ÇALIŞMA SORULARI

Polinom Halkaları

1. (a) R bir tamlık bölgesi ve p, q R'nin bağdaşık olmayan iki asal elemanı olsun. Buna göre $< pq >=< p >< q >$ olduğunu gösteriniz.
   (b) $\mathbb{Z}_5[x]$ içinde $< x^4 + \bar{4} >$ idealini maksimal ideallerin ara kesiti şeklinde yazınız.

2. (a) d ve n iki tamsayı olsun. Gösteriniz ki $d \mid n$ ancak ve ancak $x^d - 1 \mid x^n - 1$.
   (b) n asal olmayan bir tamsayı ise

$$f(x) = x^{n-1} + x^{n-2} + \cdots + x + 1$$

   polinomunun $\mathbb{Q}[x]$ içinde inmez olmadığını gösteriniz.

3. Her $a \in \mathbb{Z}_5$ için $x^5 + a \in \mathbb{Z}_5[x]$ polinomunun inmez olmadığını gösteriniz. (*Yol: Fermat Teoremi'ni kullanabilirsiniz. Fermat Teoremi'ne göre p bir asal sayı ve $a \in \mathbb{Z}$ olmak üzere $p \nmid d$ ise $a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$ dir.*)

4. Aşağıda verilen idealleri belirleyiniz (üreteçlerini bulunuz).
   (a) $\mathbb{Q}[x]$ içinde $< x^3 - 2 > + < x + 1 >$.
   (b) $\mathbb{Z}_5[x]$ içinde $< x^4 + 3x^3 + 2x + 4 > + < x^2 - 1 >$.
   (c) $\mathbb{Z}_2[x]$ içinde $< x^4 + x^3 + x + 1 > + < x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 >$.

Çarpanlara Ayırma, Öklid Bölgeleri

5. R ve S iki tamlık bölgesi, $\varphi : R \to S$ bir halka epimorfizması ve $c \in R$ bir inmez eleman olsun. Eğer $\varphi(c) \neq 0_S$ ise $\varphi(c)$ S'nin inmez elemanı mıdır? Açıklayınız.

6. R bir Öklid bölgesi ve R'in Öklid fonksiyonu δ olsun. Aşağıdakileri gösteriniz
   (a) Her $0_R \neq a \in R$ için $\delta(1_R) \leq \delta(a)$ dır.
   (b) $u \in R$ birimseldir $\Leftrightarrow \delta(u) = \delta(1_R)$ dir.
   (c) $a, b \in R \setminus \{0_R\}$ olsun. Eğer a ile b bağdaşık ise $\delta(a) = \delta(b)$ dir. Karşıt olarak $a \mid b$ ve $\delta(a) = \delta(b)$ ise a ile b bağdaşıktır.

7. $u = 7 + 2i, v = 3 - 4i \in \mathbb{Z}[i]$ olsun. $u = qv + r$ ve $N(r) < N(v)$ olacak şekilde $q, r \in \mathbb{Z}[i]$ olduğunu gösteriniz.

8. $\mathbb{Z}[i]/\langle 2 + i \rangle$ nin 5 elemanlı bir cisim olduğunu gösteriniz.

9. $7 + 4i$ yi $\mathbb{Z}[i]$ içinde asal çarpanlarına ayırınız.

10. $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ içinde 9 sayısını iki farklı biçimde inmezlerin çarpımı olarak yazınız.

Cisim Genişlemeleri

11. Her elemanın yanındaki cisim üzerinde cebirsel ya da transandant olduğunu söyleyerek cebirsel olanların minimal polinomlarını belirleyiniz.
   (a) $3 + 5i$, $\mathbb{Q}$;
   (b) π, $\mathbb{Q}$;
   (c) π, $\mathbb{R}$;
   (d) $\sqrt{\pi}$, $\mathbb{Q}(\pi)$;
   (e) $\sqrt{3 - \sqrt{6}}$, $\mathbb{Q}$;
   (f) $\sqrt{i - \sqrt{2}}$, $\mathbb{Q}$;

12. $p(x) = x^3 + x + \bar{1}$ polinomunun $\mathbb{Z}_2$ üzerinde inmez olduğunu gösteriniz. $E = \mathbb{Z}_2[x]/\langle p(x)\rangle$ ve $u = x + \langle p(x)\rangle$ olsun. $E = \mathbb{Z}_2[u]$ olduğunu gösteriniz. E nin bir $\mathbb{Z}_2$ bazını belirleyiniz. $b = \frac{\bar{1}+u}{\bar{1}+u+u^2}$ olsun. $\mathrm{Min}_{\mathbb{Z}_2}(b)$ yi belirleyiniz ve b^{-1} i baz elemanlarının lineer kombinasyonu şeklinde yazınız.

13. $p(x) = x^3 - 2x + 2$ nin $\mathbb{Q}$ üzerinde inmez olduğunu gösteriniz. $p(x)$ in bir reel kökü u olsun. $\mathbb{Q}(u)$ nun bir bazını bulunuz. $b = 2u^2 - u + 1$ elemanının tersini ve $\mathrm{Min}_{\mathbb{Q}}(b)$ yi belirleyiniz.

14. $\mathbb{Q}(e^2) \cong \mathbb{Q}(1+\pi)$ olduğunu gösteriniz.

15. $\mathbb{Q}(\sqrt{2}) \ncong \mathbb{Q}(\sqrt{3})$ olduğunu gösteriniz.

16. F bir cisim, E, F nin bir cisim genişlemesi ve $u, v \in E$ olsun. Eğer $u+v$, F üzerinde cebirsel ise v nin $F(u)$ üzerinde cebirsel olduğunu gösteriniz.

17. Her cisim genişlemesinin yanında belirtilen altcisim üzerindeki bir bazını ve derecesini belirleyiniz.

    (a) $\mathbb{Q}(\sqrt{3}, \sqrt{10})$, $\mathbb{Q}$;
    (b) $\mathbb{Q}(\sqrt{3}, \sqrt[3]{2})$, $\mathbb{Q}$;
    (c) $\mathbb{Q}(\sqrt{3}, \sqrt{5}, \sqrt{7})$, $\mathbb{Q}(\sqrt{10})$;
    (d) $\mathbb{Q}(\sqrt{i})$, $\mathbb{Q}$
    (e) $\mathbb{Q}(\sqrt{3+4i})$, $\mathbb{Q}$

18. $\left[\mathbb{Q}(\sqrt{3}, i) : \mathbb{Q}\right] = 4$ olduğunu gösteriniz.

19. $x^2 - 3$ polinomunun $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$ üzerinde inmez olduğunu gösteriniz.

20. $F \leq E$ bir sonlu cisim genişlemesi ve u, E üzerinde cebirsel bir eleman olsun. $[E(u) : F(u)] \leq [E : F]$ olduğunu gösteriniz. (*Yol: E nin bir F–bazının $E(u)$ yu $F(u)$ uzayı olarak gerdiğini göstermek yeter.*)

21. $u = \sqrt{2} + \sqrt[4]{2}$ olsun. $\mathrm{Min}_{\mathbb{Q}}(u)$ yu belirleyiniz ve $\mathbb{Q}(\sqrt{2} + \sqrt[4]{2}) = \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt[4]{2})$ olduğunu gösteriniz.

22. F bir cisim E, F nin bir sonlu cisim genişlemesi ve $u \in E$ olsun. Eğer $[F(u) : F]$ tek tamsayı ise $F(u) = F(u^2)$ olduğunu gösteriniz.

23. Cebirsel kapalı bir cismin her cebirsel genişlemesinin kendisine eşit olduğunu gösteriniz.

24. F bir cisim ve E, F nin bir cisim genişlemesi olsun. $u \in E$, $[E : F] = 2$ ve $\mathrm{Kar}(F) \neq 2$ olsun. Aşağıdakileri gösteriniz.

    (a) $u \in E \backslash F$ ise $F(u) = E$ dir.
    (b) $F(u) = E$ ve $u^2 \in F$ olacak şekilde $u \in E$ vardır.

25. F bir cisim, E, F nin bir sonlu cisim genişlemesi ve $u, v \in E$ nin F üzerindeki minimal polinomları sırasıyla $p(x)$ ve $q(x)$ olsun.

    (a) Eğer $\mathrm{der}(p(x)) = m$, $\mathrm{der}(q(x)) = n$ ve $(m, n) = 1$ ise $[F(u, v) : F] = mn$ olduğunu gösteriniz.
    (b) $\left[\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt[3]{2}) : \mathbb{Q}\right]$ derecesini hesaplayınız.

İzomorfizma Genişlemeleri ve Otomorfizma Grupları

26. $E = \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5})$ olsun. Buna göre $G(E/\mathbb{Q})$ grubunu (yani E nin $\mathbb{Q}$ yu sabit bırakan otomorfizmalarının grubunu) belirleyiniz ve abelyan olduğunu gösteriniz.

27. $\mathbb{Q}(\sqrt[4]{2})$ ve $\mathbb{Q}(\sqrt[4]{2}i)$ cisimlerinin izomorf olduğunu gösteriniz.

28. $\mathbb{Q}(\sqrt[6]{5})$ ve $\mathbb{Q}(\sqrt[6]{5}(1 + i\sqrt{3}))$ cisimlerinin izomorf olduğunu gösteriniz.

29. $\mathbb{Q}$ dan $\mathbb{R}$ ye tanımlı her monomorfizmanın $\mathbb{Q}$ nun birim otomorfizmasına eşit olduğunu gösteriniz.

30. $E = \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}, i\sqrt{3})$ olsun. $G(E/\mathbb{Q})$ ve $G(E/\mathbb{Q}(i\sqrt{3}))$ gruplarını belirleyiniz ve $G(E/\mathbb{Q}(i\sqrt{3}))$ grubunun, $G(E/\mathbb{Q})$ grubunun bir normal altgrubu olduğunu gösteriniz.

31. Aşağıdakilerden hangisi ya da hangileri doğrudur?

    (a) F bir cisim, E, F nin bir cebirsel genişlemesi ve $u, v \in E$ olsun. $\mathrm{der}_F(u) = \mathrm{der}_F(v)$ ise, cisim olarak, $F(u) \cong F(v)$ dir.

    (b) F bir cisim, E, F nin bir cebirsel genişlemesi ve $u, v \in E$ olsun. $\mathrm{der}_F(u) = \mathrm{der}_F(v)$ ise, F–uzayı olarak, $F(u) \cong F(v)$ dir.

    (c) $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}) \cong \mathbb{Q}(\frac{\sqrt[3]{2}}{2}(-1 + i\sqrt{3}))$ dir.

    (d) $f(x) \in F[x]$ in iki kökü u ve v ise $F(u) \cong F[v]$ dir.

32. $f(x) \in \mathbb{C}[x]$ olsun. $f(x)$ in katsayıları yerine eşleniklerinin yazılmasıyla elde edilen polinom $\overline{f(x)}$ olsun. $f(x)\overline{f(x)} \in \mathbb{R}[x]$ olduğunu gösteriniz.

Parçalanış Cisimleri

33. Aşağıdaki her polinomun $\mathbb{Q}$ üzerindeki parçalanış cismi K olsun. K yı ve $G(K/\mathbb{Q})$ grubunu belirleyiniz.

    (a) $(x^2 - 5)(x^2 - 7)$;

    (b) $x^3 - 1$;

    (c) $x^4 - 1$;

    (d) $x^4 - 4x^2 - 5$.

34. (a) F bir cisim ve $\mathrm{Kar}(F) = p$ olsun. O zaman gösteriniz ki $\sigma_p : F \to F$, $a \mapsto a^p$ biçiminde tanımlanan σ_p fonksiyonu F den F ye bir monomorfizmadır.

    (b) Yukarıda tanımlanan σ_p nin sabit cisminin $\mathbb{Z}_p$ ye izomorf olduğunu gösteriniz. (*Yol: Fermat Teoremini kullanarak* $\{0 \cdot 1_F, 1 \cdot 1_F, \ldots, (p-1) \cdot 1_F\}$ *kümesinin* σ_p *tarafından sabit bırakıldığını gösteriniz.*)

    (c) Gösteriniz ki eğer F sonlu ise σ_p, F nin bir otomorfizmasıdır. Bu otomorfizmaya ***Frobenius otomorfizması*** denir.

    $p(x) = x^3 + x^2 + \overline{2} \in \mathbb{Z}_3[x]$ polinomunun $\mathbb{Z}_3$ ün bir cisim genişlemesi içindeki bir kökü u olsun ve $K = \mathbb{Z}_3(u)$ olsun.

    (d) Frobenius otomorfizmasını kullanarak u nun K içindeki bütün eşleniklerini belirleyiniz.

    (e) K nın $p(x)$ in bir parçalanış cismi olduğunu gösteriniz ve $G(K/\mathbb{Z}_3)$ grubunu belirleyiniz.

35. $q(x) = x^3 + x^2 + \overline{1} \in \mathbb{Z}_2[x]$ polinomunun $\mathbb{Z}_2$ nin bir cisim genişlemesi içindeki bir kökü v ve $K = \mathbb{Z}_2(v)$ olsun. K yı ve $G(K/\mathbb{Z}_2)$ yi belirleyiniz.

36. $x^4 + 1$ polinomunun $\mathbb{Q}$ üzerindeki parçalanış cismi K olsun. K yı belirleyiniz ve $G(K/\mathbb{Q})$ grubunun Klein 4–grubuna izomorf olduğunu gösteriniz.

37. $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})$ cisminin $x^4 + 2x^3 - 8x^2 - 6x - 1$ polinomunun $\mathbb{Q}$ içindeki parçalanış cismi olduğunu gösteriniz.

38. F bir cisim, K, F nin bir cisim genişlemesi olmak üzere $[K : F] = 2$ olsun. K nın F üzerinde bir parçalanış cismi olduğunu gösteriniz.

39. $K = \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}, \sqrt{3}, i)$ nin $\mathbb{Q}$ üzerinde bir parçalanış cismi olduğunu gösteriniz.

40. Aşağıdaki her cisim genişlemesinin yanındaki cisim üzerinde parçalanış cismi olup olmadığını belirleyiniz.

(a) $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})$, $\mathbb{Q}$;

(b) $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2} + i\sqrt{3})$, $\mathbb{Q}$;

(c) $\mathbb{Z}_3(t)(u)$, $\mathbb{Z}_3$. (Burada t, $\mathbb{Z}$ üzerinde transandant ve $u = t^3$ tür.)

Sonlu Cisimler

41. $x^2 + \overline{1}$ polinomunun $\mathbb{Z}_3$ üzerindeki bir parçalanış cismi K olsun. $K^* = K \setminus \{0\}$ grubunun mertebesi 4 ve 8 olan elemanlarını bulunuz.

42. $x^3 + x^2 + \overline{1} \in \mathbb{Z}_2[x]$ polinomunun bir kökü u olsun. Buna göre $K = \mathbb{Z}_3(u)$ cisminin sıfırdan farklı her elemanının u nun bir kuvvetine eşit olduğunu gösteriniz. (Yani $K^* = \langle u \rangle$ olduğunu gösteriniz.)

43. (a) $p(x) = x^4 + x + \overline{1}$ polinomunun $\mathbb{Z}_2$ üzerinde inmez olduğunu gösteriniz ve 16 elemanlı bir cisim inşa ediniz. Bu elde edilen cismi $\mathrm{GF}(2^4)$ ile gösterelim.

    (b) $\mathrm{GF}(2^4)$ ün çarpımsal grubunda mertebeleri 3, 5 ve 15 olan birer eleman vardır, gösteriniz.

    (c) $G(\mathrm{GF}(2^4)/\mathbb{Z}_2)$ grubu, mertebesi 4 olan bir devirli gruptur, gösteriniz.

44. p bir asal sayı ve d, n birer pozitif tamsayı olsun. Gösteriniz ki $d \mid n$ ancak ve ancak $\mathrm{GF}(p^d) \subseteq \mathrm{GF}(p^n)$. (*Yol: 2 nolu problem ile birlikte karakteristiği p olan her sonlu cismin $\mathbb{Z}_p$ üzerinde bir parçalanış cismi olduğu bilgisini kullanınız.*)

45. p bir asal sayı ve $f(x) = x^4 + \overline{1} \in \mathbb{Z}_p$ olsun. $f(x)$ in $\mathbb{Z}_p[x]$ içinde inmez olmadığını gösteriniz. (*Yol: $p = 2$ için açıktır. $p \neq 2$ olsun. $f(x) \mid (x^{p^2} - x)$ olduğunu gösteriniz. Bunun için de her $p \neq 2$ asal sayısı için $8 \mid p^2 - 1$ olduğunu kullanabilirsiniz.*)