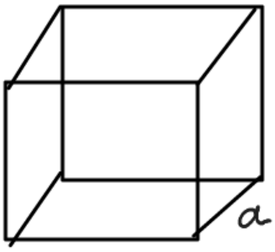
1. Bir küpün yüzey alanı 72 cm^2/sn. hızla artmaktadır. Kenar uzunluğu 3 cm. iken küpün hacminin artış hızını bulunuz.

Çözüm.



Yüzey alanı $= A = 6a^2$

Hacim $= V = a^3$

Yüzey alanı $\longrightarrow$ ayrıt $\longrightarrow$ Hacim

$A \longrightarrow a \longrightarrow V$

Verilen $= \dfrac{dA}{dt} = 72 \ cm^2/sn$

istenen : $\left.\dfrac{dV}{dt}\right|_{a=3} = ?$

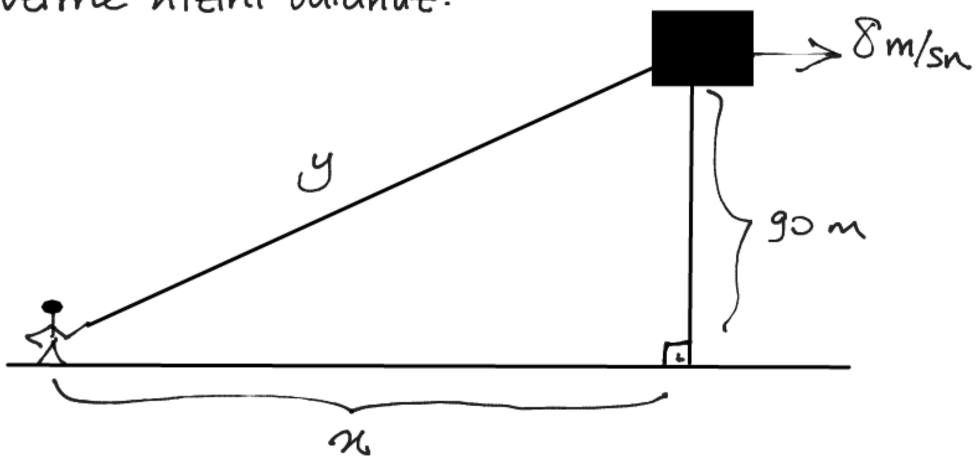
$$A = 6a^2 \Rightarrow \frac{dA}{dt} = 12a\frac{da}{dt} \Rightarrow 72 = 36 \cdot \left.\frac{da}{dt}\right|_{a=3}$$

$\left.\dfrac{da}{dt}\right|_{a=3} = 2 \ cm/sn$

$\dfrac{dV}{dt} = 3a^2\dfrac{da}{dt}$

$$\boxed{\left.\frac{dV}{dt}\right|_{a=3} = 27 \cdot 2 = 54 \ cm^3/sn.}$$

2. Bir kız uçurtmasını 90 m yükseklikte uçururken, rüzgar yatay olarak uçurtmayı 8 m/sn. hızla kendisinden uzaklaştır_maktadır. Uçurtma kendisinden 150 m uzaklıkta iken kızın ipi salıverme hızını bulunuz.



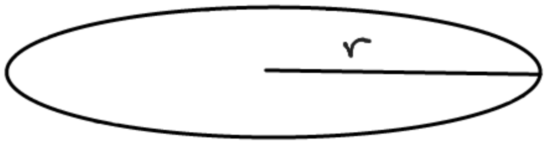
$$\frac{dx}{dt} = 8 \text{ m/sn}$$

$$x^2 + 90^2 = y^2 \Rightarrow \cancel{2}x\frac{dx}{dt} = \cancel{2}y\frac{dy}{dt}$$

$$120 \cdot 8 = 150 \cdot \frac{dy}{dt}$$

$$\left.\frac{dy}{dt}\right|_{y=150} = \frac{32}{5} \text{ m/sn.}$$

3. Dairesel olan bir plaka bir fırın içinde ısıtıldığında yarıçapı 0.001 cm/sn. hızla artmaktadır. Yarıçapı 50 cm olduğunda plakanın alanının artma hızını bulunuz.



$$A = \pi r^2$$

$$\underbrace{\frac{dA}{dt}}_{?} = 2\pi \underbrace{r}_{50} \underbrace{\frac{dr}{dt}}_{0.001}$$

5. $g(x)=\sqrt{4-x^2}$, $-2 \le x \le 1$

6. $f(x)=x^{4/3}$, $-1 \le x \le 8$

7. $h(x)=\sec x$, $\frac{-\pi}{3} \le x \le \frac{\pi}{6}$

8. $t(x)=x^3-6x^2+9x+2$, $-1 \le x \le 4$

9. $k(x)=\dfrac{x^2-4}{x^2+4}$, $-4 \le x \le 4$

Çözüm.

9. $$k'(x)=\frac{2x(x^2+4)-(x^2-4)2x}{(x^2+4)^2}=\frac{16x}{(x^2+4)^2}$$

$x=0$ tek kritik nokta.

$$\underbrace{k(0)=-1}_{\text{mutlak min.}} \qquad \underbrace{k(-4)=k(4)=\frac{3}{5}}_{\text{mutlak maks.}}$$

Birinci ve ikinci türev testlerini kullanarak aşağıdaki fonksiyonların yerel ekstremum değerlerini bulunuz. Hangi testi tercih ettiğinizi ve nedenini belirtiniz.

10. $f(x)=x^5-5x+3$

11. $f(x)=x+\sqrt{1-x}$

12. $f(x)=\dfrac{x}{x^2+4}$

Çözüm 10. $f'(x)=5x^4-5=5(x^4-1)=5(x-1)(x+1)(x^2+1)$

$f''(x)=20x^3$ $\quad f''(-1)<0$ old. $x=-1$ de yerel maks. var.

Aşağıdaki fonksiyonlar için

(a) tanım kümesini,

(b) asimptotlarını,

(c) artan-azalan olduğu aralıkları,

(d) yerel ekstremum değerlerini,

(e) konkavlığını ve dönüm noktalarını

araştırarak fonksiyonun grafiğini çiziniz.

13. $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x$

14. $f(x) = 2 + 2x^2 - x^4$ $\longrightarrow$ $f'(x) = -4x^3 + 4x$

15. $f(x) = x\sqrt{x+3}$

16. $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2-1}$

17. $f(x) = \sqrt{x^2+1} - x$ $\longrightarrow$ asimptot araştırılırken dikkat edilmeli $x \to \infty$ iken $\infty - \infty$ belirsizliği var.

18. $f(x) = \dfrac{x^2}{(x-2)^2}$

Çözüm. 16. (a) Tanım kümesi $= \mathbb{R} - \{-1, 1\}$

(b) asimptotlar:

	-1		1	
x^2-1	$+$		$-$	$+$

$$\lim_{x \to 1^{\mp}} f(x) = \mp\infty \qquad \lim_{x \to -1^{\mp}} f'(x) = \pm\infty$$

$x = \pm 1$ düşey asimptotlar

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = 1 \qquad y = 1 \text{ yatay asimp.}$$

(c) $$f'(x) = \frac{2x(x^2-1) - x^2 \cdot 2x}{(x^2-1)^2} = \frac{-2x}{(x^2-1)^2}$$

$0 \longrightarrow$ yerel maks.

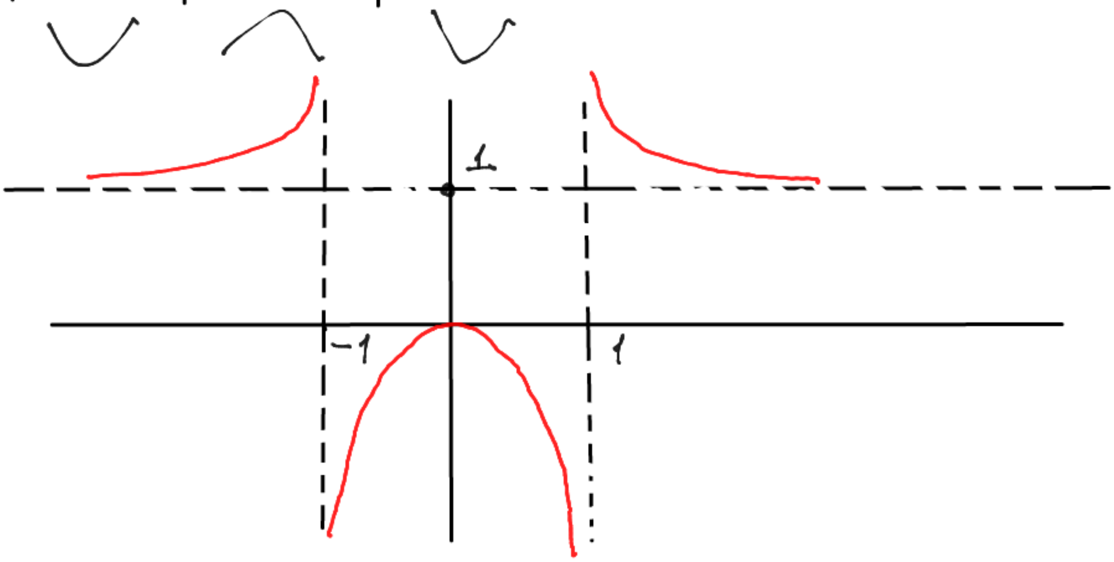
		0	
$f'(x)$	$+$ $\nearrow$		$-$ $\searrow$

(d) $$f''(x) = -\frac{2\boxed{(x^2-1)^2} - 2x \cdot 2\boxed{(x^2-1)}2x}{\boxed{(x^2-1)^4}}$$

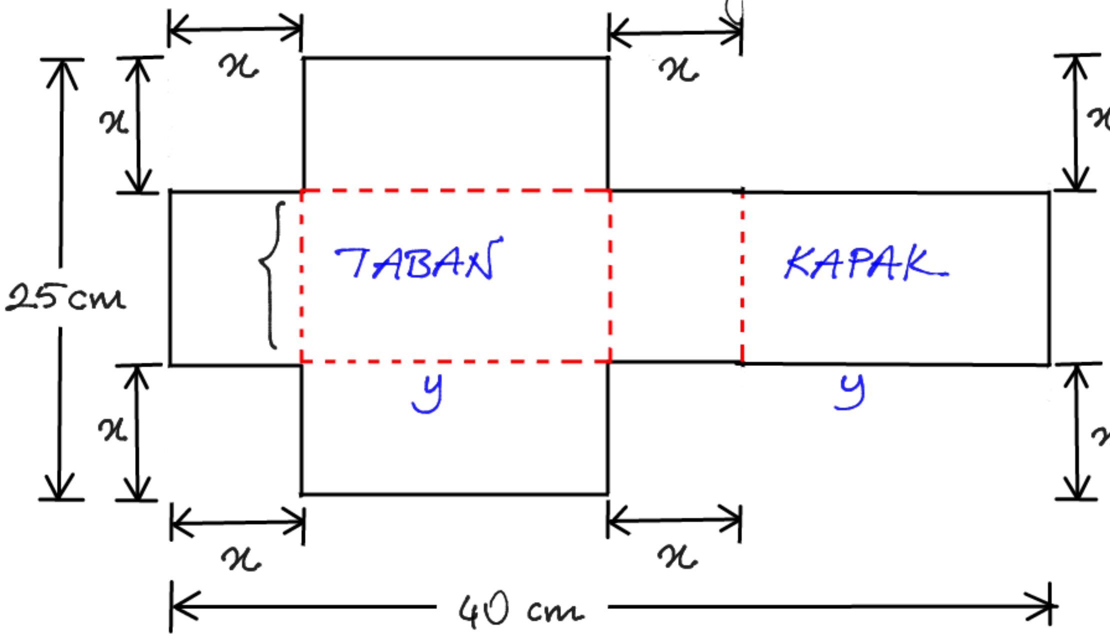
$$= -\frac{2(x^2-1) - 8x^2}{(x^2-1)^3} = \frac{6x^2+2}{(x^2-1)^3}$$

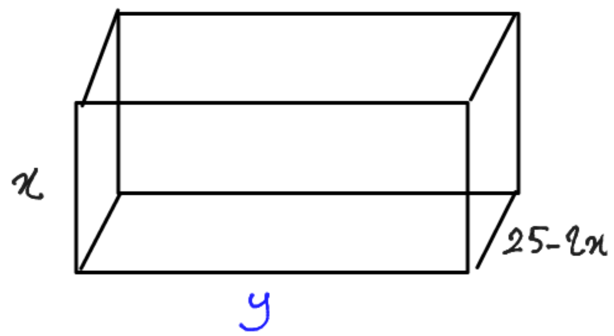
		-1		1	
$f''(x)$	$+$		$-$		$+$

dönüm noktası yoktur!



19. Bir karton parçasının ölçüleri 25x40 cm'dir. Şekilde görüldüğü gibi 25 cm'lik kenarın köşelerinden iki eşit kare kesilmiştir. İki eşit diktörtgen de diğer köşelerden kesilmiştir, böylece kenarlar katlandığında kapaklı bir dikdörtgen kutu oluşturulabilmektedir. Kutunun hacminin maksimum olması için boyutları nasıl olmalıdır?



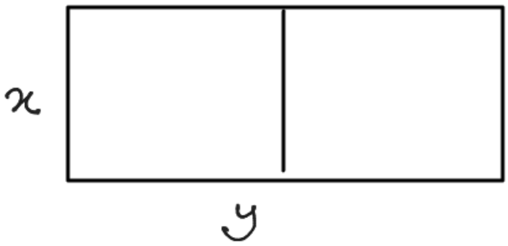


$$x+y=20$$

$$V = xy(25-2x)$$
$$= x(20-x)(25-2x)$$
$$= (20x-x^2)(25-2x)$$

$$V' = (20-2x)(25-2x)+(20x-x^2)(-2)$$

20. Alanı 216 m² olan bir dikdörtgen biçimindeki tarla çitle çevrilecektir, daha sonra kenarlarından birine paralel olacak şekilde başka bir çitle tarla eşit olarak ikiye bölünecektir. Kullanılacak en kısa çit için dış dikdörtgenin boyutları ne olmalıdır? Ne kadar çite ihtiyacımız vardır?



$$xy = 216$$

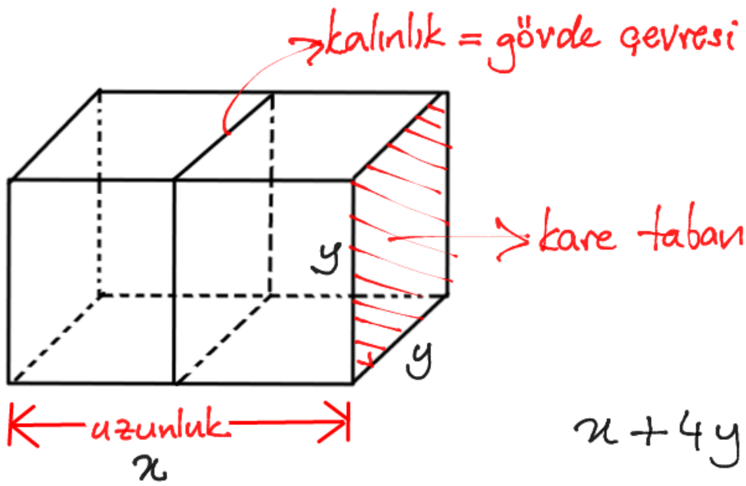
$$Ç = 3x + 2y = 3x + \frac{432}{x}$$

$$Ç' = 3 - \frac{432}{x^2} = \frac{3(x^2 - 144)}{x^2}$$

		12 → min.	
Ç'		−	+
		↘	↗

$\Rightarrow x = 12 \quad y = 18$

22. Bir posta servisi yerli kargo işlemlerinde uzunluğu ve kalınlığı (kutunun gövde çevresi) toplamı 274 cm'yi aşmayan kare tabanlı kutuları kabul etmektedir. Kutunun hacminin maksimum olabilmesi için kare tabanının boyutları ne olmalıdır?



$$x + 4y = 274$$

$$V = xy^2 = (274 - 4y)y^2$$

$$= 274y^2 - 4y^3$$

$$V' = 548y - 12y^2 = y(548 - 12y)$$

		$548/12$	
V'	$+$		$-$
	$\nearrow$		$\searrow$

$$\Rightarrow \boxed{y = 548/12 .}$$

23. Tek bir sırt çantasını üretmenin maliyeti c'dir. Eğer bir sırt çantasını x TL'ye satarsanız, satılan sayı (adet) aşağıdaki denklemle verilmektedir.

$$n = \frac{a}{x-c} + b(100-x).$$

Burada a ve b pozitif sabitlerdir. Maksimum karı verecek satış fiyatı nedir?

$$\frac{dn}{dx} = \frac{-a}{(x-c)^2} - b = 0 \iff (x-c)^2 = \frac{-a}{b}$$

$$-a(x-c)^{-2}$$

$$\iff x-c = \pm\sqrt{\frac{-a}{b}}$$

$$\iff x = c \pm \sqrt{\frac{-a}{b}}$$

$$\frac{d^2n}{dx^2} = \frac{2a}{(x-c)^3} \qquad x_1 = c + \sqrt{\frac{-a}{b}} \quad x_2 = c - \sqrt{\frac{-a}{b}}$$

24. Eğer $r(x) = 6x$ ve $c(x) = x^3 - 6x^2 + 15x$ sizin gelir ve maliyet fonksiyonunuz ise, yapabileceğiniz en iyi şeyin başabaş durumu (gelir maliyete eşit) olduğunu gösteriniz.

$$p(x) = r(x) - c(x) \Rightarrow p'(x) = r'(x) - c'(x) = 0$$

$$\Rightarrow 6 - (3x^2 - 12x + 15) = 0$$

$$p''(x) = -(6x-12)$$

$$\Rightarrow 3x^2 - 12x + 9 = 0$$

$$p''(1) > 0 \quad \underbrace{p''(3) < 0}_{\text{maks.}}$$

$$\Rightarrow 3(x^2 - 4x + 3) = 0 \quad x = 1, 3$$

$r(3) = c(3) \rightarrow$ başabaş.