oluyorsa, bu değişimin ne kadar hızlı olduğu açısal ivme ile açıklanabilir.

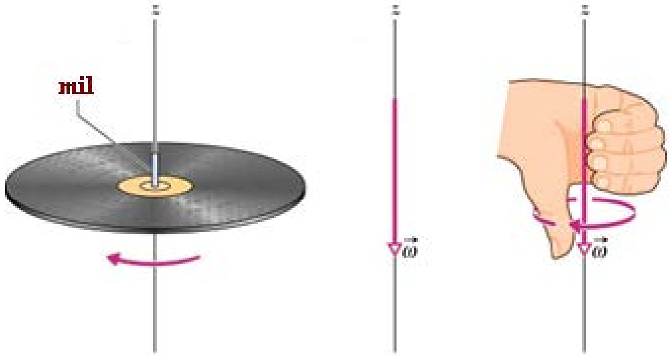
Üstteki resimde referans çizgisinin t_1 ve t_2 anlarındaki durumları verilmiştir. Katı cismin t_1 anındaki açısal hızı ω_1 ve t_2 anındaki açısal hızı da ω_2' dir.

(t_1, t_2) zaman aralığında ortalama açısal ivme: $\alpha_{ort} = \dfrac{\omega_2 - \omega_1}{t_2 - t_1} = \dfrac{\Delta\omega}{\Delta t}$

ile tanımlanır ve SI sistemindeki birimi rad/s^2 ' dir.

Anlık açısal ivme, ortalama açısal ivmenin $\Delta t \to 0$ durumundaki limitidir:

$$\alpha = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{d\omega}{dt}$$



Açısal Hız Vektörü :

Açısal hız vektörü, katı cisim saat ibrelerinin tersi yönünde dönüyorsa pozitif, saat ibreleri yönünde dönüyorsa negatif alınır.

Açısal hız vektörü $\vec{\omega}$ dönme ekseni doğrultusundadır ve kesin yönü "sağ-el-kuralı" na göre belirlenir.

Sağ-el-kuralı : Dönme eksenini, parmak uçlarınız dönme yönünü gösterecek şekilde sağ avcunuza alın ve dönme yönünde bir tur atın. Başparmağınızın yönü açısal hız vektörünün ($\vec{\omega}$) yönünü verir.

Örnek : Bir döner kapının açısal konumu $\theta(t) = 5 + 10t + 2t^2$ rad ifadesi ile veriliyor. $t = 0$ ve $t = 3$ s anlarında, kapının açısal hızını ve açısal ivmesini bulunuz.

$$\omega(t) = \frac{d\theta}{dt} = 10 + 4t \quad \rightarrow \quad \omega(0) = 10 \text{ rad/s} \;\text{ ve }\; \omega(3) = 22 \text{ rad/s}$$

$$\alpha(t) = \frac{d\omega}{dt} = 4 \quad \rightarrow \quad \alpha(0) = \alpha(3) = 4 \text{ rad/s}^2$$

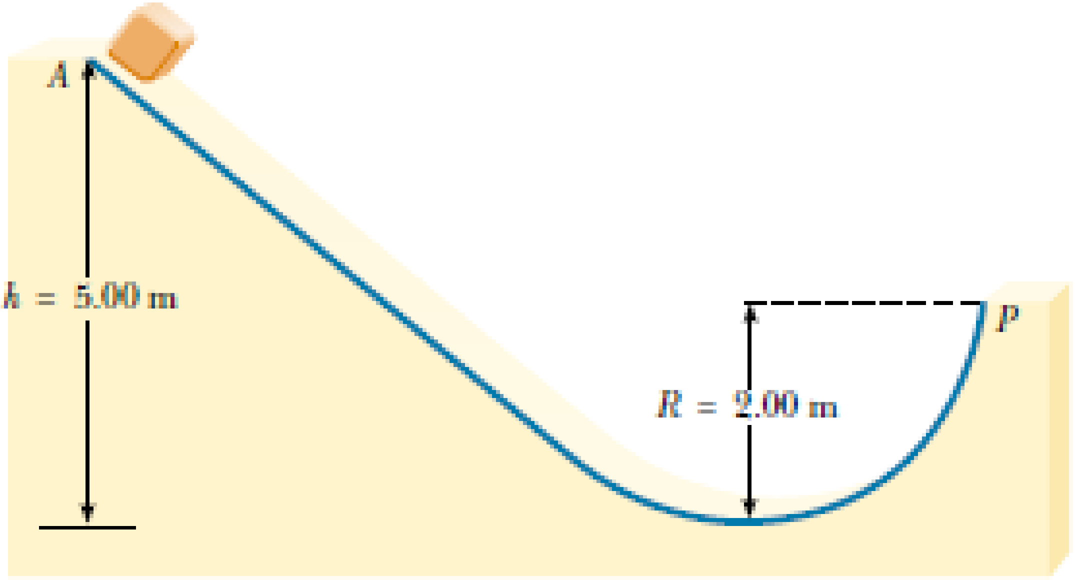
Örnek : Bir mil 65 rad/s hızla dönerken, $t = 0$ anında $\alpha(t) = -10 - 5t$ (rad/s^2) ile verilen ivmeli bir harekete başlıyor. $t = 3$ s anındaki açısal hızını ve bu 3 s' lik süredeki açısal yerdeğiştirmesini bulunuz.

$$\alpha(t) = \frac{d\omega}{dt} \rightarrow \int_{\omega_0}^{\omega} d\omega = \int_0^3 \alpha dt \rightarrow \omega(t) = 65 - 10t - 2.5t^2 \quad \rightarrow \quad \omega(3) = 12.5 \text{ rad/s}$$

$$\omega(t) = \frac{d\theta}{dt} \rightarrow \int_{\theta_0}^{\theta} d\theta = \int_0^3 \omega dt \quad \rightarrow \quad \Delta\theta = \int_0^3 (65 - 10t - 2.5t^2) = \left[65t - 5t^2 - \frac{5}{6}t^3 \right]_0^3$$

$\Delta\theta = 117.5$ rad

Örnek : Kütlesi 6 kg olan bir blok sürtünmesiz eğik bir düzlem üzerindeki A noktasından serbest bırakılıyor. Blok P noktasında iken sahip olduğu ivmenin teğetsel ve radyal bileşenlerini bulunuz.



$$mgh = mgR + \frac{1}{2}mv^2 \rightarrow v = \sqrt{2g(h-R)} = \sqrt{2(9.8)(5-2)} = 7.67 \text{ m/s}$$

$$a_r = \frac{v^2}{R} = 29.4 \text{ m/s}^2 \qquad \vec{F}_t = m\vec{a}_t = -mg\hat{j} \rightarrow \vec{a}_t = -9.8\hat{j} \text{ m/s}^2$$

Radyal ivme

Teğetsel ivme

Sabit Açısal İvme ile Dönme :

Dönme hareketinin açısal ivmesi sabit ise, cismin açısal hızını ve açısal konumunu zamana bağlayan basit eşitlikler bulmak mümkündür. Benzer bağıntıları ötelenme hareketini incelerken çıkarmıştık. Ötelenme hareketi ile dönme hareketi arasındaki benzerlik, aşağıdaki nicelikler arasındaki bağlar dikkate alınarak kolayca kurulabilir.

Ötelenme		Dönme	
x	$\leftrightarrow$	θ	
v	$\leftrightarrow$	ω	
a	$\leftrightarrow$	α	
$v = v_0 + at$	$\leftrightarrow$	$\omega = \omega_0 + \alpha t$	(Eş-1)
$x = x_o + v_0 t + \frac{1}{2}at^2$	$\leftrightarrow$	$\theta = \theta_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2$	(Eş-2)
$v^2 - v_0^2 = 2a\left(x - x_o\right)$	$\leftrightarrow$	$\omega^2 - \omega_0^2 = 2\alpha\left(\theta - \theta_0\right)$	(Eş-3)

Örnek : Bir tekerlek 3.5 rad/s^2 ' lik sabit açısal ivme ile dönmektedir. Tekerleğin t = 0 anındaki açısal hızı 2 rad/s olduğuna göre,

a–) ilk 2 s içinde ne kadarlık açısal yer-değiştirme yapmıştır?

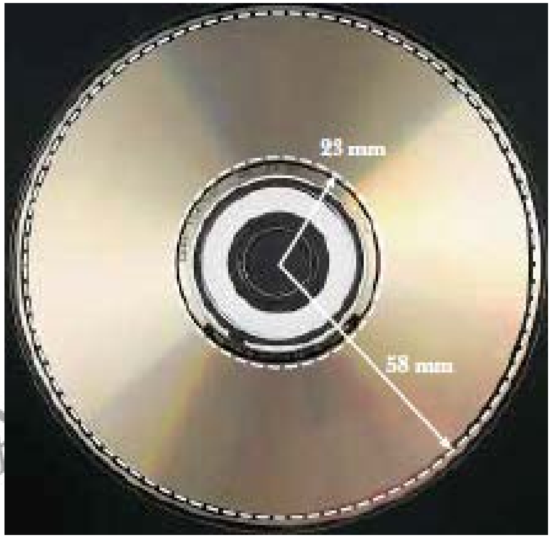
b–) t = 2 s anındaki açısal hızı nedir?

$$a\text{–)}\quad \Delta\theta = \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2 = 2(2) + \frac{1}{2}(3.5)(2)^2 = 11\text{ rad}$$

$$N = \frac{11}{2\pi} = 1.75\text{ tur yapmıştır.}$$

$$b\text{–)}\quad \omega = \omega_0 + \alpha t = 2 + 3.5(2) = 9\text{ rad/s}$$

Örnek : Bir CD-çalarda, bilgi okuyucu lensin yüzeye temas ettiği noktanın çizgisel hızı 1.3 m/s' dir ve sabittir. CD' nin boyutları şekilde verilmiştir.



a–) CD' nin iç ve dış kenarlarında iken, lens bilgiyi hangi açısal hızlarla okur?

b–) Müzik çalma süresi 74 dak+33 s olduğuna göre, CD kaç defa döner?

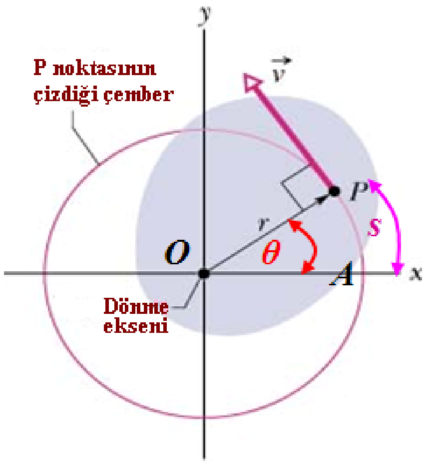
c–) İvmenin sabit olduğunu varsayarak, bu zaman aralığında CD' nin ortalama açısal ivmesini bulunuz.

$$a\text{–)}\ v = r\omega \rightarrow \omega_{iç} = \frac{v}{r_{iç}} = \frac{1.3}{23\times10^{-3}} = 56.5\ \text{rad/s}\ \ ;\ \ \omega_{dış} = \frac{v}{r_{dış}} = \frac{1.3}{58\times10^{-3}} = 22.4\ \text{rad/s}$$

$$b\text{–)}\ \omega_s = \omega_i + \alpha t \rightarrow \Delta\theta = \omega_i t + \frac{1}{2}\left(\frac{\omega_s - \omega_i}{t}\right)t^2 = \left(\frac{\omega_s + \omega_i}{2}\right)t$$

$$\text{n} = \frac{\Delta\theta}{2\pi} = \left(\frac{22.4 + 56.5}{2}\right)\frac{(74\times60+33)}{2\pi} = 28100\ \text{tur}$$

$$c\text{–)}\ \omega_s = \omega_i + \alpha t \rightarrow \alpha = \frac{\omega_s - \omega_i}{t} = \frac{22.4 - 56.5}{(74\times60+33)} = -7.6\times10^{-3}\ \text{rad/s}^2$$



Çizgisel ve Açısal Değişkenler Arasındaki İlişki :

Bir eksen etrafında dönen katı cisim üzerindeki bir P noktasını ele alalım. $t = 0$ anında referans çizgisi x-ekseni üzerinde ve P noktası da A noktasında bulunsun.

P noktası t kadarlık bir sürede, AP yayı boyunca hareket ederek s yolunu alır. Bu sürede referans çizgisi (OP) θ açısı kadar döner.

Açısal Hız ve Çizgisel Hız arasındaki ilişki :

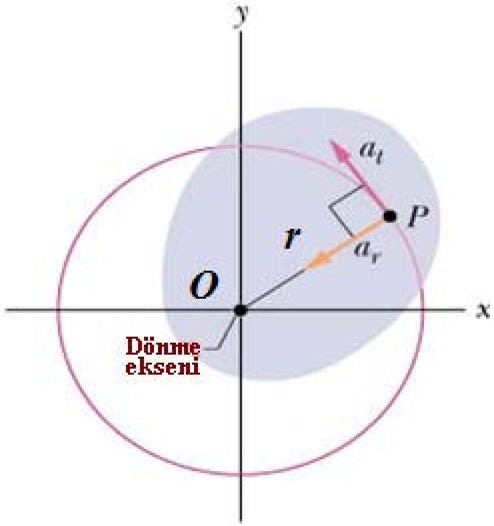
$r = \overline{OP}$ olmak üzere, yay uzunluğu s ve θ açısı arasındaki ilişki $s = r\theta$ eşitliğine uyar.

P noktasının çizgisel hızı: $v = \dfrac{ds}{dt} = \dfrac{d(r\theta)}{dt} = r\dfrac{d\theta}{dt} = r\omega$

Hareketin periyodu: $T = \dfrac{\text{çevre}}{\text{hız}} = \dfrac{2\pi r}{v} = \dfrac{2\pi r}{\omega r} = \dfrac{2\pi}{\omega}$

Açısal hız:

$$\boxed{\omega = 2\pi f \rightarrow T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{1}{f}}$$



İvme:

P noktasının ivmesi iki bileşenlidir. Birincisi "radyal" yönde O noktasına doğrudur ve merkezcil ivme olarak adlandırılır. Büyüklüğü,

$$a_r = \frac{v^2}{r} = \omega^2 r$$

ifadesine sahiptir.

İkinci bileşen ise, P noktasının izlediği çembersel yörüngeye "teğet" yöndedir ve teğetsel bileşen diye adlandırılır. Büyüklüğü,

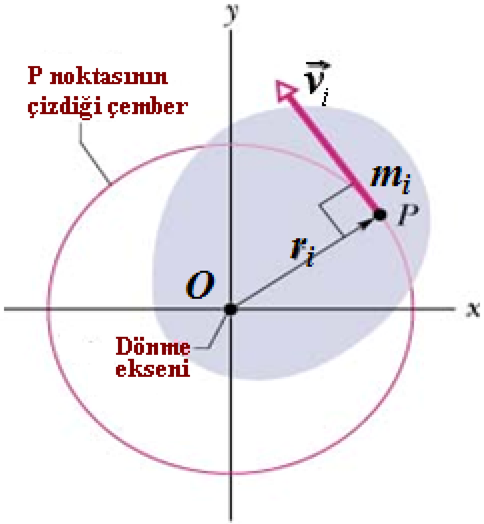
$$a_t = \frac{dv}{dt} = \frac{d(\omega r)}{dt} = r\frac{d\omega}{dt} = r\alpha$$

ifadesine sahiptir.

Dolayısıyla ivme vektörü $\vec{a} = a_t \hat{t} + a_r \hat{r}$ ve büyüklüğü de,

$$a = \sqrt{a_t^2 + a_r^2}$$

ile verilir.



Dönme Kinetik Enerjisi :

Soldaki dönen katı cismi, kütleleri $m_1, m_2, m_3, ..., m_i, ...$ olan çok küçük parçalara bölelim. P noktası, kütlesi m_i olan i. parçacık olsun.

Katı cismin dönme kinetik enerjisi, noktasal cisimlerin kinetik enerjilerinin toplamına eşittir:

$$K = \frac{1}{2}m_1 v_1^2 + \frac{1}{2}m_2 v_2^2 + ... = \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2$$

i. elemanın çizgisel hızı $v_i = \omega r_i \rightarrow K = \sum_i \frac{1}{2} m_i (\omega r_i)^2 = \frac{1}{2}\left(\sum_i m_i r_i^2\right)\omega^2 = \frac{1}{2} I \omega^2$

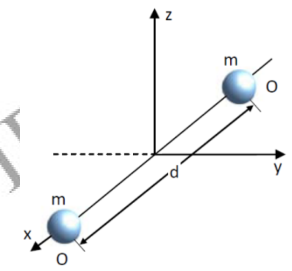
$I = \sum_i m_i r_i^2$ terimi, katı cismin dönme eksenine göre "eylemsizlik momenti" dir.

Eylemsizlik momenti katı cismin kütlesine ve dönme ekseninin konumuna bağlı olduğu için, bilinmelidir. Katı bir cismin eylemsizlik momenti, katı cismin kütlesinin dönme eksenine göre nasıl dağıldığını tanımlar.

$$I = \sum_i m_i r_i^2 \quad ; \quad I = \int r^2 dm \quad ; \quad K = \frac{1}{2} I \omega^2$$

(10-13)

Örnek : xy-düzleminde bulunan bir oksijen molekülü O_2 olsun ve ortasından dik olarak geçen z-ekseni etrafında dönsün. Herbir oksijen atomunun kütlesi 2.66×10^{-20} kg' dır ve oda sıcaklığında aralarındaki mesafe 1.21×10^{-10} m' dir.



$a-)$ Molekülün z-eksenine göre dönme eylemsizlik momenti nedir?

$b-)$ Molekülün dönme açısal hızı 4.6×10^{12} rad/s ise, dönme kinetik enerjisi nedir?

$$a-)\ I=\sum m_i r_i^2 = m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 = 2m\left(\frac{d}{2}\right)^2 = 2\left(2.66\times10^{-20}\right)\left(\frac{1.21\times10^{-10}}{2}\right)^2$$

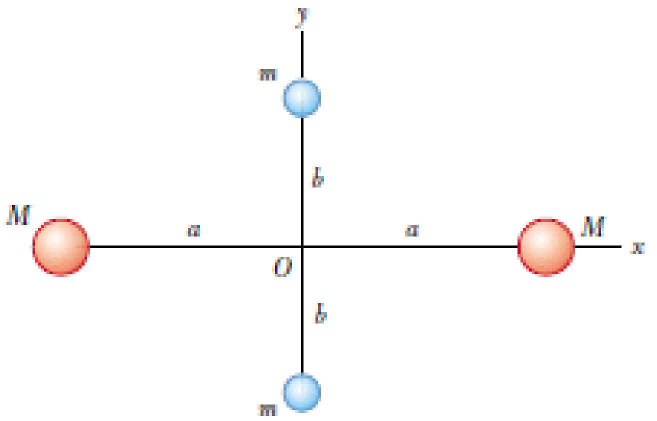
$$I = 1.95\times10^{-40}\ \text{kg}\cdot\text{m}^2$$

$$b-)\ K=\frac{1}{2}I\omega^2=\frac{1}{2}\left(1.95\times10^{-40}\right)\left(4.6\times10^{12}\right)^2 = 20.6\times10^{-16}\ \text{J}$$

Örnek : Dört adet küçük küre şekildeki gibi hafif çubukların uçlarına tutturulmuş ve sistem *xy*-düzlemine şekildeki gibi yerleştirilmiştir.

$a-$) Sistem $y-$ekseni etrafında ω açısal hızı ile döndürülürse, sistemin dönme eylemsizlik momenti ve dönme kinetik enerjisi nedir?

$b-$) Sistem $z-$ekseni etrafında ω açısal hızı ile döndürülürse, sistemin dönme eylemsizlik momenti ve dönme kinetik enerjisi nedir?



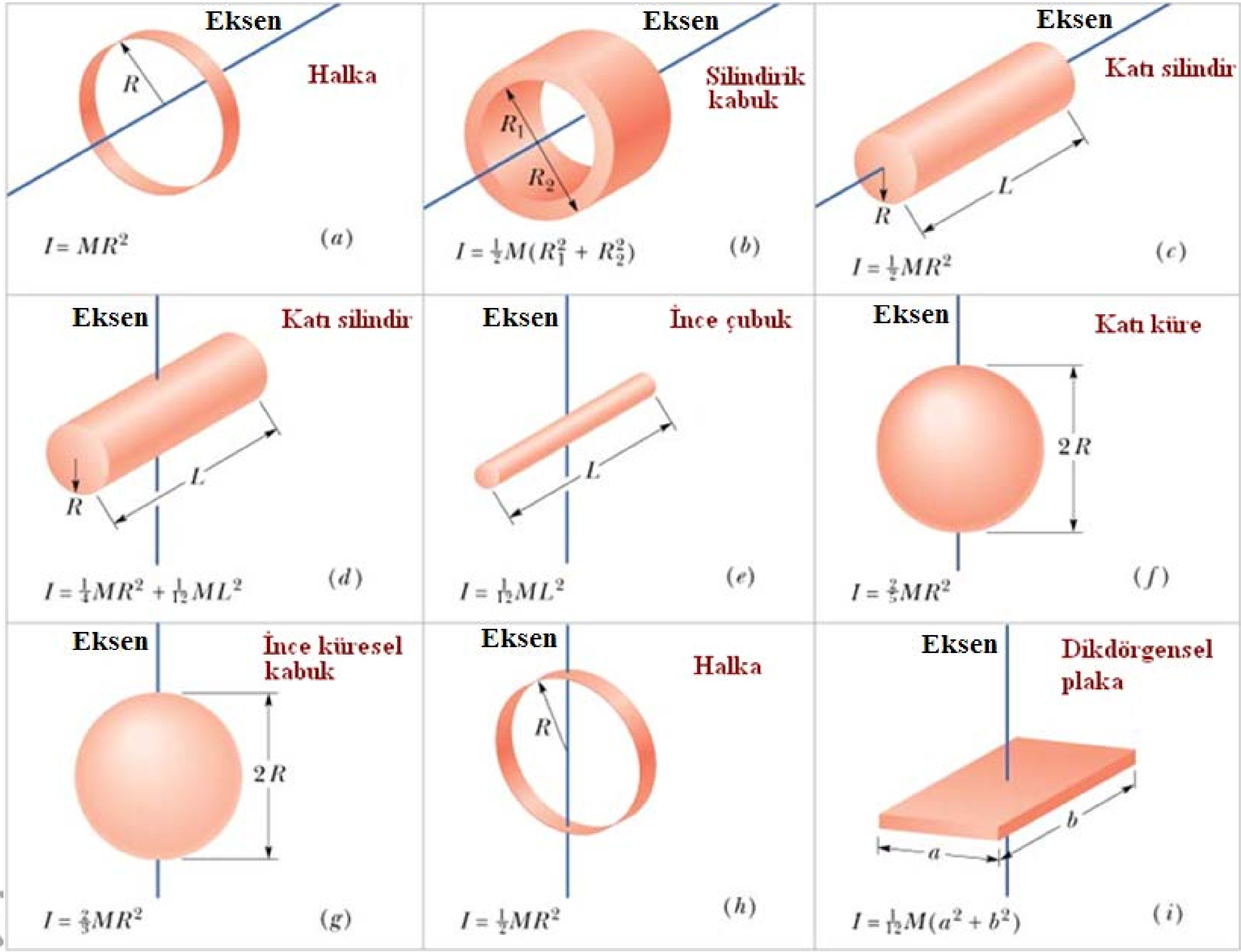
$$a-)\ I_y = \sum m_i r_i^2 = 2Ma^2$$

$$K_y = \frac{1}{2} I_y \omega^2 = \frac{1}{2} 2Ma^2\omega^2 = Ma^2\omega^2$$

$$b-)\ I_z = \sum m_i r_i^2 = 2Ma^2 + 2mb^2$$

$$K_z = \frac{1}{2} I_z \omega^2 = \frac{1}{2} 2\left(Ma^2 + mb^2\right)\omega^2 = \left(Ma^2 + mb^2\right)\omega^2$$

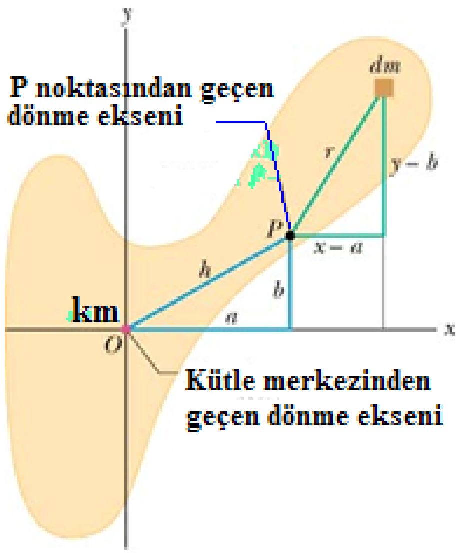
Bazı katı cisimlerin dönme eylemsizlik momentleri:



Eylemsizlik Momenti Hesabı :

Noktasal parçacıklardan oluşan sistemlerde: $I = \sum_i m_i r_i^2$ bağıntısından hesaplanır.

Katı cisimlerde: $I = \int r^2 dm$ bağıntısından hesaplanır.



Paralel - Eksen Teoremi :

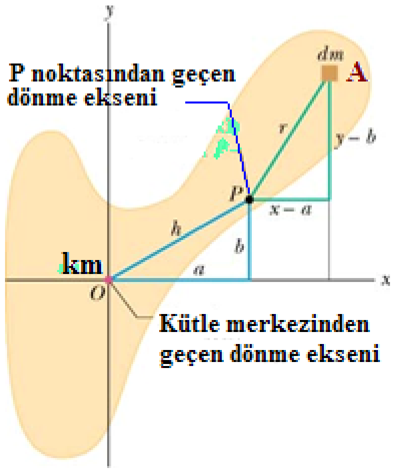
Eylemsizlik momenti dönme ekseninin konumuna bağlı olduğundan, her farklı dönme ekseni için I yı tekrar hesaplamamız gerekir.

Bunun için, çok kolay bir yöntem olan "paralel-eksen teoremi" ni kullanacağız.

Üstteki M kütleli katı cismin kütle merkezinden geçen ve sayfa düzlemine dik olan eksene göre eylemsizlik momentini (I_{km}) bildiğimizi varsayalım.

Bu eksene paralel ve h kadar uzaktaki bir P noktasından geçen eksene göre eylemsizlik momenti (I) şu ifadeyle verilir:

$I = I_{\text{km}} + Mh^2$ "paralel-eksen teoremi"



Paralel - Eksen Teoreminin İspatı :

Soldaki katı cismin, koordinatları (a,b) olan bir P noktasından sayfa düzlemine dik olarak geçen eksene göre eylemsizlik momentini (I) bulalım.

A noktasında seçilen bir elemanın kütlesi dm ve koordinatları da (x, y) olsun.

A ve P noktaları arasındaki uzaklık $r=\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}$ olur.

$$I_P=\int r^2 dm=\int\left[(x-a)^2+(y-b)^2\right]dm=\int\left(x^2-2ax+a^2+y^2-2by+b^2\right)dm$$

$$I_P=\int\left(x^2+y^2\right)dm-2a\int xdm-2b\int ydm+\int\left(a^2+b^2\right)dm$$

İkinci ve üçüncü integraller kütle merkezinin x ve y koordinatlarına karşılık geldikleri için sıfırdır.

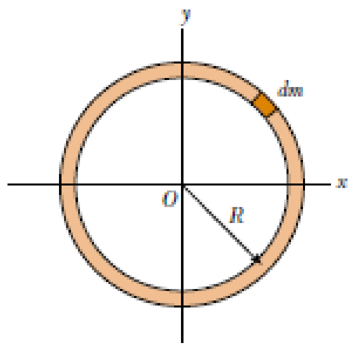
İlk integral I_{km}' ye eşittir. $\left(a^2+b^2\right)=h^2$ olduğundan dördüncü integral,

$h^2\int dm=Mh^2$ bulunur. Buradan da, $I=I_{\text{km}}+Mh^2$ sonucu elde edilir.

Örnek : Kütlesi M ve yarıçapı R olan çembersel bir halkanın,

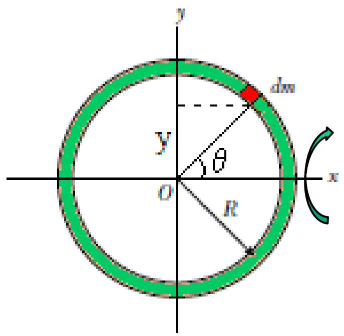
a–) yüzeyine dik ve merkezinden geçen eksene göre eylemsizlik momenti nedir?

b–) yüzeyine paralel ve çapı boyunca olan bir dönme eksenine göre eylemsizlik momenti nedir?



$$a–)\ I = \int dm R^2 = M R^2$$

$$b–)\ I = \int dm y^2 = \int \lambda dl \left(R\sin\theta\right)^2 = \lambda R^3 \int \sin^2\theta d\theta$$

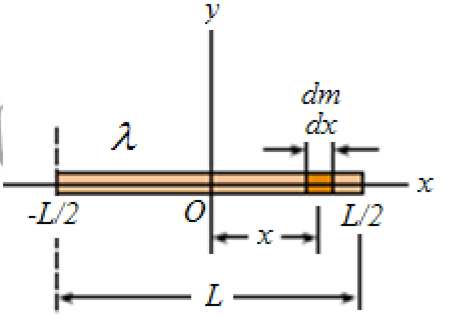


$$= 2\lambda R^3 \int_0^{\pi} \left(\frac{1-\cos 2\theta}{2}\right) d\theta = \lambda R^3 \left[\theta - \frac{1}{2}\sin 2\theta\right]_0^{\pi}$$

$$I = \left(\frac{M}{2\pi R}\right) R^3 \pi = \frac{1}{2} M R^2$$

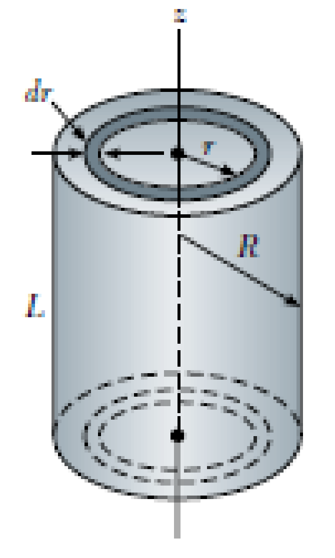
Örnek : Kütlesi M ve uzunluğu L olan bir çubuğun merkezinden dik olarak geçen $y-$eksenine göre eylemsizlik momenti nedir?

$$I=\int dm x^2=\int(\lambda dx)x^2=\int\left(\frac{M}{L}\right)x^2dx$$



$$I=\frac{M}{L}\int_{-L/2}^{L/2}x^2dx=\frac{M}{3L}\left[x^3\right]_{-L/2}^{L/2}=\frac{M}{3L}\left(2\frac{L^3}{8}\right)=\frac{1}{12}ML^2$$

Örnek : Kütlesi M, yarıçapı R ve yüksekliği L olan katı bir silindirin eksenine göre eylemsizlik momenti nedir?

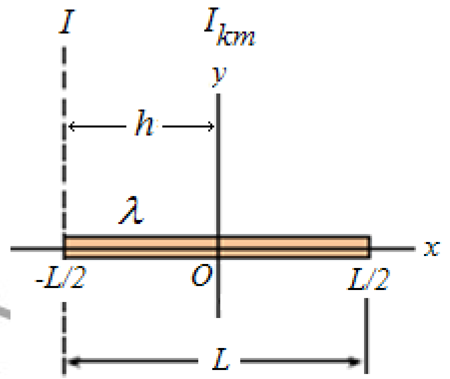


Silindirle aynı boyda, r yarıçaplı ve dr kalınlığında silindirik bir kabuk seçersek, $dm=\rho dV=\rho\left(L2\pi r dr\right)$ bulunur.

Buna göre, $I=\int dm r^2=\int\left(\rho L2\pi r dr\right)r^2=\left(\dfrac{M}{\pi R^2 L}\right)L2\pi\int r^3dr$

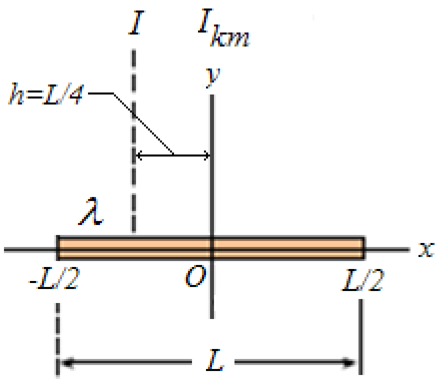
$$I=\frac{2M}{R^2}\int_0^R r^3dr=\frac{2M}{R^2}\left(\frac{R^4}{4}\right)=\frac{1}{2}MR^2$$

Örnek : Paralel-eksen teoremini kullanarak, kütlesi M ve uzunluğu L olan bir çubuğun sol ucundan dik olarak geçen $y-$eksenine göre eylemsizlik momenti nedir?



$$I = I_{km} + Mh^2 = \frac{1}{12}ML^2 + M\left(\frac{L}{2}\right)^2 = \frac{1}{3}ML^2$$

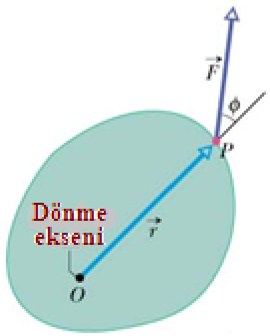
Örnek : Aynı çubuğun kütle merkezinden $L/4$ kadar uzaktan geçen ve $y-$eksenine paralel bir eksene göre eylemsizlik momenti nedir?



$$I = I_{km} + Mh^2 = \frac{1}{12}ML^2 + M\left(\frac{L}{4}\right)^2 = \frac{7}{48}ML^2$$

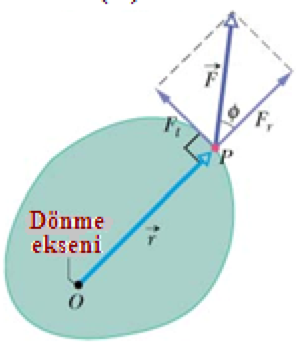
Tork :

Katı bir cisim, O noktasından r kadar uzaktaki P noktasına uygulanan bir $\vec{F}$ kuvvetinin etkisiyle O noktası etrafında rahatça dönebilmektedir (Şekil-a).



(a)

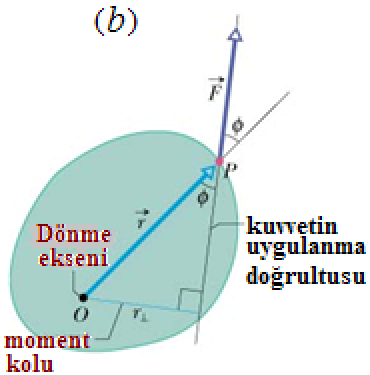
Şekil-b' de $\vec{F}$ kuvveti radyal ve teğetsel bileşenlerine ayrılmıştır.



(b)

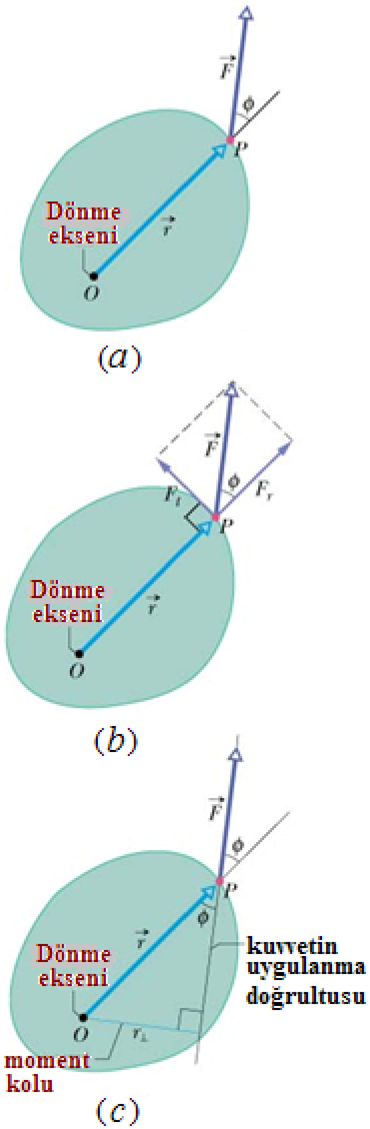
O noktasından geçen çizgi boyunca etkidiği için kuvvetin F_r bileşeninin dönmeye katkısı yoktur.

Ancak, kuvvetin teğetsel bileşeni ($F_t = F \sin\phi$) O noktası etrafında dönmeye sebep olur.



(c)

$\vec{F}$ kuvvetinin döndürme etkisi, $\overline{OP} = r$ uzaklığına ve teğetsel kuvvet bileşeninin (F_t) büyüklüğüne bağlıdır.



Tork, $\tau = rF_t = rF\sin\phi = r_\perp F$ bağıntısı ile tanımlanır. $r_\perp$ uzaklığı, kuvvetin O noktasına olan dik uzaklığıdır ve kuvvet kolu olarak adlandırılır.

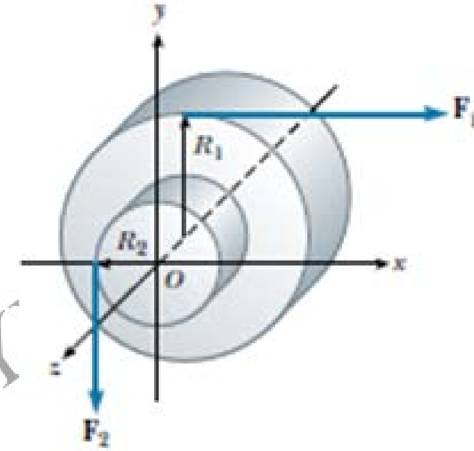
$$\boxed{\tau = r_\perp F = rF_\perp = rF_t}$$

Torkun yönü, cisme etkiyen kuvvet,

$\Rightarrow$ cismi saat ibrelerinin tersi yönünde döndürüyorsa "pozitif"

$\Rightarrow$ saat ibreleri yönünde döndürüyorsa "negatif" alınır.

Örnek : Yarıçapları R_1 ve R_2 olan iki silindir şekildeki gibi birleştirilmiştir ($R_1 > R_2$). Yarıçapı R_1 olan silindir üzerine sarılmış ip sağa doğru F_1, yarıçapı R_2 olan silindir üzerine sarılmış ip aşağı doğru F_2 kuvvetiyle çekiliyor.



$z-$eksenine göre oluşan net tork nedir?

$$\vec{\tau} = R_1F_1(-\hat{k}) + R_2F_2(\hat{k}) = \left(-R_1F_1 + R_2F_2\right)\hat{k}$$

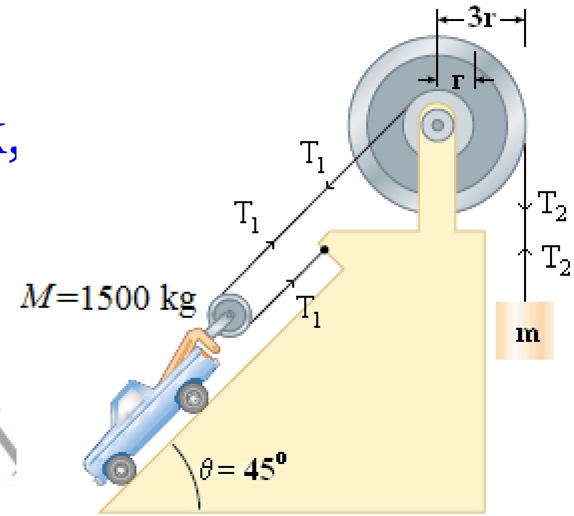
$F_1 = 5$ N, $R_1 = 1$ m, $F_2 = 15$ N, $R_2 = 0.5$ m ise, net torkun büyüklüğü ne kadardır?

$$\vec{\tau} = \left(-5 + 7.5\right)\hat{k} = 2.5\hat{k}$$

$$\tau = 2.5 \ \ \text{N}\cdot\text{m}$$

Silindir hangi yönde döner? z-ekseni etrafında saatin tersi yönünde döner.

Örnek : Makaraların sürtünmesiz ve ihmal edilebilir kütlelere sahip olduğunu varsayarak, kütlesi $M = 1500$ kg olan aracı dengeleyecek bloğun m kütlesini bulunuz.

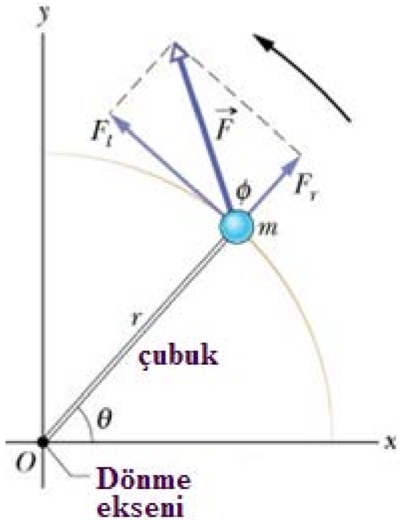


Küçük makarayı gözönüne alalım:

$$2T_1 = Mg\sin\theta = (1500 * 9.8)\sin(45) \rightarrow T_1 = 5197 \text{ N}$$

$$\sum \vec{\tau} = 0 \rightarrow \left|\vec{\tau}_{T_1}\right| = \left|\vec{\tau}_{T_2}\right| \rightarrow rT_1 = 3rT_2 \rightarrow T_2 = \frac{T_1}{3} = 1732 \text{ N}$$

$$T_2 = mg \rightarrow m = \frac{T_2}{g} = 176.8 \text{ kg}$$



Dönmede Newton'un İkinci Yasası :

Ötelenme hareketinde, Newton' un ikinci yasası cisme etkiyen kuvveti cismin ivmesine bağlar. Benzer bir ilişki, kuvvetin katı cisim üzerine uyguladığı tork ile cismin açısal ivmesi arasında da vardır. Bu ilişki, Newton' un ikinci yasasının dönmedeki karşılığıdır.

Kütlesi m olan bir cisim r uzunluğunda ağırlıksız bir çubuğun ucuna yapıştırılmıştır. Cisim üzerine uygulanan $\vec{F}$ kuvveti ile sistem, orijinden geçen eksen etrafında dönsün.

Daha önceden olduğu gibi $\vec{F}$ kuvvetini radyal ve teğetsel bileşenlerine ayıralım. Radyal kuvvetin dönmeye katkısının olmadığını biliyoruz.

$$F_t = ma_t \;\rightarrow\; \tau = F_t r = m a_t r = m(\alpha r) r = (mr^2)\alpha = I\alpha$$

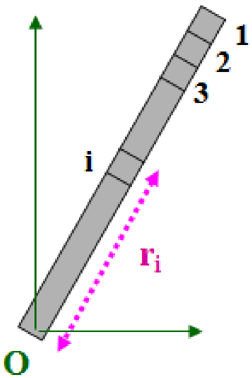
$$\tau = I\alpha$$

bulunur ($F = ma$ ile karşılaştırınız).

Dönen Katı Cisimler İçin Newton'un İkinci Yasası :

r uzunluğunda ağırlıksız bir çubuğun ucuna bağlı m kütleli parçacık özel durumu için, Newton' un ikinci yasasının dönme hareketindeki karşılığını bulduk. Şimdi ise, bunu çok daha genel durumlar için tekrarlayalım.

Net bir torkun etkisiyle (τ_{net}) O noktasından geçen eksen etrafında dönebilen çubuk benzeri katı bir cisim olsun. Çubuğu, O noktasından olan uzaklıkları $r_1, r_2, r_3, ..., r_n$ ve kütleleri $m_1, m_2, m_3, ..., m_n$ olan küçük parçalara bölelim.



Her bir parçaya, dönme için Newton' un ikinci yasasını uygularsak;

$\tau_1 = I_1\alpha \;\; ; \;\; \tau_2 = I_2\alpha \;\; ; \;\; \tau_3 = I_3\alpha \;\; ; ....$

eşitliklerini elde ederiz. Cisme etki eden toplam tork,

$$\tau_{\text{net}} = \tau_1 + \tau_2 + \tau_3 + ... + \tau_n = \left(I_1 + I_2 + I_3 + ... + I_n\right)\alpha \quad \text{olacaktır.}$$

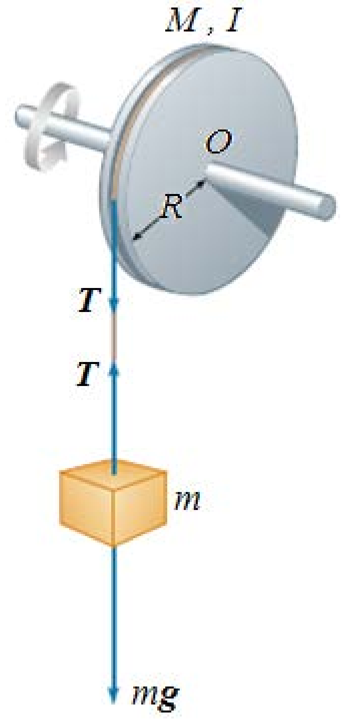
Burada, $I_i = m_i r_i^2$ i. elemanın dönme eylemsizlik momentidir ve $I_1 + I_2 + I_3 + ... + I_n$ toplamı da, katı cismin dönme eylemsizlik momentidir.

Buradan da, $\tau_{\text{net}} = I\alpha$ yazılır.

Örnek : Yarıçapı R, kütlesi M ve eylemsizlik momenti I olan bir tekerlek şekildeki gibi ortasından geçen sürtünmesiz yatay bir aksa bağlıdır. Tekerlek etrafına sarılmış hafif bir ipin ucuna da m kütlesi asılmıştır.

Sistem serbest bırakıldığında m kütlesinin çizgisel ivmesini, ipte oluşan gerilme kuvvetini ve tekerleğin açısal ivmesini bulunuz.

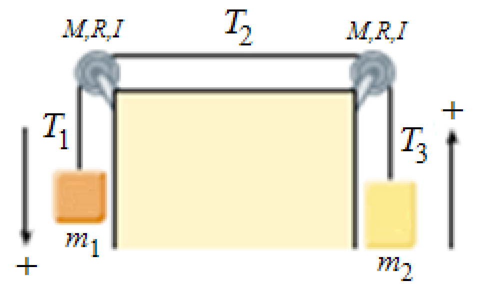
$$mg - T = ma \quad ; \quad \sum \tau = I\alpha \rightarrow TR = I\alpha \rightarrow T = \frac{Ia}{R^2}$$



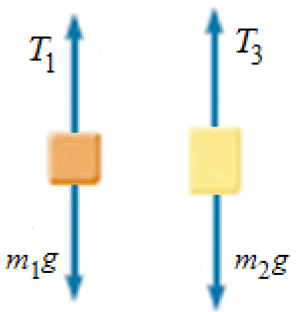
$$a = \frac{g}{\left(\dfrac{I}{mR^2} + 1\right)} \qquad T = \frac{I}{R^2}a = \frac{mg}{\left(1 + \dfrac{mR^2}{I}\right)}$$

$$\alpha = \frac{a}{R} = \frac{g}{\left(\dfrac{I}{mR} + R\right)}$$

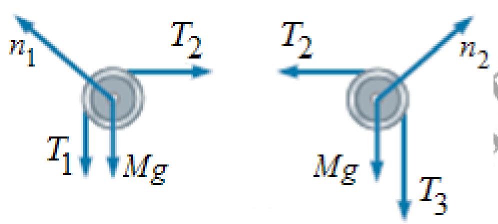
Örnek : Kütleleri m_1 ve m_2 olan iki blok hafif iplerle, Kütlesi M, yarıçapı R ve eylemsizlik momenti I olan sürtünmesiz iki özdeş makara üzerinden birbirine bağlanmıştır.



Sistem durgun halden serbest bırakıldığında, blokların ivmesi ne olur?



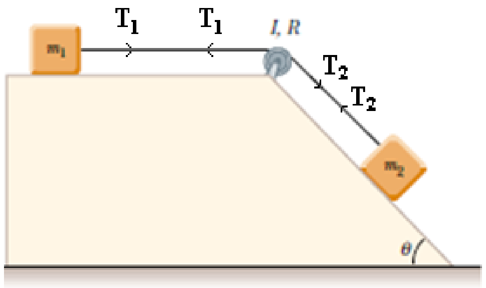
$$\left.\begin{aligned} m_1 g - T_1 &= m_1 a \\ T_3 - m_2 g &= m_2 a \end{aligned}\right\} \rightarrow (T_1 - T_3) = (m_1 - m_2)g - (m_1 + m_2)a \quad \text{(Eş-1)}$$



$$\left.\begin{aligned} \sum \tau = I\alpha &\rightarrow (T_1 - T_2)R = I\alpha \\ \sum \tau = I\alpha &\rightarrow (T_2 - T_3)R = I\alpha \end{aligned}\right\} \rightarrow (T_1 - T_3) = 2I\frac{a}{R^2} \quad \text{(Eş-2)}$$

$$\text{(Eş-1)} = \text{(Eş-2)} \rightarrow a = \frac{(m_1 - m_2)g}{\left(m_1 + m_2 + 2\dfrac{I}{R^2}\right)}$$

Örnek : Kütleleri m_1=2 kg ve m_2 = 6 kg olan iki blok hafif bir iple, yarıçapı R = 0.25 m ve kütlesi M = 10 kg olan disk şeklindeki bir makara üzerinden birbirine bağlanmıştır. Tüm yüzeylerde kinetik sürtünme katsayısı 0.36' dır ve m_2 bloğu 30^o' lik eğik düzlem üzerindedir.



- Sistem serbest bırakıldığında blokların ivmesini ve makaranın her iki yanındaki iplerde oluşan gerilme kuvvetlerini bulunuz.

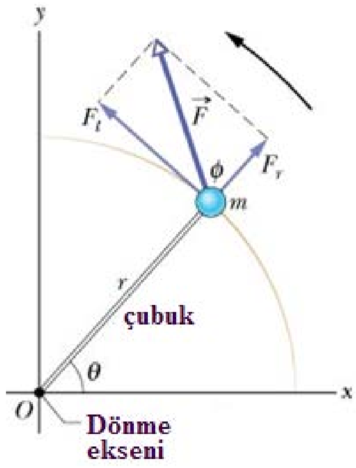
$$T_1 - \mu_k m_1 g = m_1 a \quad ; \qquad m_2 g \sin\theta - \mu_k m_2 g \cos\theta - T_2 = m_2 a$$

$$T_1 - T_2 = (m_1 + m_2)a + g(\mu_k m_1 + \mu_k m_2 \cos\theta - m_2 \sin\theta)$$

$$\sum \tau = I(-\alpha) = (T_1 - T_2)R \quad \rightarrow \quad (T_1 - T_2) = -\frac{I\alpha}{R} = -\frac{1}{2}MR^2 \frac{a/R}{R} = -0.5\,Ma$$

$$a = \frac{g(m_2 \sin\theta - \mu_k m_1 - \mu_k m_2 \cos\theta)}{m_1 + m_2 + 0.5M} = 0.309 \text{ m/s}^2$$

$$T_1 = m_1(\mu_k g + a) = 7.67 \text{ N} \qquad\qquad T_2 = T_1 + 0.5Ma = 9.22 \text{ N}$$



İş ve Dönme Kinetik Enerjisi :

Bölüm-7' de, bir kuvvetin bir cisim üzerinde yaptığı işin (W), o cismin kinetik enerjisindeki değişime (ΔK) eşit olduğunu gördük.

Benzer şekilde, bir torkun dönen bir cisim üzerinde yaptığı iş, o cismin dönme kinetik enerjisindeki değişime eşittir.

Kütlesi m olan cisim, r uzunluğunda ağırlıksız bir çubuğun ucuna yapıştırılmıştır. Katı cismin $d\theta$ kadar dönmesi için $\vec{F}$ kuvvetinin yaptığı iş: $dW = F_t r d\theta = \tau d\theta$ ile verilir.

Kuvvetin radyal bileşeni F_r harekete dik yönde olduğu için iş yapmaz.

θ_i ve θ_s aralığında kuvvetin yaptığı toplam iş:

$$W = \int F_t r d\theta = \int_{\theta_i}^{\theta_s} \tau d\theta$$

olur. İş-enerji teoreminden kinetik enerjideki değişim de şu ifadeye sahiptir:

$$\Delta K = W = \frac{1}{2} m v_s^2 - \frac{1}{2} m v_i^2 = \frac{1}{2} m r^2 \omega_s^2 - \frac{1}{2} m r^2 \omega_i^2 = \frac{1}{2} I \omega_s^2 - \frac{1}{2} I \omega_i^2$$

(10-31)

Örnek : Kütleleri M ve m olan iki cisim L uzunluğunda ağırlıksız bir çubuğun uçlarına yapıştırılmıştır.

Çubuğa dik bir eksene göre eylemsizlik momentinin minimum olduğu noktayı ve bu noktadan geçen eksene göre eylemsizlik momentini bulunuz.

$$I = \sum m_i r_i^2 \rightarrow I = Mx^2 + m(L-x)^2 = Mx^2 + mx^2 - 2mLx + mL^2$$

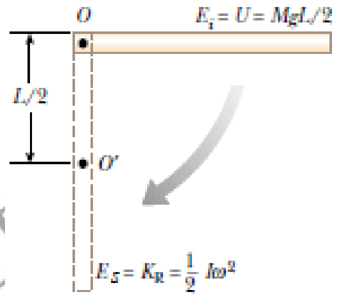
$$\frac{dI}{dx} = 0 \rightarrow 2(M+m)x - 2mL = 0$$

$$x = \left(\frac{m}{M+m}\right)L$$

$$I = (M+m)x^2 - 2mLx + mL^2 = \left(\frac{m^2}{M+m} - \frac{2m^2}{M+m} + m\right)L^2$$

$$I = \left(\frac{mM}{M+m}\right)L^2$$

Örnek : Kütlesi M ve boyu L olan çubuk, bir ucundan geçen eksen etrafında düşey düzlemde dönebilmektedir. Çubuk şekildeki gibi yatay konumdan serbest bırakılıyor.



a–) Çubuğun bırakıldığı andaki açısal ivmesi, kütle merkezinin ve uç noktasının çizgisel ivmesi nedir?

b–) Çubuk düşey konuma geldiği anda açısal hızı, kütle merkezinin ve uç noktasının çizgisel hızı nedir?

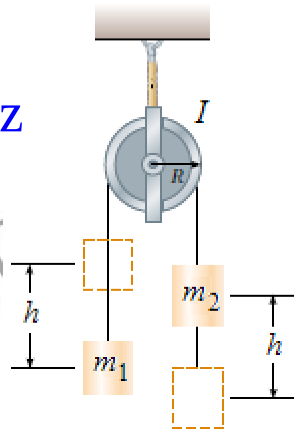
$$a\text{–)}\ \sum \tau = I\alpha = rF_{\perp} \quad \rightarrow \quad \left(\frac{1}{3}ML^2\right)\alpha = \frac{L}{2}Mg \quad \rightarrow \quad \alpha = \frac{3g}{2L}$$

$$a_t = r\alpha \quad \rightarrow \quad a_{t,km} = \frac{L}{2}\left(\frac{3g}{2L}\right) = \frac{3}{4}\text{g} \quad ; \quad a_{t,uç} = L\left(\frac{3g}{2L}\right) = \frac{3}{2}\text{g}$$

$$b\text{–)}\ E_i = E_s \quad \rightarrow \quad Mg\frac{L}{2} = \frac{1}{2}I\omega^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}ML^2\right)\omega^2 \quad \rightarrow \quad \omega = \sqrt{\frac{3g}{L}}$$

$$v = r\omega \quad \rightarrow \quad v_{km} = \frac{L}{2}\sqrt{\frac{3g}{L}} = \frac{1}{2}\sqrt{3gL} \qquad v_{uç} = L\sqrt{\frac{3g}{L}} = \sqrt{3gL}$$

Örnek : Kütlesi m_1 ve m_2 $(m_1 \neq m_2)$ olan iki blok şekildeki gibi hafif bir iple, yarıçapı R ve eylemsizlik momenti I olan sürtünmesiz bir makara üzerinden birbirine bağlanmıştır. Sistem durgun halden serbest bırakılıyor.



m_2 bloğu h kadar alçaldığı anda hızı ne olur?

Tam bu anda makaranın açısal hızı nedir?

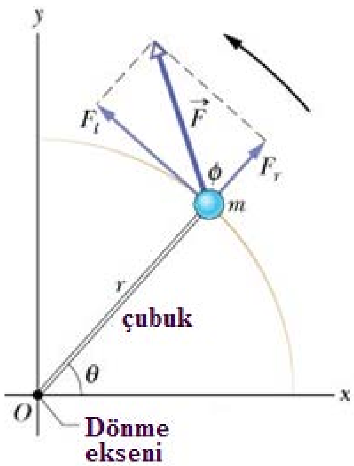
$$\Delta K = K_s - \cancel{K_i} = \left(\frac{1}{2}m_1 v^2 + \frac{1}{2}m_2 v^2 + \frac{1}{2}I\omega^2\right) - 0 = \frac{1}{2}\left(m_1 + m_2 + \frac{I}{R^2}\right)v^2$$

$$\omega = \frac{v}{R}$$

$$\Delta U = U_s - U_i = m_1 gh - m_2 gh$$

$$\Delta K + \Delta U = 0 \rightarrow \frac{1}{2}\left(m_1 + m_2 + \frac{I}{R^2}\right)v^2 + m_1 gh - m_2 gh = 0$$

$$v = \sqrt{\frac{2(m_2 - m_1)gh}{\left(m_1 + m_2 + \frac{I}{R^2}\right)}} \quad \rightarrow \quad \omega = \frac{v}{R} = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{2(m_2 - m_1)gh}{\left(m_1 + m_2 + \frac{I}{R^2}\right)}}$$



Güç :

Güç, bir kuvvet tarafından işin yapılma hızı olarak tarif edilir. Dönme durumunda ise güç, tork tarafından işin yapılma hızı olarak tarif edilir.

Cisim $d\theta$ kadar döndüğünde, torkun yaptığı iş $dW = \tau d\theta$ olduğuna göre, güç ifadesi

$$P = \frac{dW}{dt} = \frac{d}{dt}(\tau d\theta) = \tau \frac{d\theta}{dt} = \tau\omega$$

şeklinde elde edilir. ($P = \vec{F} \cdot \vec{v}$ ile karşılaştırınız).

İş-Dönme kinetik enerjisi teoremini özetleyecek olursak:

$W = \int_{\theta_i}^{\theta_s} \tau d\theta$; tork sabit ise $\rightarrow$ $W = \tau(\theta_s - \theta_i)$

$W = \Delta K = \frac{1}{2} I\omega_s^2 - \frac{1}{2} I\omega_i^2$ İş-Dönme Kinetik Enerjisi Teoremi

$P = \tau\omega$ Güç

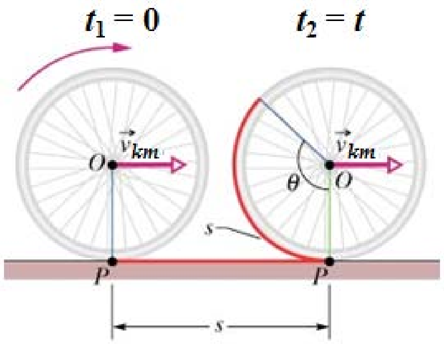
Ötelenme ve Dönme Hareketleri Arasındaki Benzerlik :

Ötelenme		Dönme
x	$\leftrightarrow$	θ
v	$\leftrightarrow$	ω
a	$\leftrightarrow$	α
$v = v_0 + at$	$\leftrightarrow$	$\omega = \omega_0 + \alpha t$
$x = x_o + v_0 t + \frac{at^2}{2}$	$\leftrightarrow$	$\theta = \theta_0 + \omega_0 t + \frac{\alpha t^2}{2}$
$v^2 - v_0^2 = 2a\left(x - x_o\right)$	$\leftrightarrow$	$\omega^2 - \omega_0^2 = 2\alpha\left(\theta - \theta_0\right)$
$K = \frac{1}{2}mv^2$	$\leftrightarrow$	$K = \frac{1}{2}I\omega^2$
m	$\leftrightarrow$	I
$F = ma$	$\leftrightarrow$	$\tau = I\alpha$
F	$\leftrightarrow$	τ
W= $\int \vec{F}.d\vec{x}$	$\leftrightarrow$	W= $\int \tau.d\theta$
$P = \vec{F} \cdot \vec{v}$	$\leftrightarrow$	$P = \tau\omega$

BÖLÜM-11
Yuvarlanma, Tork ve Açısal Momentum

Bu bölümde şu konulara değineceğiz:

- **Çembersel cisimlerin yuvarlanması ve sürtünmeyle olan ilişkisi**
- **Tork' a genel bir bakış**
- **Parçacık ve parçacık sistemlerinin açısal momentumu**
- **Dönmede Newton' un ikinci yasası**
- **Açısal momentumun korunumu**
- **Açısal momentumun korunumu ile ilgili uygulamalar**



Ötelenme + Dönme = Yuvarlanma

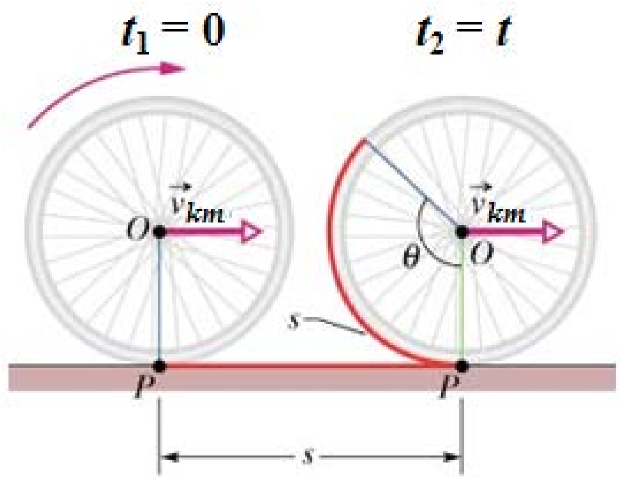
Bir yüzey üzerinde kaymadan yuvarlanan çembersel kesitli bir cisim düşünelim.

Cismin bu hareketini, kütle merkezinin ötelenmesi ile kütle merkezi etrafındaki dönme hareketinin bir toplamı olarak düşünebiliriz.

Kaymadan yuvarlanan bir bisiklet tekerleğinin $t_1 = 0$ ve $t_2 = t$ anlarında çekilmiş resimleri yukarıda verilmiştir.

Yerde durgun olan bir gözlemci, tekerleğin kütle merkezi O noktasının v_{km} hızıyla ilerlediğini görecektir.

Tekerleğin zeminle temas ettiği P noktası da aynı hızla hareket edecektir.



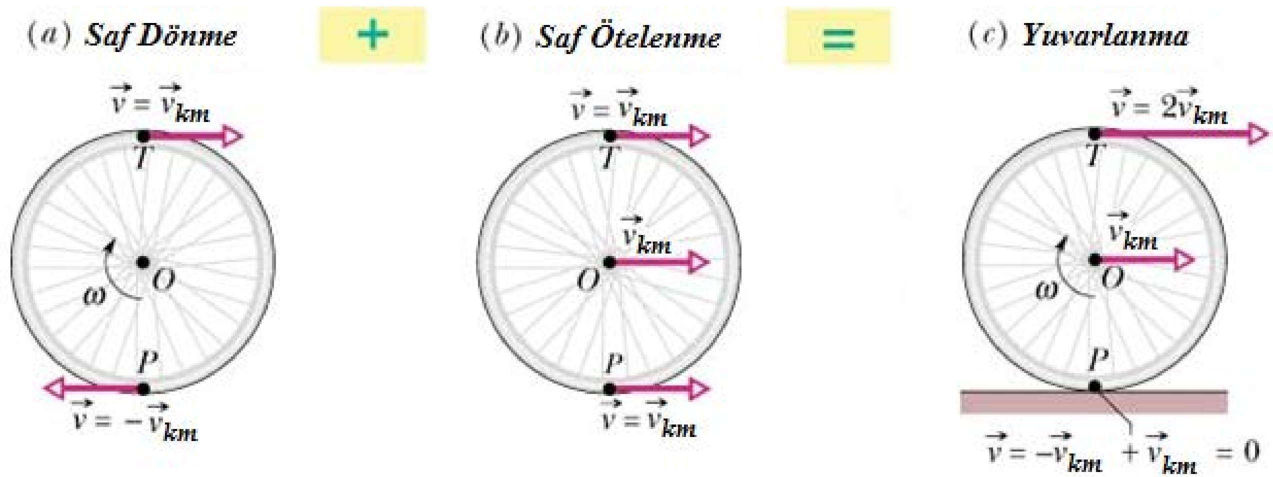
t_1 ile t_2 zaman aralığında O ve P noktalarının her ikisi de s kadarlık bir çizgisel yol alırlar. Dolayısıyla,

$$v_{\text{km}} = \frac{ds}{dt} \quad \text{(Eş-1)} \quad ; \quad s = R\theta \rightarrow \frac{ds}{dt} = R\frac{d\theta}{dt} = R\omega \quad \text{(Eş-2)}$$

Bu iki eşitlik birleştirilirse, kaymadan yuvarlanan bir cisim için:

$$v_{\text{km}} = R\omega$$

eşitliği elde edilir.



$\boxed{v_{km} = R\omega}$

Yuvarlanmanın, v_{km} hızıyla ötelenme ve kütle merkezi etrafında $\omega = v_{km} / R$ açısal hızıyla dönme hareketlerinin toplamı olduğunu biliyoruz.

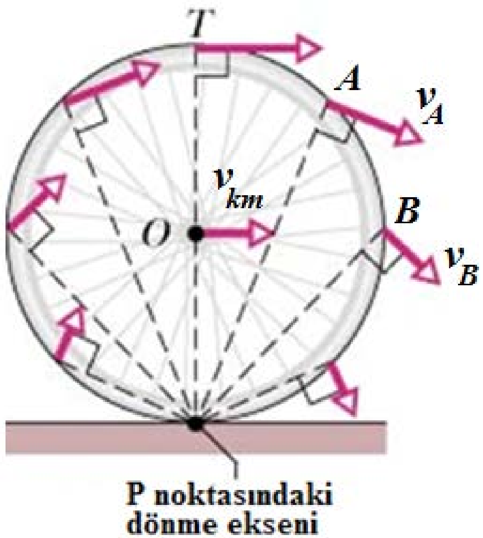
$\Rightarrow$ Cisim üzerindeki her noktanın hızı, bu iki hareketin hızlarının vektörel toplamıdır.

$\Rightarrow$ Saf dönme hareketinde, hız noktadan noktaya değişmektedir ve büyüklüğü O noktasından olan uzaklık r olmak üzere, ωr' ye eşittir .Yönü de, her noktada çembere teğettir (Şekil-*a*).

$\Rightarrow$ Saf ötelenme hareketinde, her noktanın hız vektörü ($\vec{v}_{km}$) aynıdır (Şekil-*b*).

$\Rightarrow$ Yuvarlanma hareketinde hız, bu iki hızın vektörel toplamıdır. Buna göre, P noktasının hızı her zaman sıfır, O noktasının hızı $\vec{v}_{km}$ $(r = 0)$ ve en üstteki T noktasının hızı da $2\vec{v}_{km}$' dır.

Yuvarlanma Hareketi ve "Saf Dönme" :



Yuvarlanma hareketine değişik bir bakış şekildeki gibidir. Bu hareket, tekerlekle yolun temas ettiği P noktasından dik olarak geçen eksene göre açısal hızı $\omega = \dfrac{v_{\text{km}}}{R}$ olan "saf dönme" hareketi olarak değerlendirilebilir.

Tekerlek üzerindeki her noktanın hızını bulmak için, hızın o noktadaki büyüklüğünü ve yönünü bilmemiz gerekir.

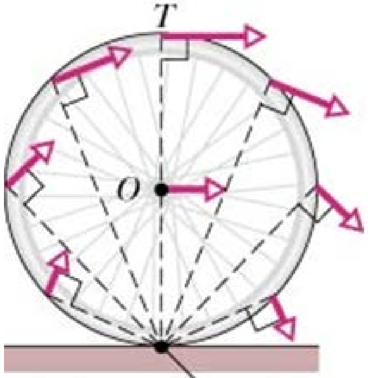
Hızın yönü, çembere her noktada teğettir. Örneğin, A noktasının hızı $\vec{v}_A$, A ve P noktalarını birbirine bağlayan, kesikli çizgilerle gösterilen doğruya diktir.

r, P noktasına olan uzaklığı göstermek üzere, tekerlek üzerindeki her noktanın çizgisel hızı $v = \omega r$ ile verilir.

Örneğin, T noktasında $r = 2R$ olduğundan, $v_T = 2R\omega = 2v_{\text{km}}$,

O noktasında $r = R$ olduğundan, $v_O = \omega R = v_{\text{km}}$ ve

P noktasında $r = 0$ olduğundan, $v_P = 0$' dır.



Yuvarlanmada Kinetik Enerji :

Solda, yuvarlanan bir cisim verilmiştir. Bu cismin P değme noktası etrafında "saf dönme" hareketi yaptığını düşünürsek, kinetik enerjiyi hesaplamak çok kolay olacaktır.

Cismin kütlesi M ve yarıçapı da R olsun.

I_P, P noktasına göre dönme eylemsizlik momenti olmak üzere, kinetik enerji

$K = \frac{1}{2} I_P \omega^2$ bağıntısı ile verilir.

I_P paralel-eksen teoreminden bulunabilir,

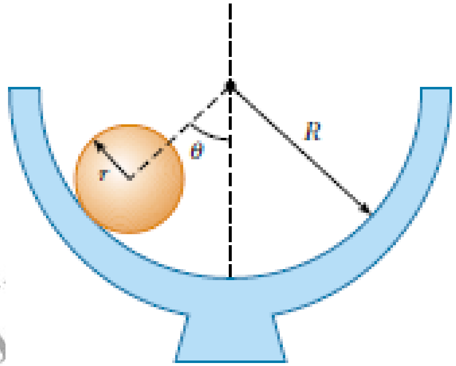
$$I_P = I_{\text{km}} + MR^2 \rightarrow K = \frac{1}{2}\left(I_{\text{km}} + MR^2\right)\omega^2 = \frac{1}{2} I_{\text{km}}\omega^2 + \frac{1}{2} MR^2\omega^2 = \frac{1}{2} I_{\text{km}}\omega^2 + \frac{1}{2} M v_{\text{km}}^2$$

bulunur.

Bu ifadedeki ilk terim, kütle merkezi O etrafında ω açısal hızıyla dönen cismin kinetik enerjisini, ikinci terim ise v_{km} hızıyla ötelenen cismin kinetik enerjisini temsil eder;

$$K = \frac{1}{2} I_{km}\omega^2 + \frac{1}{2} M v_{km}^2$$

Örnek : Yarıçapı r olan katı bir küre, R yarıçaplı yarım küre şeklindeki bir kabın içinde düşeyle θ açısı yapacak şekilde ilk hızsız serbest bırakılıyor. Küre kaymadan yuvarlandığına göre, kabın en alt noktasındaki açısal hızı ne olur?



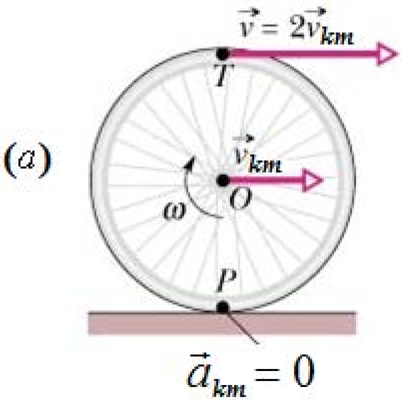
$$E_i = E_s$$

Referans noktamız O noktası (r yarıçaplı kürenin merkezi) olsun.

$$mg\left(R-r\right)(1-\cos\theta)=\frac{1}{2}mv_{km}^2+\frac{1}{2}I\omega^2=\frac{1}{2}mr^2\omega^2+\frac{1}{2}\left(\frac{2}{5}mr^2\right)\omega^2$$

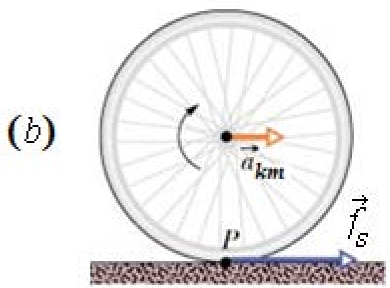
$$g\left(R-r\right)(1-\cos\theta)=\frac{7}{10}r^2\omega^2\rightarrow\omega=\sqrt{\frac{10g\left(R-r\right)(1-\cos\theta)}{7r^2}}$$

Sürtünme ve Yuvarlanma :



Sabit bir hızla yuvarlanan bir cisim (şekil - a) durumunda, değme noktası P' nin kayma eğilimi yoktur ve dolayısıyla bu noktada sürtünme kuvveti yoktur.

Yuvarlanan cisme net bir kuvvet etkimesi durumunda, kütle merkezi sıfırdan farklı bir $\vec{a}_{\text{km}}$ ivmesine sahip olur (Şekil-b).

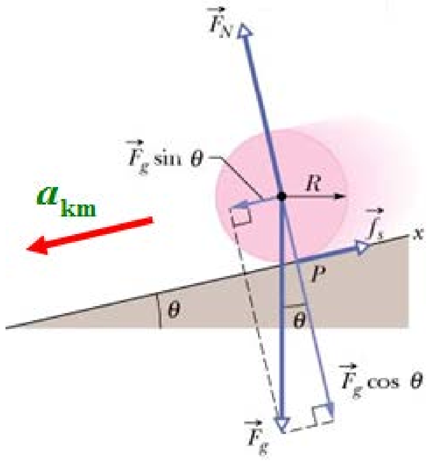


Yuvarlanan cisim sağa doğru ivmeleniyorsa, P noktası sola doğru kayma eğiliminde olurdu. Bu nedenle, statik sürtünme kuvveti $\vec{f}_s$ sağa doğru olacaktır. $f_s < f_{s,\max}$ olduğu sürece hareket düzgündür, yani kayma yoktur.

Kaymadan yuvarlanan bir cisim için $v_{\text{km}} = \omega R$' dir. Her iki tarafın zamana göre türevi alınırsa, yuvarlanan cismin kütle merkezinin çizgisel ivmesi (a_{km}) ile açısal ivmesi (α) arasındaki ilişkinin:

$$a_{\text{km}} = \frac{dv_{\text{km}}}{dt} = R\frac{d\omega}{dt} = R\alpha$$

olduğu görülür.



Eğik Düzlemden Aşağı Doğru Yuvarlanma :

Kütlesi M ve yarıçapı R olan yuvarlak düzgün bir cisim, eğim açısı θ olan eğik bir düzlemden aşağı doğru kaymadan yuvarlanmaktadır. x-ekseni boyunca ötelenme ve dönme hareketi için Newton' un ikinci yasasını uygulayarak cismin kütle merkezinin ivmesini (a_{km}) hesaplayabiliriz.

x-ekseni yönünde ötelenme için Newton' un ikinci yasasından:

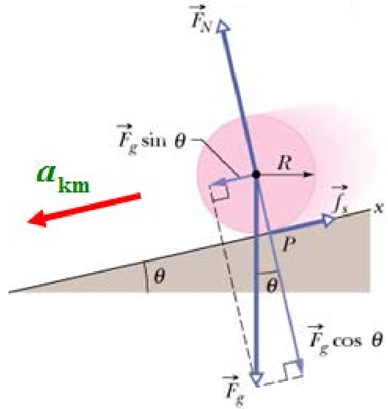
$$f_s - Mg\sin\theta = -Ma_{km} \qquad \text{(Eş-1)}$$

Kütle merkezi etrafında dönme için Newton' un ikinci yasasından:

$$\tau = Rf_s = I_{km}\alpha \quad , \quad \alpha = \frac{a_{km}}{R} \rightarrow Rf_s = I_{km}\frac{a_{km}}{R} \rightarrow f_s = I_{km}\frac{a_{km}}{R^2} \qquad \text{(Eş-2)}$$

Buradan da, $I_{km}\dfrac{a_{km}}{R^2} - Mg\sin\theta = -Ma_{km} \quad \Rightarrow \quad a_{km} = \dfrac{g\sin\theta}{1+\dfrac{I_{km}}{MR^2}}$

sonucuna ulaşılır.



$$\boxed{a_{km} = \frac{g\sin\theta}{1+\dfrac{I_{km}}{MR^2}}}$$

Çember

$$I_{km} = MR^2$$

$$a_{km} = \frac{g\sin\theta}{1+I_{km}/MR^2}$$

$$a_{km} = \frac{g\sin\theta}{1+MR^2/MR^2}$$

$$a_{km} = \frac{g\sin\theta}{1+1}$$

$$a_{km} = \frac{1}{2}g\sin\theta$$

Silindir

$$I_{km} = \frac{MR^2}{2}$$

$$a_{km} = \frac{g\sin\theta}{1+I_{km}/MR^2}$$

$$a_{km} = \frac{g\sin\theta}{1+MR^2/2MR^2}$$

$$a_{km} = \frac{g\sin\theta}{1+1/2}$$

$$a_{km} = \frac{2}{3}g\sin\theta$$

Küre

$$I_{km} = \frac{2}{5}MR^2$$

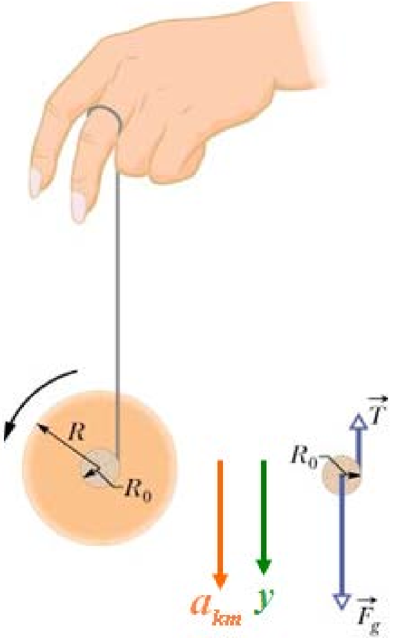
$$a_{km} = \frac{g\sin\theta}{1+I_{km}/MR^2}$$

$$a_{km} = \frac{g\sin\theta}{1+2MR^2/5MR^2}$$

$$a_{km} = \frac{g\sin\theta}{1+2/5}$$

$$a_{km} = \frac{5}{7}g\sin\theta$$

Yo-Yo:



Kütlesi M, yarıçapı R ve aksının yarıçapı da R_0 olan Yo-Yo bir ip boyunca aşağıya doğru yuvarlanarak iniyor. Daha önceki problemde olduğu gibi, y-ekseni boyunca ötelenme ve dönme hareketi için Newton' un ikinci yasasını uygulayarak cismin kütle merkezinin ivmesini (a_{km}) hesaplayabiliriz.

y-ekseni boyunca ötelenme için Newton' un ikinci yasasından:

$$Mg - T = Ma_{km} \qquad \text{(Eş-1)}$$

Kütle merkezi etrafında dönme için Newton' un ikinci yasasından:

$$\tau = R_0 T = I_{km}\alpha \quad , \quad \alpha = \frac{a_{km}}{R_0} \rightarrow T = I_{km}\frac{a_{km}}{R_0^{\,2}} \qquad \text{(Eş-2)}$$

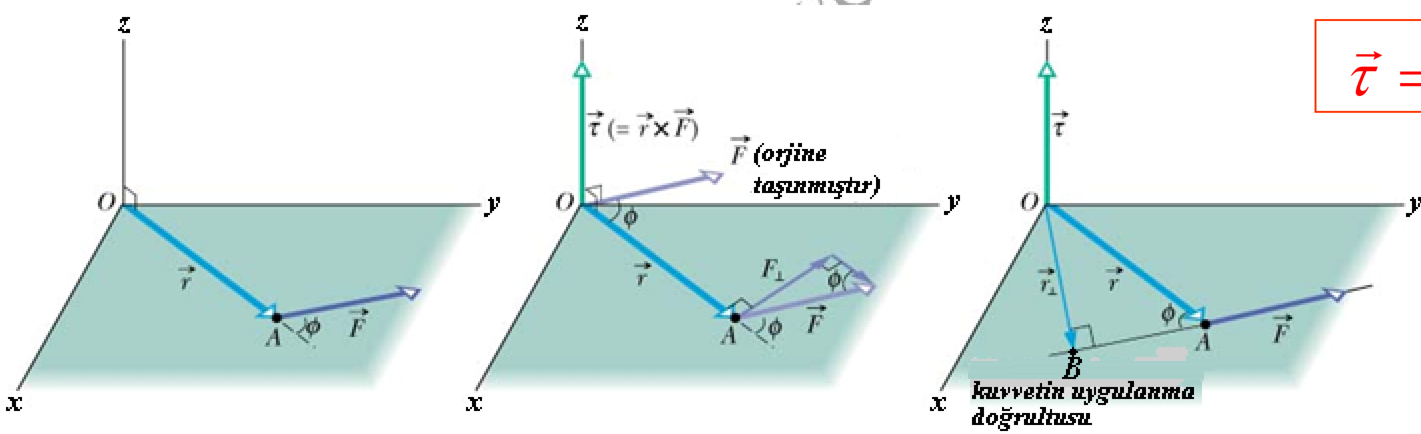
Buradan da, $Mg - I_{km}\dfrac{a_{km}}{R_0^{\,2}} = Ma_{km} \rightarrow \quad a_{km} = \dfrac{g}{1 + \dfrac{I_{km}}{MR_0^{\,2}}}$

Sonucuna ulaşılır.

Tork :

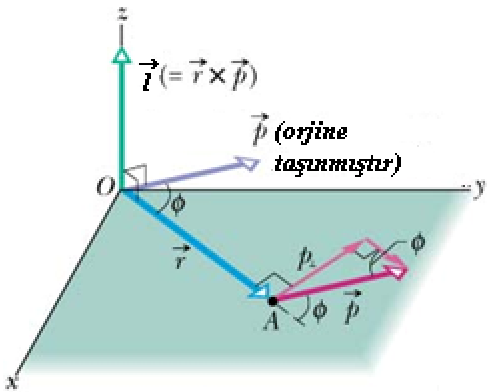
Bölüm 10' da, bir eksen etrafında dönen katı bir cisme etkiyen torku (τ) hesapladık. Şimdi de, herhangi bir doğrultuda hareket eden bir cisme etkiyen torku belirli bir noktaya göre hesaplayacağız.

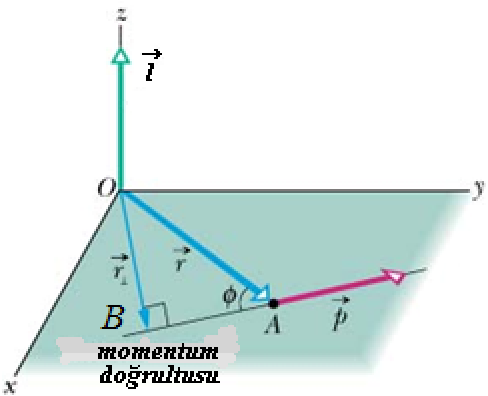
Bir cisme etkiyen $\vec{F}$ kuvvetinin uygulanma noktasının belirli bir noktaya göre konum vektörü $\vec{r}$ ise, bu kuvvetin oluşturduğu tork $\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$ ifadesi ile verilir.
Aşağıdaki şekilde, $\vec{r}$ ve $\vec{F}$ her ikisi de *xy*-düzlemindedir. Sağ-el kuralından, torkun *z*-ekseni yönünde olduğunu kolayca görebiliriz.



$$\boxed{\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}}$$

$\vec{r}$ ile $\vec{F}$ arasındaki açı ϕ olmak üzere, torkun büyüklüğü $\tau = rF\sin\phi$ ' dir.
OAB üçgeninden, $r\sin\phi = r_\perp \rightarrow \tau = r_\perp F$ bulunur ve Bölüm 10' daki tanımı ile uyumludur.





Açısal Momentum :

Çizigisel momentumun ($\vec{p} = m\vec{v}$) dönme hareketindeki karşı-geliri açısal momentum vektörüdür. Bu yeni vektör, $\vec{\ell} = \vec{r} \times \vec{p}$ ile tanımlanır.

Soldaki resimde, $\vec{r}$ ve $\vec{p}$ her ikisi de xy-düzlemindedir. Sağ-el kuralını uygulayarak $\vec{\ell}$ 'nin z-ekseni yönünde olduğunu kolayca bulabiliriz.

$\vec{r}$ ile $\vec{p}$ arasındaki açı ϕ olmak üzere, açısal momentumun büyüklüğü $\ell = rmv\sin\phi$ 'dir.

OAB üçgeninden: $r\sin\phi = r_{\perp} \rightarrow \ell = r_{\perp} mv$ bulunur.

Not : Açısal momentum, orijinin nerede seçildiğine bağlıdır. Orijini kaydırırsak, açısal momentum için farklı bir değer buluruz. SI sistemindeki birimi $\mathrm{kg \cdot m^2 / s}$ veya $\mathrm{J \cdot s}$ 'dir.

Örnek : $xy-$düzleminde hareket eden 1.5 kg kütleli bir cismin hızı $\vec{v} = 4.2\hat{\imath} - 3.6\hat{\jmath}$ (m/s) ile veriliyor. Cismin konumu $\vec{r} = 1.5\hat{\imath} + 2.2\hat{\jmath}$ (m) olduğunda, açısal momentumu ne olur?

$$\vec{p} = m\vec{v} = 1.5(4.2\hat{\imath} - 3.6\hat{\jmath}) = 6.3\hat{\imath} - 5.4\hat{\jmath}$$

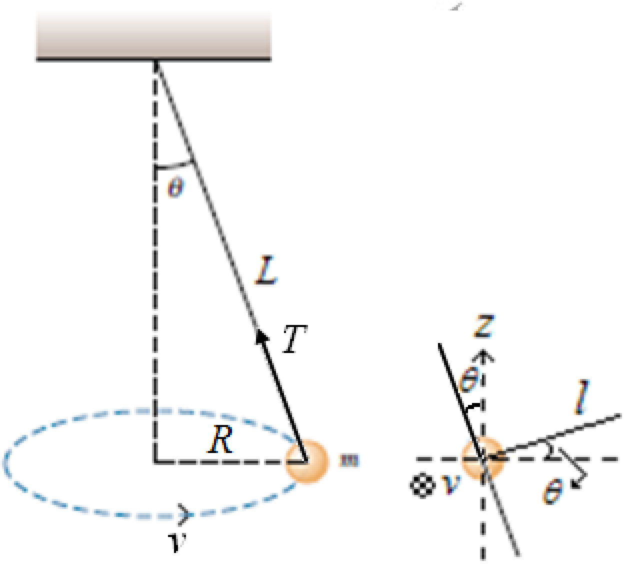
$$\vec{l} = \vec{r}\times\vec{p} = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ 1.5 & 2.2 & 0 \\ 6.3 & -5.4 & 0 \end{vmatrix} = \left[1.5*(-5.4) - 6.3*(2.2)\right]\hat{k} = -22\hat{k} \ \ (\mathrm{kg}\cdot\mathrm{m}^2/\mathrm{s})$$

Örnek : $xy-$düzleminde hareket eden 2.0 kg kütleli bir cismin herhangi bir andaki konumu $\vec{r} = 6.0\hat{\imath} + 5.0t\hat{\jmath}$ (m) ile veriliyor. Cismin açısal momentumunu bulunuz.

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = 5.0\hat{\jmath} \quad \rightarrow \quad \vec{p} = m\vec{v} = 2.0*5.0\hat{\jmath} = 10.0\hat{\jmath}$$

$$\vec{l} = \vec{r}\times\vec{p} = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ 6.0 & 5.0t & 0 \\ 0 & 10.0 & 0 \end{vmatrix} = 60.0\,\hat{k} \ \ (\mathrm{kg}\cdot\mathrm{m}^2/\mathrm{s})$$

Örnek : Uzunluğu L olan hafif bir ipin ucuna bağlı m kütlesi, şekildeki gibi yatay düzlemde dairesel hareket yapıyor (*konik sarkaç*). Hareket süresince ipin düşeyle yaptığı θ açısı sabit olduğuna göre, cismin açısal momentumunu bulunuz.



$$\left.\begin{aligned} T\sin\theta &= m\frac{v^2}{R} \\ T\cos\theta &= mg \end{aligned}\right\} \rightarrow \tan\theta = \frac{v^2}{gR}$$

$$v = \sqrt{gR\tan\theta} \quad \rightarrow \quad p = mv = m\sqrt{gR\tan\theta}$$

$\vec{l} = \vec{r}\times\vec{p} \rightarrow l_{r,net} = 0$ radyal yönde net açısal momentum sıfırdır.

$l_z = l\sin\theta$ z-ekseni yönünde net bir açısal momentum vardır.

$$l_z = \underbrace{\left[Lp\sin(90)\right]}_{l}\sin\theta = Lm\sqrt{gR\tan\theta}\,\sin\theta = \sqrt{m^2 g L^3 \frac{\sin^4\theta}{\cos\theta}}$$

$R = L\sin\theta$

Newton'un ikinci yasasının açısal formu :

Ötelenme hareketi için Newton' un ikinci yasası: $\vec{F}_{\text{net}} = \dfrac{d\vec{p}}{dt}$ ' dir.

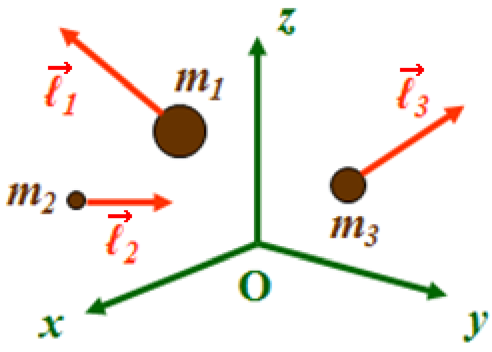
Bunun dönme hareketindeki karşı-geliri nedir?

$$\vec{\ell} = m\left(\vec{r}\times\vec{v}\right) \rightarrow \frac{d\vec{\ell}}{dt} = m\frac{d}{dt}\left(\vec{r}\times\vec{v}\right) = m\left(\frac{d\vec{r}}{dt}\times\vec{v} + \vec{r}\times\frac{d\vec{v}}{dt}\right) = m\left(\vec{v}\times\vec{v} + \vec{r}\times\vec{a}\right)$$

$$\vec{v}\times\vec{v} = 0 \rightarrow \frac{d\vec{\ell}}{dt} = m\left(\vec{r}\times\vec{a}\right) = \left(\vec{r}\times m\vec{a}\right) = \left(\vec{r}\times\vec{F}_{\text{net}}\right) = \vec{\tau}_{\text{net}}$$

Dönme hareketinde Newton' un ikinci yasası: $\vec{\tau}_{\text{net}} = \dfrac{d\vec{\ell}}{dt}$ ' dir.

Parçacık Sistemlerinin Açısal Momentumu :



n tane parçacıktan oluşan bir sistemde, parçacıkların açısal momentumları $\vec{\ell}_1, \vec{\ell}_2, \vec{\ell}_3, ..., \vec{\ell}_n$ olsun. Sistemin toplam açısal momentumu:

$$\vec{L} = \vec{\ell}_1 + \vec{\ell}_2 + \vec{\ell}_3 + ... + \vec{\ell}_n = \sum_{i=1}^{n} \vec{\ell}_i$$ ile verilir.

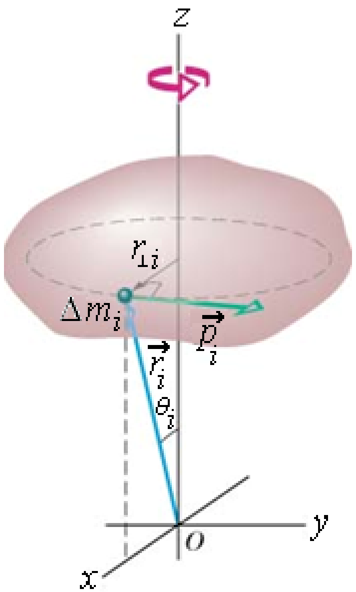
Her iki tarafın zamana göre türevinden,

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \frac{d\vec{\ell}_i}{dt} \quad , \quad \frac{d\vec{\ell}_i}{dt} = \vec{\tau}_{\text{net},i} \quad \rightarrow \frac{d\vec{L}}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \vec{\tau}_{\text{net},i} = \vec{\tau}_{\text{net}}$$

bulunur. Bu tork, sistem üzerine etki eden dış torktur.

Newton' un üçüncü yasası gereği, parçacıkların birbirlerine uyguladıkları torkların (iç tork) toplamı sıfırdır.

Bir Eksen Etrafında Dönme, Katı Cismin Açısal Momentumu :

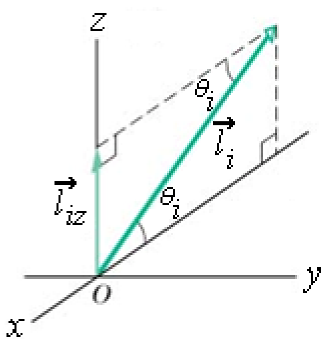


Dönme eksenini z-ekseni olarak alalım ve katı cismi kütleleri Δm_i, konum vektörleri $\vec{r}_i$ olan n tane parçaya bölelim. i. elemanın açısal momentumu $\vec{\ell}_i = \vec{r}_i \times \vec{p}_i$ ve büyüklüğü de $\ell_i = r_i p_i (\sin 90°) = r_i \Delta m_i v_i$ ifadesine sahiptir.

Açısal momentumun sadece z-bileşeni vardır ve büyüklüğü,

$$\ell_{iz} = \ell_i \sin\theta_i = (r_i \sin\theta_i)(\Delta m_i v_i) = r_{\perp i} \Delta m_i v_i$$

bulunur.



Açısal momentumların z-bileşenlerinin toplamı da:

$$L_z = \sum_{i=1}^{n} \ell_{iz} = \sum_{i=1}^{n} r_{\perp i} \Delta m_i v_i = \sum_{i=1}^{n} r_{\perp i} \Delta m_i (\omega r_{\perp i}) = \omega \left(\sum_{i=1}^{n} \Delta m_i r_{\perp i}^2 \right)$$

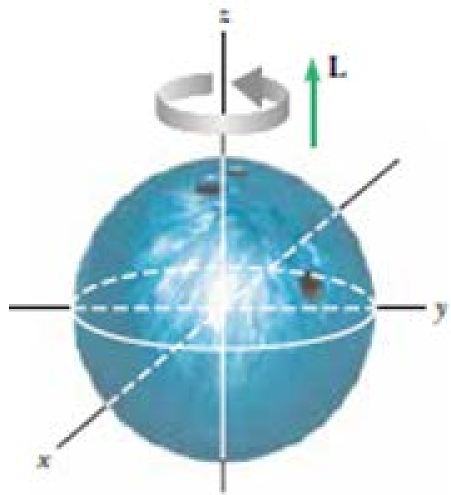
olacaktır.

$\sum_{i=1}^{n} \Delta m_i r_{\perp i}^2$ toplamı, katı cismin dönme eylemsizlik momenti olduğundan:

$$\boxed{L_z = I\omega}$$

(11-18)

Örnek : Kütlesi 6 kg ve yarıçapı 12 cm olan bowling topu kendi ekseni etrafında saniyede 10 defa dönmektedir. Topun açısal momentumu nedir?

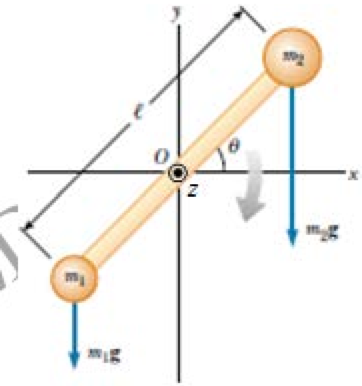


$$L = I\omega$$

$$I = \frac{2}{5}mR^2 = \frac{2}{5}(6)(12\times10^{-2})^2 = 345.6\times10^{-4}\ \ \mathrm{kg\cdot m^2}$$

$$L = I\omega \rightarrow L = \left(345.6\times10^{-4}\right)\cdot\left(10\times2\pi\right) = 2.17\ \ \mathrm{kg\cdot m^2/s}$$

Örnek : Kütlesi M ve uzunluğu l olan çubuk, kütle merkezinden dik olarak geçen eksen z-ekseni etrafında rahatça dönebilmektedir. İki ucuna m_1 ve m_2 kütlelerine sahip bilyeler monte edilmiş sistem düşey düzlemde ω hızı ile dönmektedir.



a–) Sistemin açısal momentumu nedir?

b–) Çubuk yatayla θ açısı yaptığı bir anda sistemin açısal ivmesi ne olur?

a–) $L = I\omega \rightarrow I = \frac{1}{12}Ml^2 + m_1\left(\frac{l}{2}\right)^2 + m_2\left(\frac{l}{2}\right)^2 = \frac{l^2}{4}\left(\frac{M}{3} + m_1 + m_2\right)$

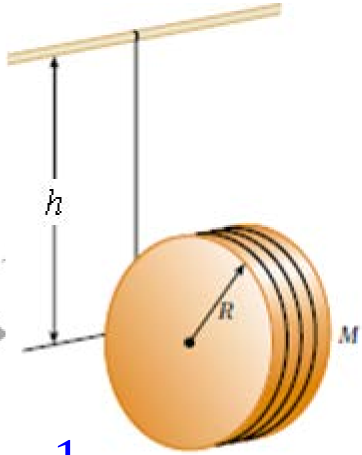
$$L = I\omega = \frac{l^2}{4}\left(\frac{M}{3} + m_1 + m_2\right)\omega$$

b–) $\sum \tau = I\alpha \rightarrow \alpha = \dfrac{\overbrace{\left[m_1 g\left(\frac{l}{2}\right)\cos\theta - m_2 g\left(\frac{l}{2}\right)\cos\theta\right]}^{\tau}}{\frac{l^2}{4}\left(\frac{M}{3} + m_1 + m_2\right)} = \dfrac{2(m_1 - m_2)g\cos\theta}{l\left(\frac{M}{3} + m_1 + m_2\right)}$

Örnek : Şekildeki gibi, bir noktadan sabitlenmiş hafif iple sarılmış R yarıçaplı, M kütleli bir disk verilmiştir. Sistem serbest bırakıldığında,

a–) ipte oluşan gerilme kuvvetini ve diskin kütle merkezinin ivmesini bulunuz.

b–) disk h kadar alçaldığı andaki hızını bulunuz.



$$a\text{–)}\quad Mg - T = Ma \;\; ; \;\; \sum \tau = I\alpha \rightarrow TR = I\frac{a}{R} \rightarrow T = \left(\frac{1}{2}MR^2\right)\frac{a}{R^2} = \frac{1}{2}Ma$$

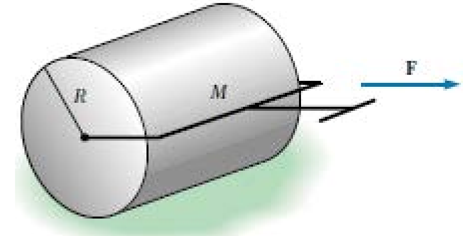
$$Mg - \frac{1}{2}Ma = Ma \rightarrow a = \frac{Mg}{\left(M + \frac{1}{2}M\right)} = \frac{2}{3}g$$

$$T = M(g-a) = M\left(g - \frac{2}{3}g\right) = \frac{1}{3}Mg$$

$$b\text{–)}\quad E_i = E_s \rightarrow Mgh = \frac{1}{2}Mv^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 = \frac{1}{2}Mv^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}MR^2\right)\omega^2 = \frac{3}{4}Mv^2$$

$$v = \sqrt{\frac{4}{3}gh}$$

Örnek : Kütlesi M, yarıçapı R olan bir çim biçme silindirine yatay doğrultuda şekildeki gibi bir F kuvveti uygulanıyor. Silindir yatay düzlemde kaymadan yuvarlanmaktadır. Kütle merkezinin ivmesinin $\left(\dfrac{2\vec{F}}{3M}\right)$ ve statik sürtünme katsayısının $\left(\dfrac{F}{3Mg}\right)$ olduğunu gösteriniz.

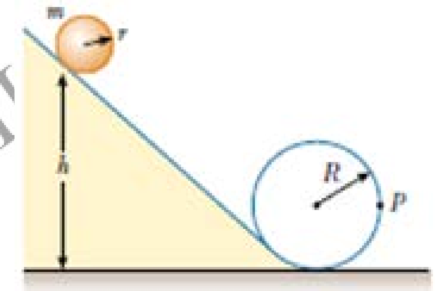


$$\sum \tau = I\alpha \rightarrow f_s R = I\frac{a}{R} \quad \rightarrow \quad f_s = \left(\frac{1}{2}MR^2\right)\frac{a}{R^2} = \frac{1}{2}Ma$$

$$F - f_s = Ma \rightarrow \left(M + \frac{1}{2}M\right)a = F \rightarrow \vec{a} = \frac{2\vec{F}}{3M}$$

$$f_s = \mu_s Mg = F - Ma = F - M\frac{2F}{3M} = \frac{F}{3} \rightarrow \mu_s = \frac{F}{3Mg}$$

Örnek : Kütlesi m, yarıçapı r olan bir küre, eğik bir düzlem üzerinden şekildeki gibi h yüksekliğinden ilk hızsız bırakılıyor ($h > r$) ve kaymadan yuvarlanarak R yarıçaplı çembersel bir yola giriyor. $a-$) Çembersel yoldaki turu tamamlayabilmesi için minimum h yüksekliği ne olmalıdır.



$a-$) $E_i = E_s$

$$\frac{1}{2}I\omega^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{2}{5}mr^2\right)\omega^2 = \frac{1}{5}mv^2$$

$$mgh = 2mgR + \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I\omega^2$$

$$mgh = 2mgR + \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{5}mv^2 = 2mgR + \frac{7}{10}mv^2 \rightarrow h = 2R + \frac{7}{10g}v^2$$

Çemberin içinde dairesel hareket yapan küre çemberin en tepesinde iken üzerine etki eden merkezcil kuvvet: $N + mg = m\dfrac{v^2}{R}$ olacaktır. h' nin minumum olması, hızın da mimumum olmasını sağlayacaktır. Bu noktada hızın minumum olması için $N = 0$ olmalı.

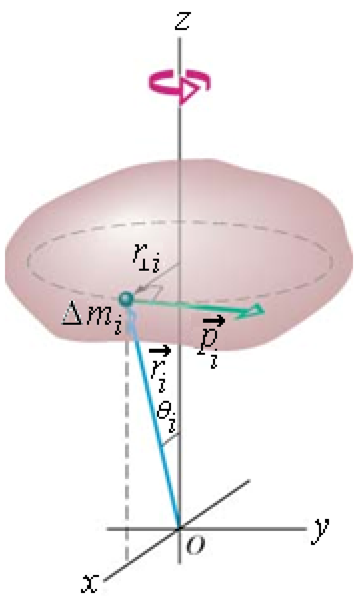
$$v_{\min} = \sqrt{gR} \quad \text{ve} \quad h_{\min} = 2R + \frac{7}{10g}v_{\min}^2 = 2R + \frac{7}{10g}gR = \left(2 + \frac{7}{10}\right)R = 2.7R$$

$b-$) $h = 3R$ durumunda, P noktasında küreye etki eden merkezcil kuvvet nedir?

$$h = R + \frac{7}{10g}v^2 \rightarrow \quad 3R = R + \frac{7}{10g}v^2 \quad \rightarrow \quad v^2 = \frac{20gR}{7}$$

P noktasında merkezcil kuvvet: $F_{mer} = m\dfrac{v^2}{R} = m\dfrac{20gR}{7R} = \dfrac{20}{7}mg$

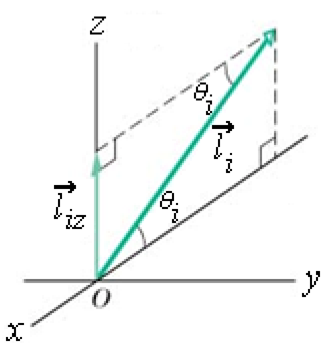
Açısal Momentumun Korunumu :



Katı cisimlerde dahil, tüm parçacık sistemleri için Newton' un ikinci yasasının açısal formu: $\dfrac{d\vec{L}}{dt} = \vec{\tau}_{\text{net}}$ ' tir.

Eğer sistem üzerine etkiyen net tork sıfırsa ($\vec{\tau}_{\text{net}} = 0$):

$\dfrac{d\vec{L}}{dt} = 0 \rightarrow \vec{L} =$ sabit olur. Bu, açısal momentumun korunum ilkesidir.

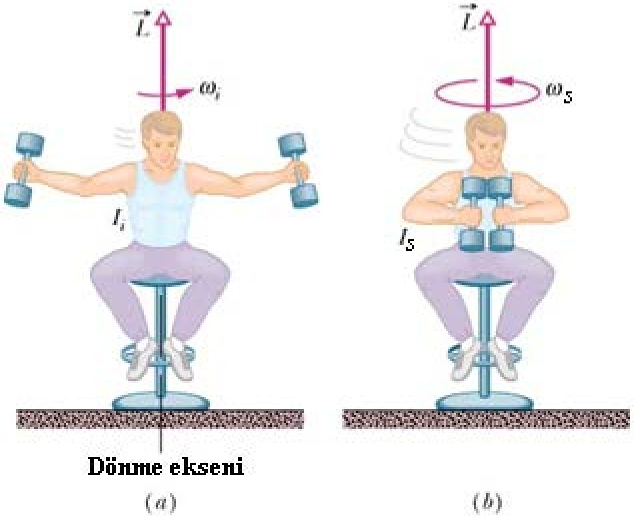


Bir başka deyimle;

$$\left(\begin{array}{l}\textbf{Herhangi bir } \boldsymbol{t_i} \textbf{ anındaki} \\ \textbf{net açısal momentum}\end{array}\right) = \left(\begin{array}{l}\textbf{Herhangi bir } \boldsymbol{t_s} \textbf{ anındaki} \\ \textbf{net açısal momentum}\end{array}\right)$$

$$\vec{L}_i = \vec{L}_s$$

Not : Dış torkun belli bir eksen yönündeki bileşeni sıfırsa, açısal momentumun o eksen yönündeki bileşeni değişmez (korunur).



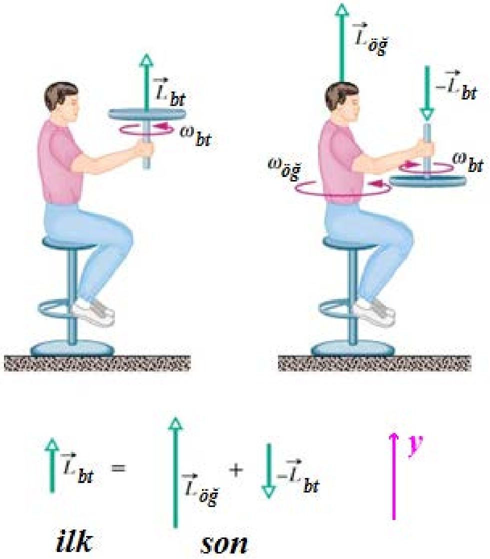
Resimdeki öğrenci, düşey eksen etrafında dönebilen bir taburenin üzerinde oturmaktadır. Kollarını iki yana açan öğrencinin ellerinde özdeş ağırlıklar varken ω_i açısal hızıyla dönmektedir. Bu durumdaki açısal momentum vektörü $\vec{L}$ dönme ekseni boyunca yukarı yöndedir (Şekil-*a*).

Öğrenci belli bir anda kollarını topluyor (Şekil-*b*) ve bu hareket sonucunda, dönme eylemsizlik momenti, I_i ' den daha düşük bir değer olan I_s ' ye düşüyor. Öğrenci ve tabure sistemi üzerine dış bir tork etkimediğinden, açısal momentum korunur.

t_i anında: $L_i = I_i\omega_i$ ve t_s anında: $L_s = I_s\omega_s$ olduğundan,

$$L_i = L_s \rightarrow I_i\omega_i = I_s\omega_s \rightarrow \omega_s = \frac{I_i}{I_s}\omega_i \quad \text{bulunur.}$$

$I_s < I_i \rightarrow \dfrac{I_i}{I_s} > 1 \rightarrow$ $\omega_s > \omega_i$. Öğrenci son durumda daha hızlı döner.



Örnek : Düşey eksen etrafında rahatça dönebilen bir taburenin üzerindeki öğrencinin elinde, 3.9 devir/s' lik bir açısal hızla dönen ve eylemsizlik momenti $1.2 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ olan bir bisiklet tekerleği vardır. Öğrenci, belli bir anda tekerleği aynı açısal hızla ters yönde dönecek şekilde çeviriyor. Bunun sonucunda, öğrencinin açısal hızı ne olur?

Öğrenci (öğ) + tabure (t)

birleşik sisteminin toplam dönme eylemsizlik momenti

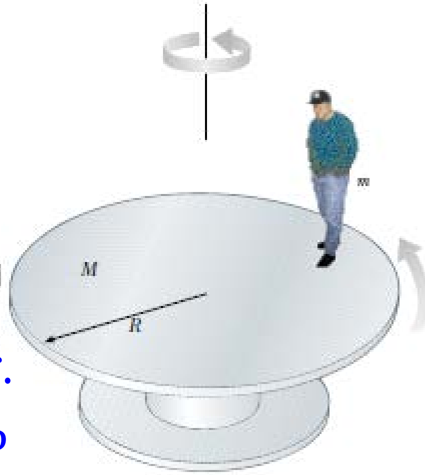
$$I_{öğ} + I_t = 6.8 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

$$I_{bt} = 1.2 \text{ kg} \cdot \text{m}^2 \;\; ; \;\; \omega_{bt} = 3.9 \text{ dev/s} \;\; ; \;\; I_{öğ+t} = 6.8 \text{ kg} \cdot \text{m}^2 \;\; \rightarrow \;\; \omega_{öğ} = ?$$

$$L_i = L_s \rightarrow L_{bt} = -L_{bt} + L_{öğ+t} \rightarrow L_{öğ+t} = 2L_{bt}$$

$$2I_{bt}\omega_{bt} = I_{öğ+t}\omega_{öğ} \rightarrow \omega_{öğ} = \frac{2I_{bt}\omega_{bt}}{I_{öğ+t}} = \frac{2\times1.2\times3.9}{6.8} = 1.4 \text{ dev/s}$$

Örnek : Yarıçapı $R = 2$ m, kütlesi $M = 100$ kg olan disk şeklindeki bir platform, merkezinden dik olarak geçen eksen etrafında rahatça dönebilmektedir. Kütlesi $m = 60$ kg olan bir öğrenci platformun dış kenarı üzerindeyken platformla birlikte 2 rad/s hızla dönmektedir. Öğrenci daha sonra platformun merkezine doğru yürümeye başlıyor. $r = 0.5$ m noktasına geldiğinde öğrenci+platform hangi hızla döner?

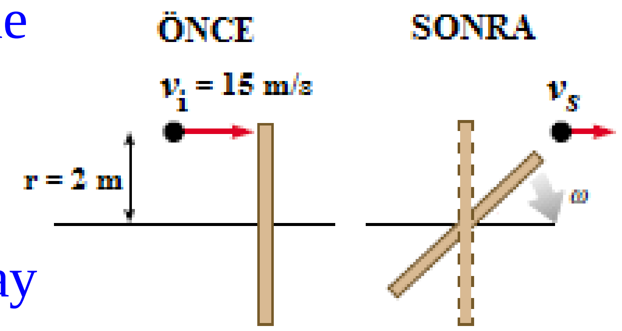


$$L_i = L_s \rightarrow I_i\omega_i = I_s\omega_s \rightarrow \omega_s = \frac{I_i}{I_s}\omega_i$$

$$I_i = \frac{1}{2}MR^2 + mR^2 \;\;;\;\; I_s = \frac{1}{2}MR^2 + m(r)^2$$

$$\omega_s = \frac{\left(\frac{1}{2}MR^2 + mR^2\right)}{\left(\frac{1}{2}MR^2 + m(r)^2\right)}\omega_i = \frac{(200+240)}{(200+15)}(2) = 4.1 \text{ rad/s}$$

Örnek : Kütle merkezinden dik olarak geçen eksene göre eylemsizlik momenti 12 $\text{kg} \cdot \text{m}^2$ ve uzunluğu 4 m olan ince bir çubuk şekildeki gibi düşey olarak durmaktadır. Kütlesi 2 kg olan bir cisim 15 m/s yatay hızla çubuğun tepe noktasına esnek olarak çarpıp aynı yönde yoluna devam ediyor. Çarpışmadan sonra cismin çizgisel hızı ve çubuğun açısal hızı nedir?

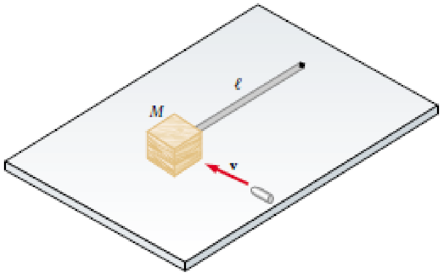


$$L_i = L_s \rightarrow rmv_i = rmv_s + I\omega = rmv_s + I\frac{v_s}{r}$$

$$v_s = \frac{m}{\left(m + \frac{I}{r^2}\right)} v_i = \frac{2}{\left(2 + \frac{12}{4}\right)} 15 = 6 \text{ m/s}$$

$$\omega_s = \frac{v_s}{r} = \frac{6}{2} = 3 \text{ rad/s}$$

Örnek : Kütlesi M olan tahta bir blok sürtünmesiz yatay bir masa üzerinde kütlesi ihmal edilebilir l uzunluğuna sahip ince bir çubuğa monte edilmiştir. Çubuk diğer ucundan geçen dik eksen etrafında serbestçe dönebilmektedir. Kütlesi m olan bir mermi çubuğa dik doğrultuda v hızıyla tahta bloğa çarpıp saplanıyor. Mermi+blok sisteminin çarpışmadan sonraki açısal hızı ne olur? Bu çarpışmada hangi oranda bir kinetik enerji kaybı olmuştur?



$$L_i = L_s$$

$$lmv = I\omega \rightarrow \omega = \frac{lmv}{(M+m)l^2} = \frac{mv}{(M+m)l}$$

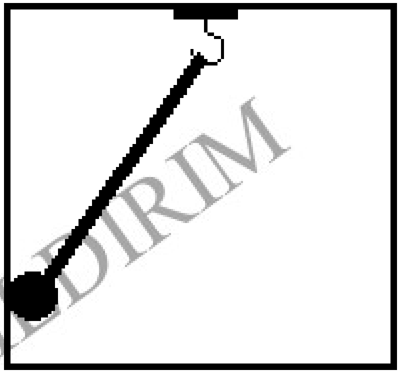
$$\frac{K_i - K_s}{K_i} = \frac{\frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}I\omega^2}{\frac{1}{2}mv^2} = 1 - \frac{I}{m}\left(\frac{\omega}{v}\right)^2 = 1 - \frac{(M+m)l^2}{m}\left(\frac{m}{(M+m)l}\right)^2$$

$$\frac{K_i - K_s}{K_i} = 1 - \frac{m}{(M+m)} = \frac{M}{M+m}$$

Ötelenme ve Dönme Hareketleri Arasındaki Benzerlik :

Ötelenme		Dönme
x	$\leftrightarrow$	θ
v	$\leftrightarrow$	ω
a	$\leftrightarrow$	α
p	$\leftrightarrow$	ℓ
$K = \frac{1}{2} m v^2$	$\leftrightarrow$	$K = \frac{1}{2} I \omega^2$
m	$\leftrightarrow$	I
$F = ma$	$\leftrightarrow$	$\tau = I\alpha$
F	$\leftrightarrow$	τ
$P = Fv$	$\leftrightarrow$	$P = \tau\omega$
$\vec{F}_{\text{net}} = \frac{d\vec{p}}{dt}$	$\leftrightarrow$	$\vec{\tau}_{\text{net}} = \frac{d\vec{\ell}}{dt}$
$p = mv$	$\leftrightarrow$	$L = I\omega$

BÖLÜM-12
Titreşimler

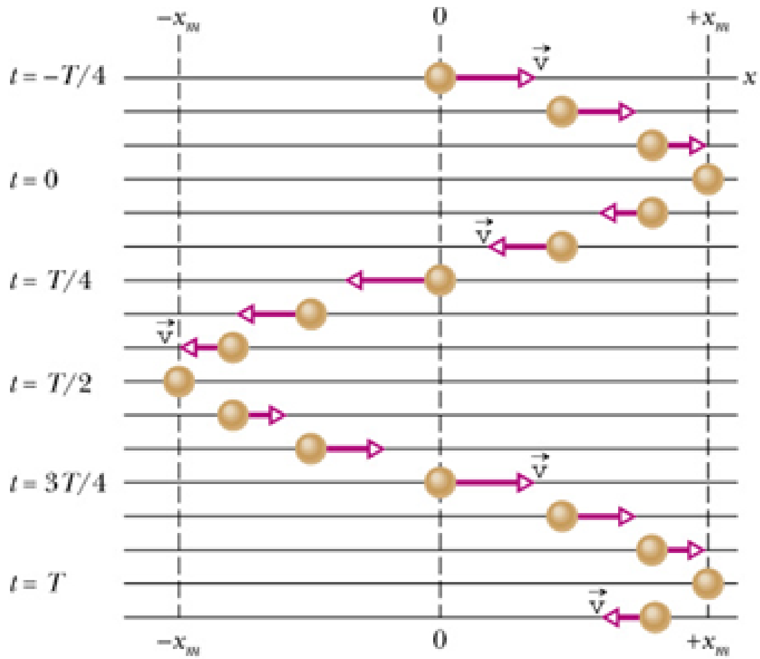


Bu bölümde şu ana başlıklara değinilecektir:

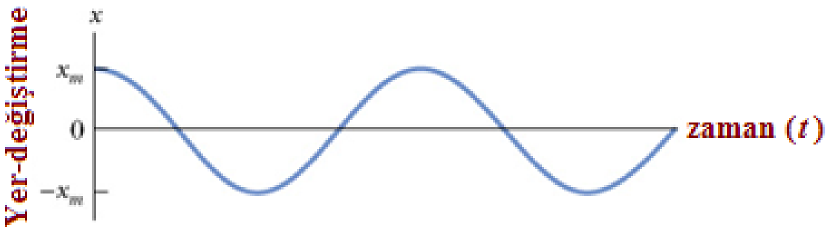
- **Basit harmonik harekette yer-değiştirme, hız ve ivme**
- **Basit harmonik salınıcının enerjisi**
- **Harmonik salınıcılara örnekler:**
  - **i. Kütle-yay sistemi**
  - **ii. Basit sarkaç**
  - **iii. Fiziksel sarkaç**
  - **iv. Burulma sarkacı**
- **Sönümlü harmonik hareket**
- **Zorla salınımlar/rezonans**

Basit Harmonik Hareket :

Şekil-*a*' da basit harmonik hareket yapan bir cisim resmedilmiştir.



(a)



(b)

$$\boxed{x(t) = x_m \cos(\omega t + \phi)}$$

Cismin yer-değiştirmesi $x(t) = x_m \cos(\omega t + \phi)$ bağıntısı ile verilir ve zamanla nasıl değiştiği Şekil-*b*' de resmedilmiştir.

$$\boxed{x(t) = x_m \cos(\omega t + \phi)}$$ Konum fonksiyonu = cismin denge noktasına olan uzaklığı

x_m niceliği "genlik" olarak bilinir ve cismin maksimum yer-değiştirmesidir.

ω niceliği de hareketin "açısal frekans" ıdır ve

$$\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}$$

ifadesine sahiptir ve SI sisteminde birimi rad/s' dir.

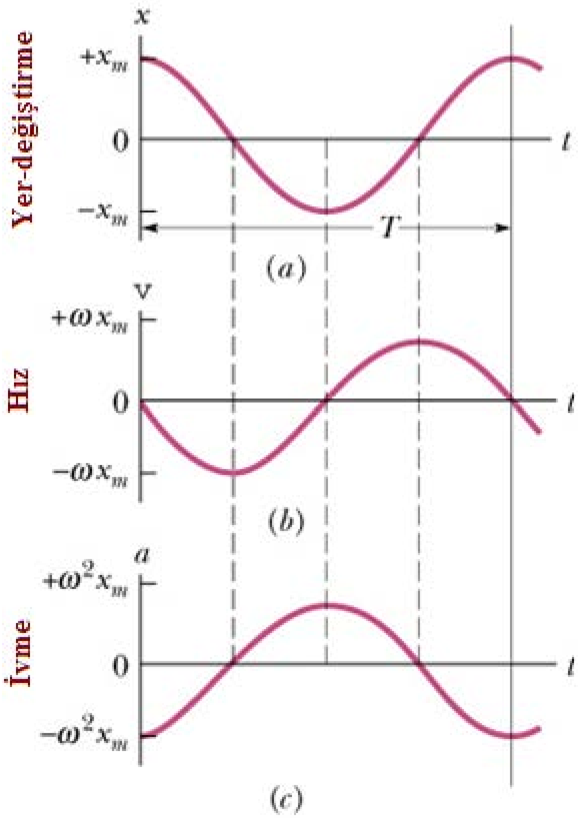
$(\omega t + \phi)$ ise t anındaki faz açısıdır ve SI sisteminde birimi radyandır.

ϕ niceliği, salınıcının "faz sabitidir" ve salınan cismin $t = 0$ anındaki $x(0)$ konumuna ve $v(0)$ hızına bağlıdır. SI sisteminde birimi radyandır.

Hareketin zaman içinde kendisini tekrarladığına dikkat ediniz.
Bir tam salınım için geçen süre "period (T)" olarak tarif edilir.
SI sistemindeki birimi saniyedir.

Birim zamandaki salınım sayısı "frekans (f)" olarak tanımlanır.
SI sistemindeki birimi hertz (s^{-1})' dir.

$$x(t) = x_m \cos(\omega t + \phi)$$



$\phi = 0$ durumunda $x(t) = x_m \cos \omega t$' dir ve Şekil-a' da çizilmiştir.

Basit Harmonik Salınıcının Hızı :

$$v(t) = \frac{dx(t)}{dt} = \frac{d}{dt}\left[x_m \cos(\omega t + \phi)\right] = -\omega x_m \sin(\omega t + \phi)$$

ωx_m çarpımı hızın alabileceği maksimum değerdir (v_m). $\phi = 0$ durumunda $v(t) = -v_m \sin \omega t$' dir ve Şekil-$b$' de çizilmiştir.

Basit Harmonik Salınıcının İvmesi :

$$a(t) = \frac{dv(t)}{dt} = \frac{d}{dt}\left[-\omega x_m \sin(\omega t + \phi)\right] = -\omega^2 x_m \cos(\omega t + \phi) = -\omega^2 x(t)$$

$\omega^2 x_m$ ivmenin alabileceği maksimum değerdir (a_m).

$\phi = 0$ durumunda $a(t) = -\omega^2 x_m \cos \omega t$' dir ve Şekil-$c$' de çizilmiştir

Basit Harmonik Hareket İçin Kuvvet Yasası :

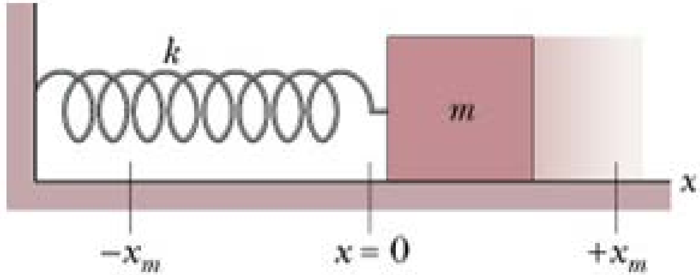
Basit harmonik salınıcı için $a(t) = -\omega^2 x(t)$ olduğunu biliyoruz.

Newton' un ikinci yasasına göre: $F = ma = -m\omega^2 x = -\left(m\omega^2\right)x$ olur.

> "Bir cisme etkiyen net kuvvet ile cismin yer-değiştirmesi arasında, Hook Yasası olarak bilinen, $F = -C \cdot x$ şeklinde bir ilişki varsa (burada C bir sabit), o cisim basit harmonik hareket yapıyor" denir.

Bu durumda, basit harmonik salıcının periyodu

$m\omega^2 = C \;\rightarrow\; T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{C}}$ olarak bulunur.



Üstte sürtünmesiz bir düzlemde, yay sabiti k olan bir yaya bağlı m kütleli cismin hareketi resmedilmiştir.

m kütleli cisme etkiyen net kuvvet Hooke yasasına uyar: $F = -kx$.
Bunu, $F = -Cx$ ile karşılaştırırsak $C = k$ bulunur.

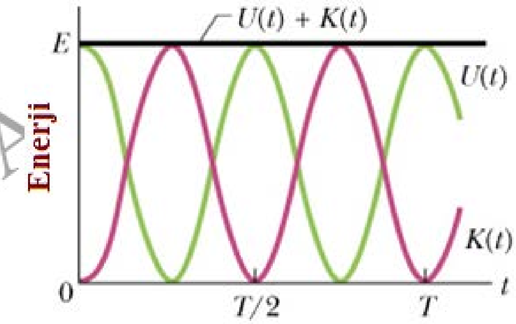
Buradan da, hareketin açısal frekansı ve periyodu

$$\omega = \sqrt{\frac{C}{m}} = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad \text{ve} \quad T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{C}} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

olarak hesaplanır.

Basit Harmonik Hareketin Enerjisi :

Basit harmonik hareket yapan bir cismin mekanik enerjisi E, herhangi bir anda cismin potansiyel enerjisi U ile kinetik enerjisi K' nın toplamıdır.



Potansiyel Enerji: $U = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}kx_m^2 \cos^2(\omega t + \phi)$

Kinetik Enerji: $K = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\omega^2 x_m^2 \sin^2(\omega t + \phi) = \frac{1}{2}\cancel{m}\frac{k}{\cancel{m}}x_m^2 \sin^2(\omega t + \phi)$

Mekanik Enerji: $E = U + K = \frac{1}{2}kx_m^2\left[\cos^2(\omega t + \phi) + \sin^2(\omega t + \phi)\right] = \frac{1}{2}kx_m^2$

Şekilde potansiyel enerji "yeşil", kinetik enerji "kırmızı" ve mekanik enerji de "siyah" çizgi ile gösterilmiştir. U ve K zamanla değişirken, E sabittir. Salınım yapan cismin potansiyel ve kinetik enerjileri arasında dönüşüm olurken, toplamları sabit kalmaktadır.

Örnek : x-ekseni üzerinde basit titreşim hareketi yapan bir cismin konumu $x(t) = 4\cos(3\pi t+\pi)$ ifadesi ile veriliyor (t saniye ve x cm cinsindendir).

a–) Hareketin frekansını ve periyodunu bulunuz.

b–) Hareketin genliğini ve faz sabitini bulunuz.

c–) Cismin t = 0.25 s anındaki konumunu bulunuz.

$$a\text{–)}\ \omega = 3\pi \rightarrow \omega = 2\pi f = 3\pi \rightarrow f = 1.5 \text{ hertz}$$

$$T = \frac{1}{f} = \frac{2}{3} = 0.67 \text{ s}$$

$$b\text{–)}\ x(t) = x_m \cos(\omega t + \phi) \rightarrow x_m = 4 \text{ cm ve } \phi = \pi$$

$$c\text{–)}\ x(0.25) = 4\cos(3\pi \frac{1}{4} + \pi) = 2.83 \text{ cm}$$

Örnek : Yay sabiti 8 N / m olan bir yaya bağlı 0.5 kg kütleli cisim, genliği 10 cm olan basit harmonik hareket yapıyor.

$a-$) Cismin maksimum hızı ve ivmesi nedir?

$b-$) Cisim denge noktasından 6 cm uzakta iken hızı ve ivmesi nedir?

$c-$) Cisim $x = 8$ cm' den $x = 0$' a ne kadar zamanda gider?

$$a-)\ x(t) = x_m \cos(\omega t + \phi) \quad ; \quad \omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = 4 \text{ rad/s} \ ; \ x_m = 10 \text{ cm}$$

$$x(t) = 10\cos(4t) \rightarrow \left.\begin{array}{l} v(t) = -40\sin(4t) \\ a(t) = -160\cos(4t) \end{array}\right\} \rightarrow \begin{array}{l} v_m = 40 \text{ cm/s} = 0.4 \text{ m/s} \\ a_m = 160 \text{ cm/s}^2 = 1.6 \text{ m/s}^2 \end{array}$$

$$b-)\ x(t) = 10\cos(4t) = 6 \quad \Rightarrow \quad t = \frac{\cos^{-1}(0.6)}{4} = 0.23 \text{ s}$$

$$v(0.23) = -40\sin(4\times 0.23) = -32 \text{ cm/s} = -0.32 \text{ m/s}$$

$$a(0.23) = -160\cos(4\times 0.23) = -97 \text{ cm/s}^2 = -0.97 \text{ m/s}^2$$

$c-)\ x(t) = 10\cos(4t)$

$$x_1 = 8 \rightarrow t_1 = \frac{\cos^{-1}(0.8)}{4} = 0.161 \text{ s}$$

$$x_2 = 0 \rightarrow t_2 = \frac{\cos^{-1}(0)}{4} = 0.392 \text{ s}$$

$$\Delta t = t_2 - t_1 = 0.231 \text{ s}$$

Örnek : Yay sabiti 25 N / m olan bir yaya bağlı 1.0 kg kütleli bir cisim x - ekseni üzerinde basit harmonik hareket yapıyor. Cisim $t = 0$'da, $x = -3$ cm noktasından serbest bırakıldığına göre,

a–) Hareketin periyodu nedir?

b–) Cismin konumunu, hızını ve ivmesini zamanın fonksiyonu olarak bulunuz.

c–) Cismin maksimum hızı ve ivmesi nedir?

$$a\text{–)}\ \omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{25}{1.0}} = 5 \text{ rad/s} \ ; \ \omega = \frac{2\pi}{T} \rightarrow T = \frac{2(3.14)}{5} = 1.256 \text{ s}$$

$$b\text{–)}\ x(t) = x_m \cos(\omega t + \phi) \Rightarrow t = 0\text{'da } x = -3 \text{ cm} \Rightarrow \phi = \pi \text{ olmalıdır.}$$

$$x(t) = 3\cos(5t - \pi)$$

$$v(t) = \frac{dx}{dt} = -15\sin(5t - \pi)$$

$$a(t) = \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{dv}{dt} = -75\cos(5t - \pi)$$

$$\boxed{\begin{aligned} c\text{–)}\ v_m &= -15\underbrace{\sin(5t - \pi)}_{-1} = 15 \text{ cm/s} \\ a_m &= -75\underbrace{\cos(5t - \pi)}_{-1} = 75 \text{ cm/s}^2 \end{aligned}}$$

Örnek : Yay sabiti 20 N / m olan bir yaya bağlı 0.5 kg kütleli cisim x-ekseni üzerinde genliği 3 cm olan basit harmonik hareket yapıyor.

a–) Sistemin mekanik enerjisini ve cismin maksimum hızını bulunuz.

b–) Cisim denge noktasından 2 cm uzakta iken hızı nedir?

c–) Cisim bu noktadayken kinetik ve potansiyel enerjisi nedir?

$$a\text{–})\; E = K + U = \frac{1}{2}kx_m^2 = \frac{1}{2}(20)(0.03)^2 = 9\times10^{-3}\ \text{J}$$

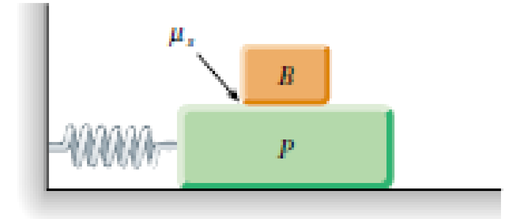
$$x = 0 \rightarrow U = 0 \rightarrow E = \frac{1}{2}mv_m^2 \rightarrow v_m = \sqrt{\frac{2(9\times10^{-3})}{0.5}} = 0.19\ \text{m/s}$$

$$b\text{–})\; E = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2 \rightarrow v = \sqrt{\frac{2E - kx^2}{m}} = \mp 0.141\ \text{m/s}$$

$$c\text{–})\; K = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}(0.5)\left(\mp 0.141\right)^2 = 5\times10^{-3}\ \text{J}$$

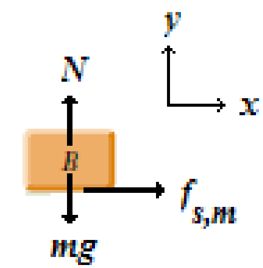
$$U = E - K = 9\times10^{-3} - 5\times10^{-3} = 4\times10^{-3}\ \text{J}$$

Örnek : Sürtünmesiz yatay bir yüzeyde bulunan P bloğunun üzerinde m kütleli başka bir blok (B bloğu) bulunmaktadır. Blokların temas yüzeylerinde statik sürtünme katsayısı $\mu_s = 0.6$' dır. P bloğu bir yaya bağlıdır ve $f = 1.5$ Hz frekansında basit harmonik hareket yapmaktadır. B bloğunun P' nin üzerinden kaymaması için, harmonik hareketin maksimum genliği ne olmalıdır?



B bloğu da P bloğu ile birlikte basit harmonik hareket yapar.

$$\sum F_y = N - mg = 0 \rightarrow N = mg \rightarrow f_{s,m} = \mu_s mg = ma_m$$

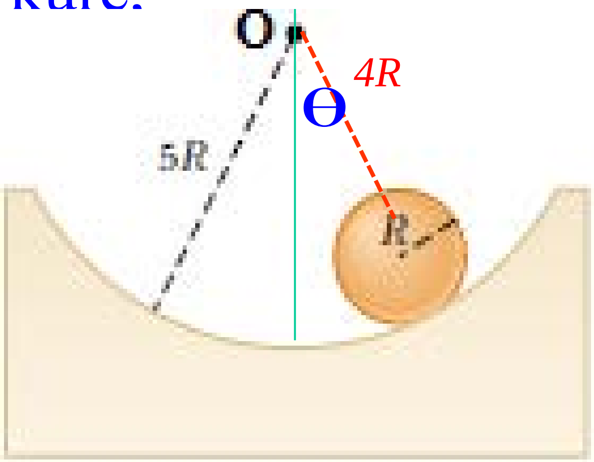


Basit harmonik harekette, $a_m = \omega^2 x_m$ ile verilir.

$$\mu_s mg = ma_m \rightarrow \mu_s g = a_m = (2\pi f)^2 x_m \rightarrow x_m = \frac{\mu_s g}{(2\pi f)^2}$$

$$x_m = 0.0662 \text{ m} = 6.62 \text{ cm}$$

Örnek : Kütlesi m ve yarıçapı R olan katı bir küre. $5R$ yarıçaplı silindirik bir yüzeyde kaymadan yuvarlanarak, düşey eksen etrafında küçük salınımlar yapıyor. Salınım periyodunun



$$T = 2\pi\sqrt{\frac{28R}{5g}}$$

olduğunu gösteriniz?

$$\left.\begin{array}{l} v = 4R\omega_O \;\rightarrow\; \omega_O : \text{küçük kürenin O noktasına göre açısal hızı} \\ v = R\omega \;\rightarrow\; \omega : \text{küçük kürenin kendi eksenine göre açısal hızı} \end{array}\right\} \omega = 4\omega_O$$

$$E = \underbrace{mg4R(1-\cos\theta)}_{U} + \underbrace{\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I\omega^2}_{K} \qquad \text{bulunur.}$$

$v = 4R\omega_O$ ve $\omega = 4\omega_O$ ifadelerini enerji eşitliğinde yerine yazar ve zamana göre türev alıp sıfıra eşitlersek (enerji korunduğu için zamanla değişmez)

$$E = mg4R(1-\cos\theta) + \frac{1}{2}m\left(4R\omega_O\right)^2 + \frac{1}{5}mR^2\left(4\omega_O\right)^2 \qquad \left\{\text{küre için } I = \frac{2}{5}mR^2\right\}$$

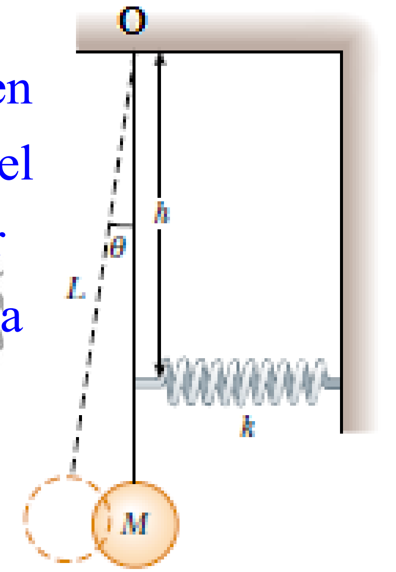
$$\frac{dE}{dt} = 4g\sin\theta\frac{d\theta}{dt} + 16R\omega_O\frac{d\omega_O}{dt} + \frac{32}{5}R\omega_O\frac{d\omega_O}{dt} = 0 \qquad \{\sin\theta \approx \theta \ \text{ küçük açı}\}$$

$$4g\theta\omega_O + 16R\omega_O\alpha + \frac{32}{5}R\omega_O\alpha = 0$$

$$\alpha = -\frac{20g}{112R}\theta = -\frac{5g}{28R}\theta \rightarrow \alpha = -\omega^2\theta$$

$$\omega = \sqrt{\frac{5g}{28R}} = \frac{2\pi}{T} \rightarrow T = 2\pi\sqrt{\frac{28R}{5g}}$$ bulunur.

Örnek : Kütlesi M olan bir cisim, O noktası etrafında serbestçe dönebilen L uzunluğunda ağırlıksız bir çubuğa monte edilerek şekildeki gibi fiziksel bir sarkaç yapılmıştır. Sarkaç, bağlantı noktasından h kadar aşağıdaki bir noktadan da yay sabit k olan bir yaya bağlanmıştır. Sistem bir miktar sola çekilip serbest bırakılıyor ve basit harmonik hareket yapıyor. Salınımın frekansını bulunuz.



Enerjinin korunumundan,

$E = MgL(1-\cos\theta) + \frac{1}{2}Mv^2 + \frac{1}{2}kx^2$ yazılabilir.

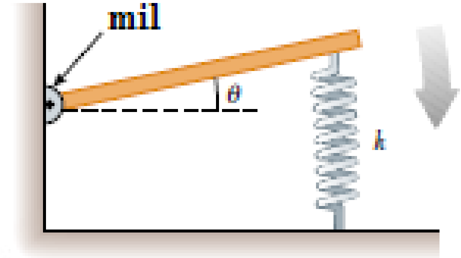
$v = L\omega,\ x = h\sin\theta$ ve $\cos\theta \cong 1$ ifadelerini yukarda yerine yazar ve zamana göre türev alırsak,

$$\alpha = -\left(\frac{MgL + kh^2\cos\theta}{ML^2}\right)\theta$$

bulunur. Küçük açı $\{\cos\theta \cong 1\}$ yaklaşımı ile birlikte,

$$2\pi f = \left(\frac{MgL + kh^2}{ML^2}\right)^{1/2} \rightarrow f = \frac{1}{2\pi L}\sqrt{gL + \frac{kh^2}{M}}$$ elde edilir.

Örnek : Kütlesi m ve uzunluğu L olan ince bir çubuk, bir ucundan geçen mil etrafında serbestçe dönebilmektedir. Çubuğun diğer ucu da yay sabiti k olan bir yaya bağlanmıştır. Çubuğun sağ ucu şekildeki gibi küçük bir θ açısı kadar kaldırılıp serbest bırakılıyor ve sistem basit salınım hareketi yapıyor. Salınımın periyodunu bulunuz.



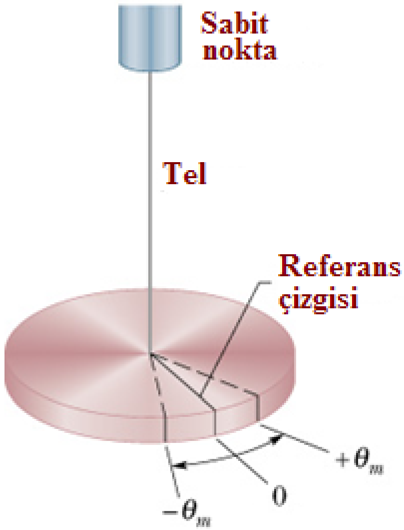
Denge konumunda $\sum \vec{\tau} = 0 \;\Rightarrow\; x_0 = \dfrac{mg}{2k}$ bulunur. (x_0, sistem dengede iken yaydaki sıkışma miktarı). Enerjinin korunumundan:

$$E = mg\left(\frac{L}{2}\sin\theta\right) + \frac{1}{2}k\left(x - x_0\right)^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 = \frac{1}{2}kx_0^2 + \frac{1}{2}kx^2 + \frac{1}{6}mv^2$$

Her iki tarafın zamana göre türevini alır sıfıra eşitlersek,

$$kxv + \frac{1}{3}mva = 0 \rightarrow a = -\frac{3k}{m}x \quad \text{bulunur.}$$

Buradan da periyoda geçersek, $\dfrac{2\pi}{T} = \sqrt{\dfrac{3k}{m}} \rightarrow T = 2\pi\sqrt{\dfrac{m}{3k}}$ elde edilir.



Burulma Sarkacı :

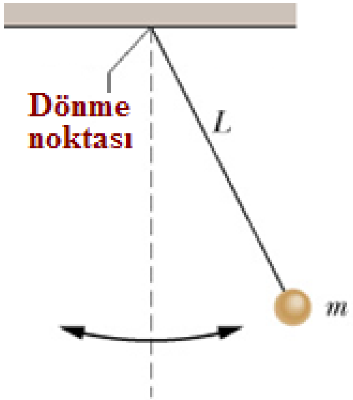
Eylemsizlik momenti I olan disk, bir tel ile asılmış ve ekseni etrafında salınım yapmaktadır. Diskin açısal yer-değiştirmesi θ olduğunda telin diske uyguladığı geri çağırıcı tork $\tau = -\kappa\theta$ olur. Bu, Hooke yasasının açısal formudur. Burada κ telin burulma sabitidir.

$\tau = -\kappa\theta$ ile $F = -C \cdot x$ ifadelerini karşılaştırırsak, $C = \kappa$ buluruz. Kütlenin de dönmede eylemsizlik momentine karşılık geldiğini hatırlarsak, salınımın açısal frekansı ve periyodu,

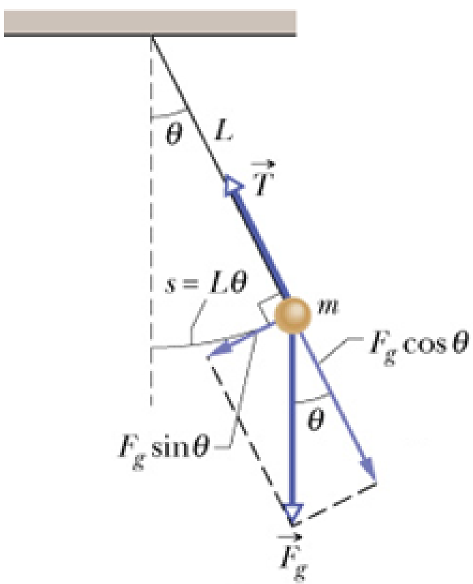
$$\omega = \sqrt{\frac{C}{I}} = \sqrt{\frac{\kappa}{I}} \quad ; \qquad T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{C}} = 2\pi\sqrt{\frac{I}{\kappa}}$$

olarak bulunur. Burada $I,$ diskin tele göre eylemsizlik momentidir. Açısal yer-değiştirme de $\theta(t) = \theta_m \cos(\omega t + \phi)$ ifadesine sahiptir.

Basit Sarkaç :



Sabit bir noktaya bağlı L uzunluğundaki ip ile ipin ucuna bağlı m noktasal cisminden oluşur. Kütle denge konumundan bir miktar uzaklaştırılıp serbest bırakılırsa, basit harmonik hareket yapacaktır.



Biri yerçekimi, diğeri de ipteki gerilme olmak üzere, cisme etkiyen iki kuvvet vardır. Bu kuvvetlerin oluşturduğu net tork $\tau = -r_\perp F_g = -Lmg\sin\theta$' dır. Burada θ, radyan cinsindendir ve ipin düşey eksenle yaptığı açıdır. $\theta \ll 1$ (θ<10°) durumunda, $\sin\theta \cong \theta$ yaklaşımı yapılabilir ve $\tau \cong -\left(Lmg\right)\theta$ bulunur.

Bunu, $F = -C \cdot x$ ile karşılaştırırsak, $C = Lmg$ buluruz. Kütlenin de dönmede eylemsizlik momentine karşılık geldiğini hatırlarsak, salınımın açısal frekansı ve periyodu

$$\omega = \sqrt{\frac{C}{I}} = \sqrt{\frac{mgL}{I}} \quad ; \quad T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{C}} = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mgL}} = 2\pi\sqrt{\frac{mL^2}{mgL}} = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$$

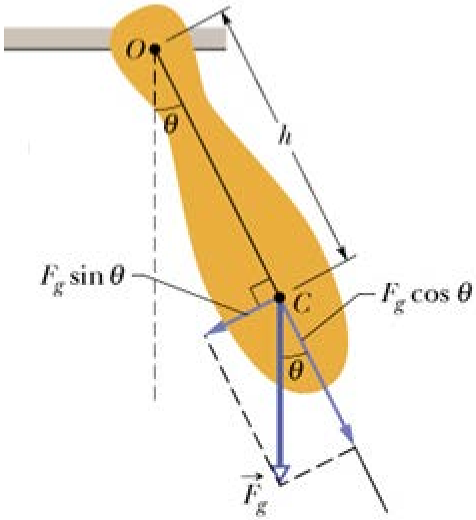
olarak bulunur. (12-19)

Küçük-açı yaklaşımında, $\theta \ll 1$ ve dolayısıyla $\sin\theta \cong \theta$ kabullenmesini yaptık.

"**küçük**" açı? Neye göre? Nasıl karar vereceğiz?

θ **(derece)**	θ **(radyan)**	**sin** θ
5	0.087	0.087
10	0.174	0.174
15	0.262	0.259 (~% 1'lik fark)
20	0.349	0.342 (~% 2'lik fark)

Sonuç: $\theta < 10^{o}$ durumunda, küçük-açı yaklaşımını kullanabiliriz.



Fiziksel Sarkaç :

Bir O noktasından asılmış ve yerçekimi etkisiyle bu nokta etrafında salınım yapan katı cisimdir. Cisme etkiyen net tork, $\tau = -mgh\sin\theta$ ifadesine sahiptir. Burada h, katı cismin kütle merkezi ile O noktası arasındaki mesafedir.

Küçük-açı yaklaşımı ($\theta < 10°$) yaparsak, net tork

$\tau \cong -(mgh)\theta$ olur.

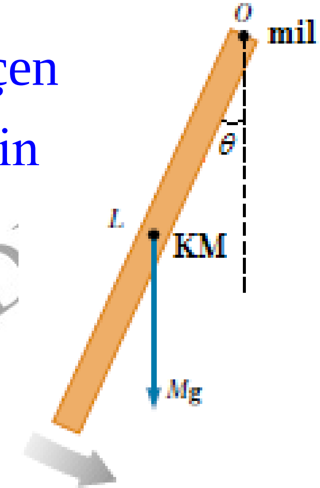
Bunu, $F = -C \cdot x$ ile karşılaştırırsak $C = mgh$ buluruz.

Kütlenin de dönmede eylemsizlik momentine karşılık geldiğini hatırlarsak, salınımın açısal frekansı ve periyodu

$$\omega = \sqrt{\frac{C}{I}} = \sqrt{\frac{mgh}{I}} \quad ; \quad T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{C}} = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mgh}}$$

Burada I, katı cismin O noktasından geçen eksene göre dönme eylemsizlik momentidir($I = I_{km} + mh^2$).

Örnek : Kütlesi M ve uzunluğu L olan ince bir çubuk, bir ucundan geçen mil etrafında serbestçe dönebilmektedir. Küçük salınımlar için hareketin periyodunu bulunuz.



I. Yol :

Enerjinin korunumundan,

$$E = Mg\frac{L}{2}(1-\cos\theta) + \frac{1}{2}I\omega^2 = Mg\frac{L}{2}(1-\cos\theta) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}ML^2\right)\omega^2$$

yazılabilir.

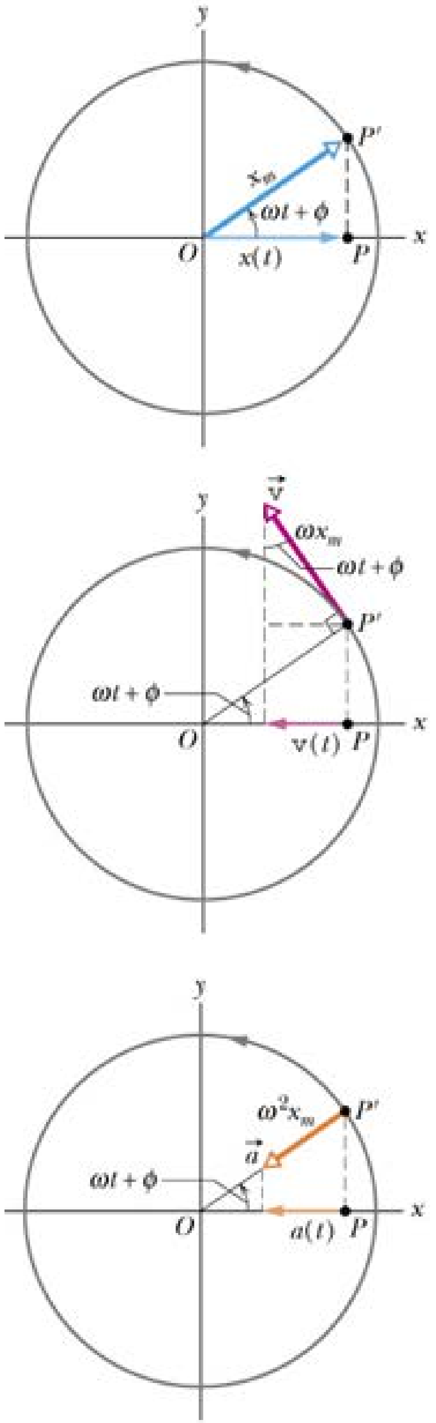
Her iki tarafın zamana göre türevini alır sıfıra eşitlersek;

$$Mg\frac{L}{2}\underbrace{\sin\theta}_{\theta}\omega + \frac{1}{3}ML^2\omega\alpha = 0 \rightarrow \alpha = -\frac{3g}{2L}\theta \rightarrow \frac{2\pi}{T} = \sqrt{\frac{3g}{2L}} \rightarrow T = 2\pi\sqrt{\frac{2L}{3g}}$$

II. Yol :

$$\sum\tau = I\alpha \rightarrow \alpha = -\frac{Mg\frac{L}{2}\sin\theta}{\frac{1}{3}ML^2} = -\frac{3g}{2L}\theta \rightarrow \frac{2\pi}{T} = \sqrt{\frac{3g}{2L}} \rightarrow T = 2\pi\sqrt{\frac{2L}{3g}}$$

Basit Harmonik Hareket ve Düzgün Dairesel Hareket :



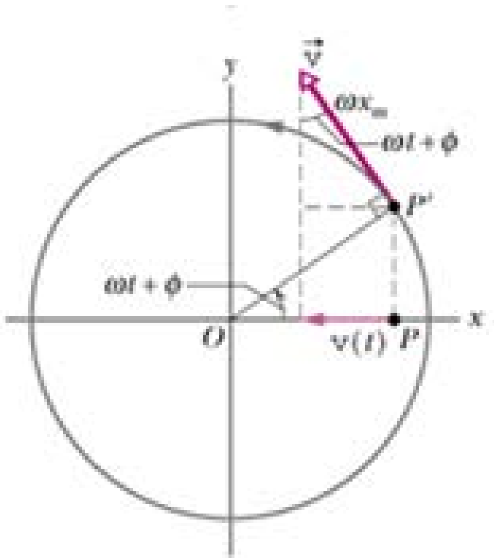
Bir cismin, yarıçapı x_m olan çembersel bir yörünge üzerinde sabit bir v hızıyla hareket ettiğini düşünelim.

P' noktasında bulunan cismin x-ekseni üzerindeki izdüşümü P noktasıdır. Bu noktanın koordinatı da

$$x(t) = x_m \cos\left(\omega t + \phi\right)$$

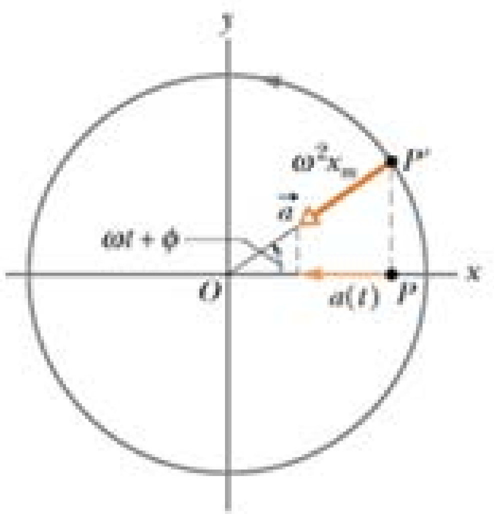
olacaktır.

P' noktası çembersel yörünge üzerinde düzgün dairesel hareket yaparken, izdüşümü olan P ise x-ekseni üzerinde basit harmonik hareket yapacaktır.



P' noktasının v hızı, ωx_m çarpımına eşit ve çembere her noktada teğettir. P' noktasının x-ekseni üzerindeki izdüşümü olan P noktasının hızı:

$v(t) = -\omega x_m \sin(\omega t + \phi)$ ifadesine sahiptir.



İvme $\vec{a}$ ise, her noktada çemberin merkezi olan O noktasına doğrudur ve x-ekseni üzerindeki izdüşümü

$a(t) = -\omega^2 x_m \cos(\omega t + \phi)$ ifadesine sahiptir.

Sonuç : İster yer-değiştirmeye, ister hıza, isterse de ivmeye bakalım, düzgün dairesel hareket yapan bir cismin x-ekseni üzerindeki izdüşümü basit harmonik hareket yapar.

Örnek : Bir cisim 3 m yarıçaplı bir çember etrafında 8 rad / s sabit açısal hızla dönmektedir. t = 0 anında cismin x koordinatı 2 m noktasıdır ve sağa doğru hareket etmektedir. Cismin x koordinatını, çizgisel hızının ve ivmesinin $x-$bileşenlerini bulunuz.

$\omega = 8$ rad/s ve $x_m = 3$ m olarak verilmiştir. Buna göre,

$$x(t) = x_m \cos(\omega t + \phi) = 3\cos(8t + \phi)$$

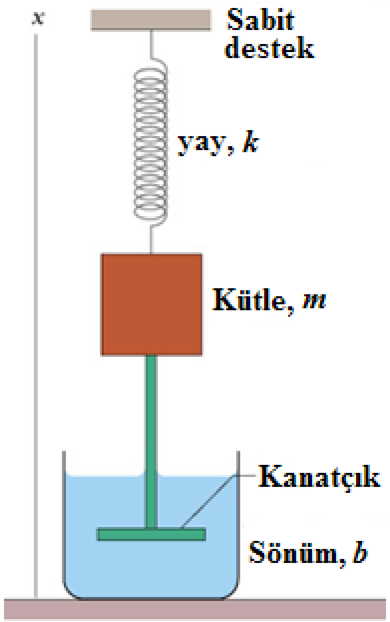
$t = 0$' da, $x = 2$ m olduğuna göre,

$$2 = 3\cos(\phi) \rightarrow \phi = \cos^{-1}\left(\frac{2}{3}\right) = 48.2^{\circ}$$

Cisim $t = 0$ anında sağa doğru hareket ettiği için, $\left(\left.\frac{dx}{dt}\right|_{t=0} > 0 \right)$

olmalıdır. Bu nedenle de, $\phi = -48.2^{\circ} = -0.841$ rad alınmalıdır.

$$x(t) = 3\cos(8t - 0.841) \rightarrow \begin{cases} v_x = -24\sin(8t - 0.841) \\ a_x = -192\cos(8t - 0.841) \end{cases}$$



Sönümlü Harmonic Hareket :

Harmonik hareket yapan bir cismin titreşim genliği, dış bir kuvvetin etkisiyle azalıyorsa, cisim "sönümlü harmonik hareket" yapıyor denir. Kütlesi m olan bir cisim, yay sabiti k olan bir yayın ucunda düşey doğrultuda salınım hareketi yapmaktadır. Cisme, sıvının içinde olacak şekilde bir de kanatçık monte edilmiştir. Sıvının uyguladığı sönüm kuvveti $\vec{F}_d = -b\vec{v}$ ile verilir.

Negatif işaret, $\vec{F}_d$ sönüm kuvvetinin salınım yapan cismin hızına her an ters yönde olduğunu göstermektedir. b parametresi, "sönüm sabiti" olarak bilinir.

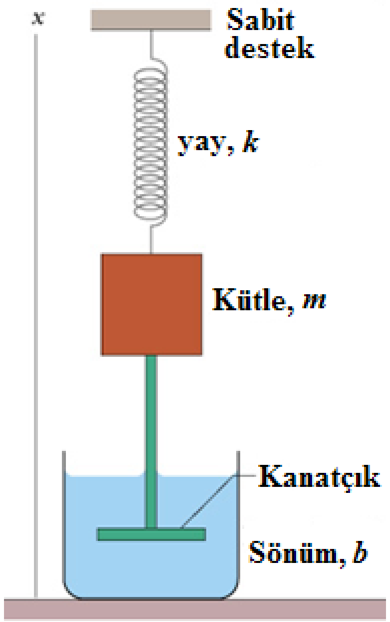
Böylece, m kütleli cisim üzerine etkiyen net kuvvet $F_{net} = ma = -kx - bv$ ile verilir.

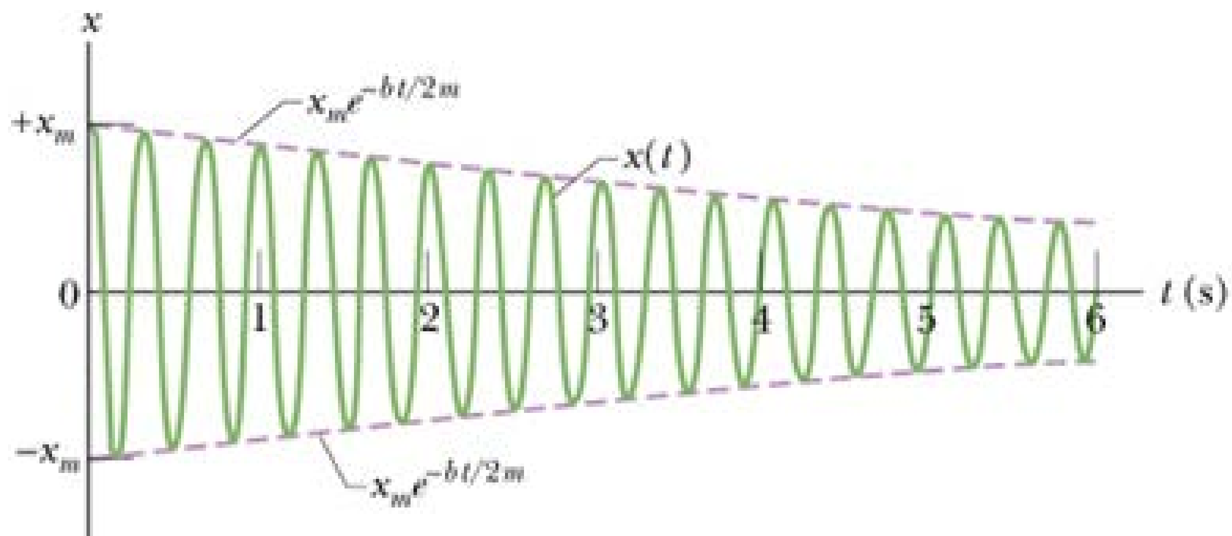
$$v = \frac{dx}{dt} \text{ ve } a = \frac{d^2x}{dt^2} \quad \rightarrow \quad m\frac{d^2x}{dt^2} + b\frac{dx}{dt} + kx = 0$$

differansiyel denklemi elde edilir.

Böyle bir denklemin çözümü de: $x(t) = x_m e^{-bt/2m} \cos\left(\omega' t + \phi\right)$ olur.

(12-26)





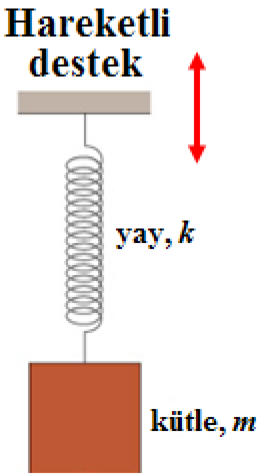
Yukarıdaki resimde, $x(t)$' nin zamanla (t) nasıl değiştiği verilmiştir. Önceki sayfada verilen çözümü, genliği zamanla $x_m e^{-bt/2m}$ bağıntısına göre değişen bir cosinüs fonksiyonu gibi düşünebiliriz.

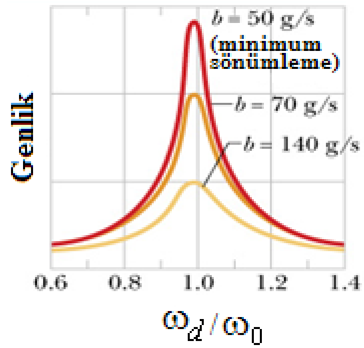
Sönümlü harmonik hareketin açısal frekansı $\omega' = \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{b^2}{4m^2}}$ ile verilir.

Sönümlü harmonik harekette mekanik enerji sabit değildir,

$E(t) \simeq \frac{1}{2} k x_m^2 e^{-bt/m}$ bağıntısı uyarınca zamanla azalır. (12-27)

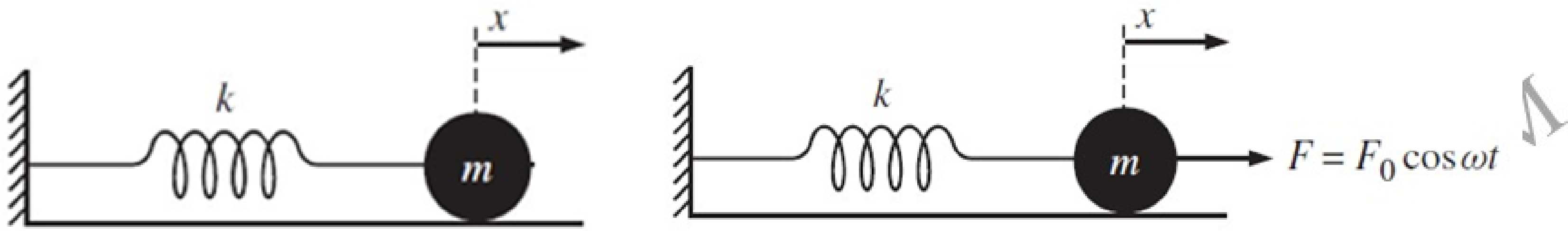
Zorla Salınımlar ve Rezonans :





Dışarıdan rahatsız edilerek basit harmonik hareket yapması sağlanan bir sistemin açısal frekansı ω_0 onun "doğal frekansı" dır. Aynı rahatsızlık, bağlı olduğu desteğin ω açısal frekansıyla titreştirilmesiyle de sağlanabilir.

Bu şekilde zorlanmış bir salınıcı, uygulanan kuvvetin ω sürücü frekansı ile titreşecektir. Cismin yer-değiştirmesi $x(t) = x_m \cos(\omega' t + \phi)$ ifadesi ile verilir. Salınımın genliği x_m, sürücü frekansı ile şekildeki gibi değişir ve $\omega = \omega_0$ durumunda en büyüktür. Bu durum "**rezonans**" durumudur. Tüm mekanik sistemler bir veya daha çok doğal frekansa sahiptir. Bir sistem, frekansı sistemin doğal frekanslarından birisine eşit ve çok şiddetli bir kuvvete maruz kalırsa, ortaya çıkacak titreşimler sistemin yapısını bozabilir.



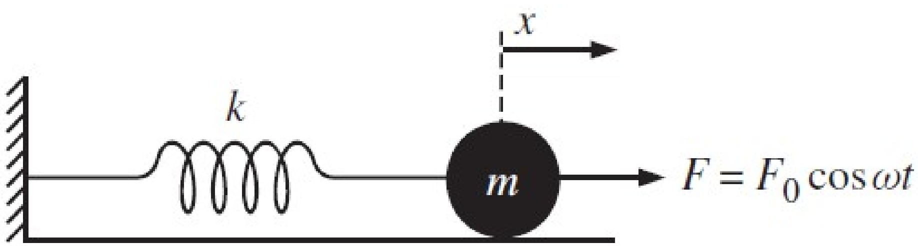
Doğal titreşim frekansı ω_0 olan bir harmonik salınıcıda, kütleye şekildeki gibi, büyüklüğü ω açısal frekansıyla periyodik olarak olarak değişen bir dış kuvvet uygulandığında, ortaya çıkan harekete "zorlamalı salınım" denir.

Salınıcı denge konumundan bir miktar çekilip bırakılırsa, $\omega_0 = \sqrt{k/m}$ frekansıyla titreşmeye başlayacaktır.

Ancak, dışarıdan uygulanan kuvvetin sürmesi halinde, kuvvet salınıcıya kendi frekansı ω' yı kabul ettirmeye çalışacak ve net hareket, ω_0 ve ω frekanslarındaki titreşim hareketlerinin üst üste binmeleri şeklinde olacaktır.

Belli bir süre sonra, net hareketin açısal frekansı dış kuvvetin açısal frekansına eşit olur. Bu şart yerine geldiğinde, dış kuvvetin etkisindeki salınıcı kararlı hal durumundadır denir.

Zorlamalı Kuvvet Etkisindeki Kütle-Yay Sistemi



Yay sabiti k olan bir yaya bağlı m kütlesini ele alalım. Kütlenin denge noktasından x kadar uzakta olduğu bir durum için hareket denklemi:

$$\sum F = ma = -kx + F_0 \cos(\omega t) \rightarrow m\frac{d^2x}{dt^2} + kx = F_0 \cos(\omega t)$$

olacaktır.

Sistemin sönümlü olması durumunda, hareket denkleminde ek olarak bir de sönüm terimi bulunur ve bu durumda hareket denklemi:

$$\sum F = ma = -kx - bv + F_0 \cos(\omega t) \rightarrow m\frac{d^2x}{dt^2} + b\frac{dx}{dt} + kx = F_0 \cos(\omega t)$$

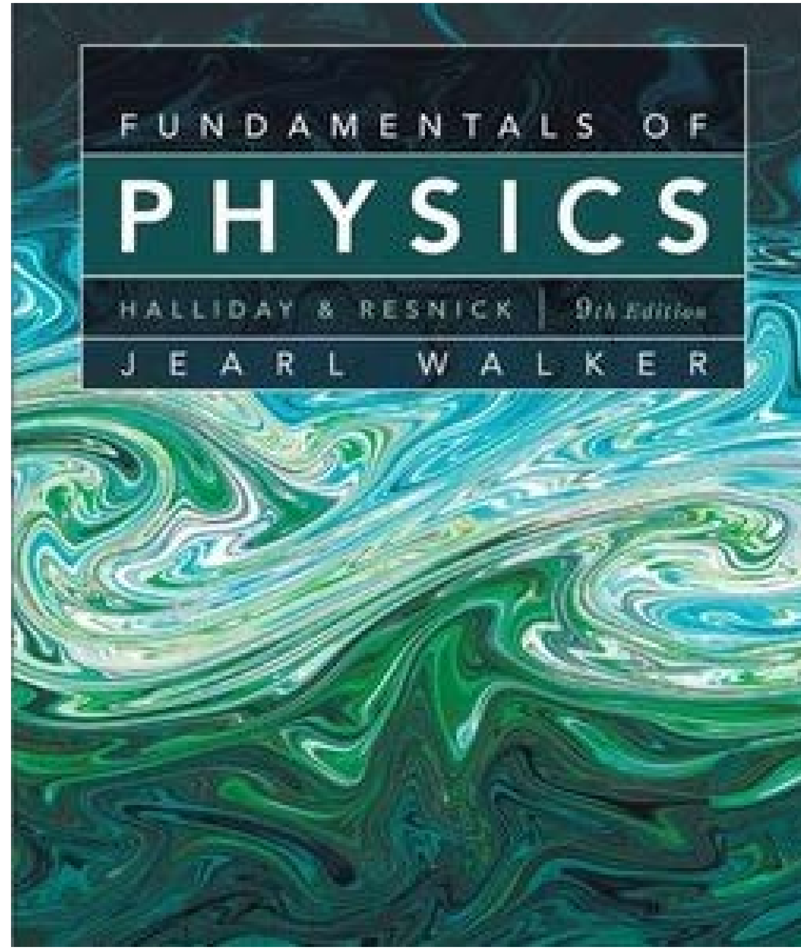
ile verilir.

DERS NOTLARININ

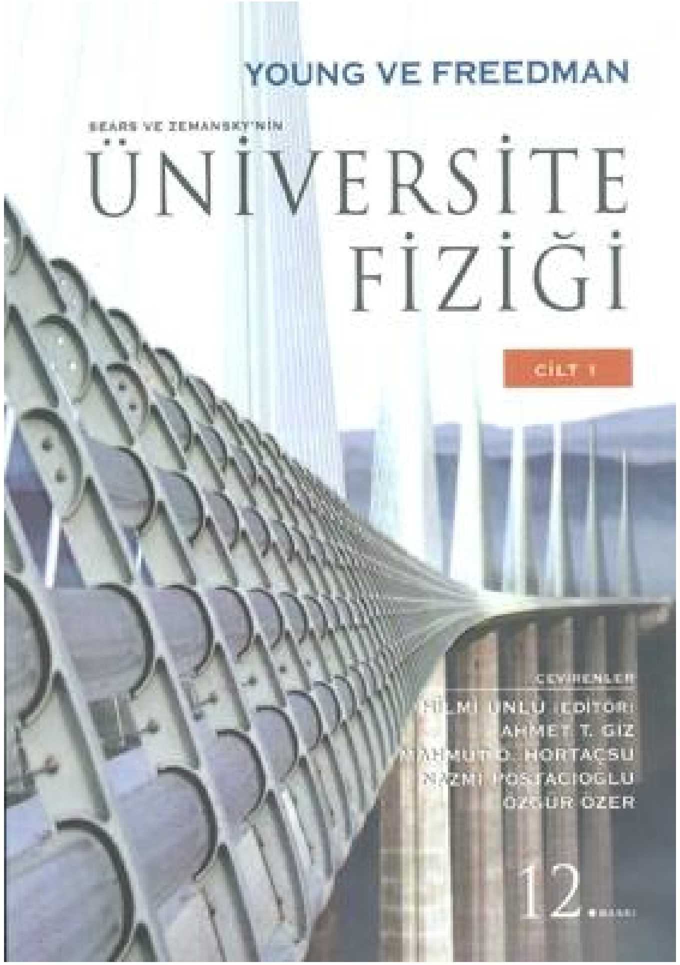
HAZIRLANMASINDA

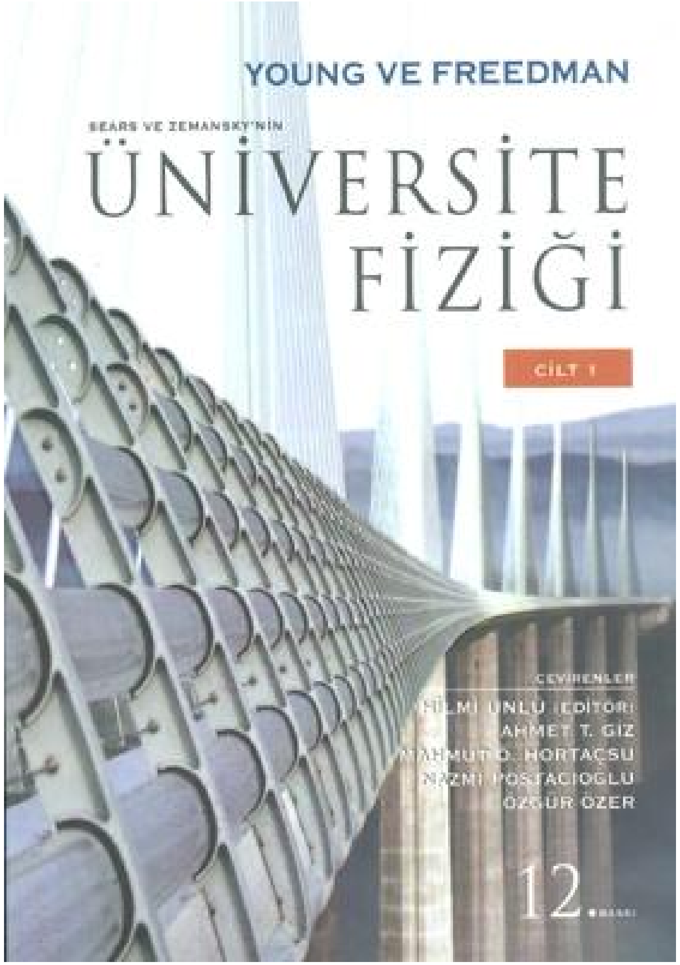
YARARLANILAN KAYNAK KİTAPLAR

Fiziğin Temelleri (Ders Kitabı)
(David HALLIDAY, Robert RESNICK, Jearl WALKER)



Üniversite Fiziği (Yardımcı Kitap)
(Hugh D. YOUNG ve Roger A. FREEDMAN)





Fen ve Mühendislik İçin FİZİK (Yardımcı Kitap)
(Raymond A. SERWAY ve John W. JEWETT)