İZOMORFİZMA GENİŞLEMELERİ VE OTOMORFİZMA GRUPLARI

Tanım. F bir cisim E, F nin bir cebirsel genişlemesi ve $u, v \in E$ olsun. Eğer $\mathrm{Min}_F(u) = \mathrm{Min}_F(v)$ ise u ile v, F üzerinde eşlenik denir.

Örnek. $z \in \mathbb{C}$ olsun. z nin $\mathbb{R}$ üzerindeki eşlenikleri z ve $\bar{z}$ dir. $z \in \mathbb{R}$ ise z nin $\mathbb{R}$ üzerindeki minimal polinomu $x - z$ dir. Bu polinomun tek kökü vardır; o da $z = \bar{z}$ dir. $z \notin \mathbb{R}$ ise z nin $\mathbb{R}$ üzerindeki minimal polinomu

$$p(x) = (x - z)(x - \bar{z}) \in \mathbb{R}[x]$$

olur. Bu polinomun iki adet kökü vardır; bunlar z ve $\bar{z}$ dir. Dolayısıyla z nin $\mathbb{R}$ üzerindeki eşlenikleri z ve $\bar{z}$ dir.

Örnek. $\mathbb{Q}$ üzerinde $\sqrt{2}$ ve $\sqrt[3]{2}$ sayılarının eşleniklerini belirleyelim. $\mathrm{Min}_{\mathbb{Q}}(\sqrt{2}) = x^2 - 2$ ve $\mathrm{Min}_{\mathbb{Q}}(\sqrt[3]{2}) = x^3 - 2$ olduğunu biliyoruz. Dolayısıyla $\sqrt{2}$ nin eşlenikleri $\sqrt{2}$ ve $-\sqrt{2}$; $\sqrt[3]{2}$ nin eşlenikleri ise $w = \dfrac{-1 + i\sqrt{3}}{2}$ olmak üzere $\sqrt[3]{2}$, $w\sqrt[3]{2}$ ve $w^2\sqrt[3]{2}$ dir.

Tanım. $\varphi : R \longrightarrow S$ bir halka homomorfizması ve A, R nin bir althalkası olsun. Her $a \in A$ için $\varphi(a) = a$ ise φ, A yı sabit bırakır denir. $\sigma : A \longrightarrow S$ bir halka homomorfizması olsun. Eğer $\varphi|_A = \sigma$ ise σ ya φ nin A ya kısıtlanışı, φ ye σ nın R den S ye bir genişlemesi denir.

Lemma. $\sigma : F \to F'$ bir cisim izomorfizması olsun. O zaman

$$\sigma^* : (a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n) \longmapsto \sigma(a_0) + \sigma(a_1)x + \cdots + \sigma(a_n)x^n$$

eşlemesi $F[x]$ ten $F'[x]$ e bir halka izomorfizmasıdır. Ayrıca $p(x) \in F[x]$, F üzerinde inmez ise $\sigma^*(p(x))$, F' üzerinde inmezdir.

Kanıt. $f(x), g(x) \in F[x]$ ve $f(x) = \sum_{i=0}^{m} a_i x^i$, $g(x) = \sum_{j=0}^{n} b_j x^j$ olsun. Ayrıca $\sigma^*(f(x)) = f^*(x)$ ve $\sigma^*(g(x)) = g^*(x)$ yazalım. Genelliği bozmadan $m \le n$ alabiliriz. Eğer $m < n$ ise,

$$a_{m+1} = \cdots = a_n = 0$$

yazarsak

$$f(x) = \sum_{i=0}^{m} a_i x^i = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$$

biçiminde yazılabilir. Buradan $f(x) + g(x) = \sum_{i=0}^{n} (a_i + b_i) x^i$ olduğundan

$$\begin{aligned}
\sigma^*(f(x) + g(x)) &= \sum_{i=0}^{n} \sigma(a_i + b_i) x^i \\
&= \sum_{i=0}^{n} [\sigma(a_i) + \sigma(b_i)] x^i \\
&= \sum_{i=0}^{n} \sigma(a_i) x^i + \sum_{i=0}^{n} \sigma(b_i) x^i = f^*(x) + g^*(x)
\end{aligned}$$

elde edilir. Şimdi $f(x)g(x) = \sum_{k=0}^{m+n} c_k x^k$, $c_k = \sum_{i=0}^{k} a_i b_{k-i}$ olduğundan

$$\sigma^*(f(x)g(x)) = \sum_{k=0}^{m+n} \sigma(c_k) x^k \quad \text{ve}$$

$$\sigma(c_k) = \sigma\left(\sum_{i=0}^{k} a_i b_{k-i}\right) = \sum_{i=0}^{k} \sigma(a_i b_{k-i}) = \sum_{i=0}^{k} \sigma(a_i)\sigma(b_{k-i})$$

dur.

Öte yandan $f^*(x)g^*(x) = \left(\sum_{i=0}^{n} \sigma(a_i)x^i\right)\left(\sum_{j=0}^{n} \sigma(b_j)x^j\right) = \sum_{k=0}^{m+n} d_k x^k$,

$d_k = \sum_{i=0}^{k} \sigma(a_i)\sigma(b_{k-i})$ olduğundan her $k \geq 0$ için $\sigma(c_k) = d_k$ dır.

Dolayısıyla $\sigma(f(x)g(x)) = f^*(x)g^*(x)$. Böylece σ^* bir halka homomorfizmasıdır. Tanımdan dolayı σ^* örtendir. Ayrıca σ bire bir olduğundan σ^* da bire birdir. Şimdi $p(x) \in F[x]$, F üzerinde inmez olsun. Kabul edelim ki $s(x), t(x) \in F'[x]$ olmak üzere

$$\sigma^*(p(x)) = s(x)t(x)$$

olsun. σ^* örten olduğundan $s(x) = \sigma^*(a(x))$, $t(x) = \sigma^*(b(x))$ olacak biçimde $a(x), b(x) \in F[x]$ vardır. Bu değerler yerlerine konursa $\sigma^*(p(x)) = \sigma^*(a(x))\sigma^*(b(x)) = \sigma^*(a(x)b(x))$ ve buradan $p(x) = a(x)b(x)$ elde edilir. Fakat $p(x)$, F üzerinde inmez olduğundan $a(x) \in F$ ya da $b(x) \in F$ dir. Bu ise $s(x) \in F'$ ya da $t(x) \in F'$ demektir ve böylece $\sigma^*(p(x))$, F' üzerinde inmezdir.

$\blacksquare$

Teorem. $E = F(u)$ ve $E' = F'(v)$ basit cebirsel genişlemeler ve $\sigma : F \longrightarrow F'$ bir cisim izomorfizması olsun. Ayrıca $p(x) = \mathrm{Min}_F(u)$ ve $\sigma^*(p(x)) = \mathrm{Min}_{F'}(v)$ olsun. O zaman öyle bir $\tau : E \longrightarrow E'$ cisim izomorfizması vardır ki $\tau(u) = v$ ve $\tau|_E = \sigma$ dir.

Kanıt. $E = \{f(u) : f(x) \in F[x]\}$ ve $E' = \{h(v) : h(x) \in F'[x]\}$ olduğunu biliyoruz. Her $f(x) \in F[x]$ için $\sigma^*(f(x)) = f^*(x)$ olsun. $\tau : E \longrightarrow E'$ fonksiyonu $\tau : f(u) \longmapsto f^*(v)$ olarak tanımlansın. Açıkça görüldüğü gibi her $a \in F$ için $\tau(a) = \sigma(a)$ ve $\tau(u) = v$ dir.

(i) τ iyi tanımlı ve bire birdir: $f(u), g(u) \in F[u]$ olsun. u ve v ye karşılık gelen değer homomorfizmaları sırasıyla ϕ_u ve ϕ_v olsun. Buna göre

$$\begin{aligned}
f(u) = g(u) &\Leftrightarrow \phi_u(f(x)) = \phi_v(g(x)) \\
&\Leftrightarrow \phi_u(f(x) - g(x)) = 0 \\
&\Leftrightarrow f(x) - g(x) \in \text{Çek}(\phi_u) = \langle p(x) \rangle \\
&\Leftrightarrow p(x) \mid f(x) - g(x) \\
&\Leftrightarrow \sigma^*(p(x)) \mid \sigma^*(f(x) - g(x)) \\
&\Leftrightarrow p^*(x) \mid f^*(x) - g^*(x) \\
&\Leftrightarrow f^*(x) - g^*(x) \in \text{Çek}(\phi_v) \\
&\Leftrightarrow f^*(v) - g^*(v) = 0_{F'} \\
&\Leftrightarrow f^*(v) = g^*(v)
\end{aligned}$$

olduğundan τ iyi tanımlı ve bire birdir.

(ii) τ bir halka homomorfizmasıdır: $f(u) = \sum_{i=0}^{m} a_i u^i$ ve $g(u) = \sum_{j=0}^{n} b_j u^j$ olsun. $m \leq n$ olsun. $a_{m+1} = \dots = a_n = 0_F$ denirse $f(u) = \sum_{i=0}^{n} a_i u^i$ yazılabilir. O zaman $\tau(f(u)) = \sum_{i=0}^{n} \sigma(a_i) v^i$ ve $\tau(g(u)) = \sum_{j=0}^{n} \sigma(b_j) v^j$ dir.

$$\begin{aligned}
\tau\left(\sum_{i=0}^{n} a_i u^i + \sum_{j=0}^{n} b_j u^j\right) &= \tau\left(\sum_{i=0}^{n} (a_i + b_i) u^i\right) \\
&= \sum_{i=0}^{n} \sigma(a_i + b_i) v^i \\
&= \sum_{i=0}^{n} \sigma(a_i) v^i + \sum_{j=0}^{n} \sigma(b_j) v^j \\
&= \tau\left(\sum_{i=0}^{n} a_i u^i\right) + \tau\left(\sum_{j=0}^{n} b_j u^j\right)
\end{aligned}$$

$$f(u)g(u)=\sum_{k=0}^{m+n} c_k u^k,\quad c_k=\sum_{i=0}^{k} a_i b_{k-i} \quad \text{olduğundan}$$

$$\tau(f(u)g(u))=\sum_{k=0}^{m+n}\sigma(c_k)v^k,\quad \sigma(c_k)=\sum_{i=0}^{k}\sigma(a_i)\sigma(b_{k-i})$$

dir. Öte yandan

$$\tau(f(u))\,\tau(g(u))=\left(\sum_{i=0}^{m}\sigma(a_i)v^i\right)\left(\sum_{j=0}^{n}\sigma(b_j)v^j\right)=\sum_{k=0}^{m+n} d_k v^k,$$

$$d_k=\sum_{i=0}^{k}\sigma(a_i)\sigma(b_{k-i})$$

dir. Böylece her $k\geq 0$ için $\sigma(c_k)=d_k$ olduğundan $\tau(f(u)g(u))=\tau(f(u))\tau(g(u))$ olur. Dolayısıyla τ bir halka homomorfizması olsun.

τ örten olduğundan bir halka izomorfizmasıdır. $\blacksquare$

Yukarıdaki teoremde $F=F'$, $E=E'$ ve $\sigma=$birim fonksiyon ise $\tau: F(u)\longrightarrow F(v)$ izomorfizması, $\psi_{u,v}$ ile gösterilir ve buna temel izomorfizma (monomorfizma) denir.

Sonuç. F ve F' iki cisim ve bunların birer cebirsel genişlemeleri, sırasıyla, E ve E' olsun. Ayrıca $\sigma: F\longrightarrow F'$ bir cisim izomorfizması olsun. $p(x)\in F[x]$ bir indirgenmez polinom ve $p(x)$ in E içinde bir kökü u olsun. O zaman σ nın $F(u)$ dan E' içine tanımlı her genişlemesi u yu $\sigma^*(p(x))$ in bir köküne götürür. Dolayısıyla σ nın genişlemelerinin sayısı $\sigma^*(p(x))$ in E' içindeki köklerinin sayısına eşittir.

ÇÖZÜM. $v\in E'$, $\sigma^*(p(x))$ in bir kökü ise öyle bir $\tau: F(u)\longrightarrow F'(v)$ izomorfizması vardır ki $\tau|_F=\sigma$ ve $\tau(u)=v$ dir. Karşıt olarak $\tau: F(u)\longrightarrow E'$ bir cisim homomorfizması olmak üzere $\tau/_F = \sigma$ olsun. $p(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$ olsun. $p(u) = 0_F$ olduğundan $a_0 + a_1 u + \cdots + a_n u^n = 0_F$ dir. Eşitliğin iki yanına τ uygulanırsa $\sigma(a_0) + \sigma(a_1)\tau(u) + \cdots + \sigma(a_n)\tau(u)^n = 0_F$, bulunur. Öte yandan

$$\sigma^*(p(x)) = \sigma(a_0) + \sigma(a_1)x + \cdots + \sigma(a_n)x^n$$

olduğundan $\tau(u)$, $\sigma^*(p(x))$ in bir kökü olur. Ayrıca σ nın $\sigma^*(p(x))$ in farklı köklerine karşılık gelen genişlemelerinin de farklı olacağı açıktır. Böylece kanıt tamamlanır. $\boxtimes$

Sonuç. $E = F(u)$, F nin bir basit cebirsel genişlemesi, $p(x) = \mathrm{Min}_F(u)$ ve $\mathrm{der}(p(x)) = n$ olsun. E nin F yi sabit bırakan bir homomorfizması τ olsun. $p(x)$ in E içindeki bir kökü v olmak üzere $\tau = \varphi_{u,v}$ dir. Dolayısıyla τ, E nin bir otomorfizmasıdır. Böylece E nin F yi sabit bırakan otomorfizmalarının sayısı $p(x)$ in E içindeki köklerinin sayısına eşittir. Bundan başka her $b \in E$ için $c_0, c_1, \ldots, c_{n-1} \in F$ olmak üzere $b = c_0 + c_1 u + \cdots + c_{n-1}u^{n-1}$ ve $\tau(b) = c_0 + c_1 v + \cdots + c_{n-1} v^{n-1}$ dir.

Kanıt. $\tau/_F = I_F$ olduğundan yukarıdaki sonuçtan dolayı $p(x)$ in E içinde şöyle bir kökü v vardır ki $\tau(u) = v$ ve $\tau/_F = I_F$; yani $\tau = \varphi_{u,v}$ dir. Böylece $\tau : E = F(u) \longrightarrow F(v)$ bir izomorfizmadır. $F(v) = E$ olduğunu gösterirsek τ E üzerinde bir otomorfizma olur. $F(v) \leq E$ olduğundan $\underbrace{[E:F]}_{n} = [E:F(v)] \cdot \underbrace{[F(v):F]}_{n}$. $\Rightarrow [E:F(v)] = 1$

$\Rightarrow E = F(v)$.

$\therefore$ τ E nin F yi sabit bırakan bir otomorfizmasıdır.

Böylece E nin F yi sabit bırakan bütün homomorfizmalarının kümesi

$$\{\psi_{u,v} : v\in E \text{ ve } p(v)=0\}$$

kümesidir.

Son kısım açıktır. Böylece kanıt tamamlanır. ☒

Sonuç. $f(x)\in \mathbb{R}[x]$ olsun. Eğer $z\in\mathbb{C}$ olmak üzere $f(z)=0$ ise $f(\bar{z})=0$ dır.

Kanıt. $z=a+ib$ olsun. $\mathbb{C}=\mathbb{R}(i)$ ve $\mathrm{Min}_{\mathbb{R}}(i)=x^2+1$ dir. Dolayısıyla i nin eşlenikleri i ve $-i$ dir.

$\psi_{i,-i}:\mathbb{C}\longrightarrow\mathbb{C}$ temel homomorfizmasını göz önüne alalım.

$a+ib\in\mathbb{C}$ için $\psi_{i,-i}(a+ib)=a-ib$ dir.

$f(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n$ yazalım. $f(a+ib)=0$ olduğundan

$a_0+a_1(a+ib)+\cdots+a_n(a+ib)^n=0$ olur. Her iki tarafa $\psi_{i,-i}$ uygulanırsa

$\underbrace{a_0+a_1(a-ib)+\cdots+a_n(a-ib)^n}_{f(a-ib)}=0$ bulunur.

Teorem. $\mathbb{R}[x]$ in bir $f(x)$ polinomunun $\mathbb{R}$ üzerinde inmez olması için gerek ve yeter şart $f(x)$ in derecesinin 1 olması ya da $f(x)=ax^2+bx+c$ ve $b^2-4ac<0$ biçiminde olmasıdır.

Kanıt. $\mathrm{der}(f(x))=1$ ya da $f(x)=ax^2+bx+c$ ve $b^2-4ac<0$ ise $f(x)$ in inmez olacağı açıktır. Dolayısıyla kabul edelim ki $f(x)$ inmez ve $\mathrm{der}(f(x))\geq 2$ olsun. $\mathbb{C}$ cebirsel kapalı olduğundan

$f(x)$ in bir kompleks kökü z vardır. $f(\bar{z})=0$ olacağından ve $f(x)$ $\mathbb{R}$ üzerinde indirgenemez olduğundan $z \neq \bar{z}$ dir. Fakat bu durumda $(x-z)(x-\bar{z}) \mid f(x)$ olur. $(x-z)(x-\bar{z}) \in \mathbb{R}[x]$ olduğundan $f(x) = a(x-z)(x-\bar{z})$ olacak şekilde bir $a \in \mathbb{R}$ vardır. Böylece istenilen gösterilmiş olur.

Örnek. $E = \mathbb{Q}(\sqrt{2})$ cisminden $\mathbb{C}$ içine tanımlı $\mathbb{Q}$-yu sabit bırakan bütün monomorfizmaları (kısaca bütün $\mathbb{Q}$-monomorfizmaları) $\varphi_{\sqrt{2},\sqrt{2}}$ ve $\varphi_{\sqrt{2},-\sqrt{2}}$ dir.

Burada $\varphi_{\sqrt{2},\sqrt{2}} = I$ birim dönüşüm ve

$$\varphi_{\sqrt{2},-\sqrt{2}} : \mathbb{Q}(\sqrt{2}) \longrightarrow \mathbb{Q}(\sqrt{2}) \subseteq \mathbb{C}$$
$$a+b\sqrt{2} \longmapsto a-b\sqrt{2}$$

olur.

Örnek. $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$ cisminden $\mathbb{C}$ içine tanımlı bütün $\mathbb{Q}$-mono.ları belirleyelim. $\sqrt[3]{2}$ nin $\mathbb{Q}$ üzerindeki bütün eşlenikleri $w = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$ olmak üzere $\sqrt[3]{2}$, $w\sqrt[3]{2}$ ve $w^2\sqrt[3]{2}$ dir. O zaman bütün $\mathbb{Q}$-mono.lar:

$$\varphi_{\sqrt[3]{2},\sqrt[3]{2}} = I_{\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})}, \quad \varphi_{\sqrt[3]{2},w\sqrt[3]{2}} : \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}) \longrightarrow \mathbb{Q}(w\sqrt[3]{2})$$
$$a+b\sqrt[3]{2}+c\sqrt[3]{4} \longmapsto a+bw\sqrt[3]{2}+cw^2\sqrt[3]{4}$$

ve

$$\varphi_{\sqrt[3]{2},w^2\sqrt[3]{2}} : \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}) \longrightarrow \mathbb{Q}(w^2\sqrt[3]{2})$$
$$a+b\sqrt[3]{2}+c\sqrt[3]{4} \longmapsto a+bw^2\sqrt[3]{2}+cw\sqrt[3]{4}$$

olur.

Bir Cismin Otomorfizma Grubu ve Sabit Cisimler

Tanım. Bir E cisminden kendi üzerine tanımlı bir izomorfizmaya E nin bir otomorfizması denir. E nin bütün otomorfizmalarının kümesi $Aut(E)$ ile gösterilir.

Teorem. E bir cisim olsun. $Aut(E)$ bileşke işlemi "$\circ$" ya göre bir gruptur.

$Aut(E)$ ye E nin otomorfizma grubu denir.

Tanım. E bir cisim F, E nin bir alt cismi ve H, $Aut(E)$ nin bir alt grubu olsun. O zaman E nin F yi sabit bırakan bütün otomorfizmalarının kümesi $G(E/F)$ (veya $Aut(E/F)$) ile ve E nin H tarafından sabit bırakılan elemanlarının kümesi E_H ile gösterilir. Böylece

$$G(E/F) = \{\sigma \in Aut(E) : \text{her } a \in F \text{ için } \sigma(a) = a\}$$

ve

$$E_H = \{a \in E : \text{her } \sigma \in H \text{ için } \sigma(a) = a\}$$

dır.

Teorem. E bir cisim ve $Aut(E)$ nin bir alt grubu H olsun. O zaman E_H kümesi E nin altcismidir.

Kanıt. $\sigma \in H$ için $\sigma(0_E) = 0_E$ ve $\sigma(1_E) = 1_E$ olduğundan $0_E, 1_E \in E_H$ ve böylece $|E_H| \geq 2$ dir. $a, b \in E_H$ ve $\sigma \in Aut(E)$ olsun. $\sigma(a-b) = \sigma(a) - \sigma(b) = a - b$, $\sigma(ab) = \sigma(a)\sigma(b) = ab$ olduğundan $a-b, ab \in E_H$ olur. Ayrıca $b \neq 0_E$ ise $\sigma(b^{-1}) = \sigma(b)^{-1} = b^{-1}$ old.

$b^{-1} \in E_H$ olur. Dolayısıyla E_H, E nin bir altcismidir. ∎

E_H cismine H nin E içindeki sabit cismi denir.

Teorem. E/F bir cisim genişlemesi olsun. O zaman $G(E/F)$ kümesi $Aut(E)$ nin bir altgrubudur.

Kanıt. $I_E \in G(E/F)$ old. $G(E/F) \neq \emptyset$. $\sigma, \tau \in G(E/F)$ olsun. Her $a \in F$ için $\sigma\tau(a) = \sigma(\tau(a)) = \sigma(a) = a$ ve $\sigma^{-1}(a) = a$ old. $\sigma\tau, \tau^{-1} \in G(E/F)$ ve böylece altgrup kriteri gereğince $G(E/F)$ $Aut(E)$ nin bir altgrubu olur. ∎

$G(E/F)$ grubuna E nin F yi sabit bırakan otomorfizmalarının grubu ya da kısaca E nin F üzerindeki grubu denir.

Teorem F bir cisim, E, F nin bir cebirsel genişlemesi ve $E = F(u_1, \dots, u_k)$ olsun. O zaman $G(E/F)$ nin her σ elemanı $u_1, \dots, u_k$ deki değerleriyle tam olarak belirlenir. Bundan başka eğer $G(E/F)$ nin her σ elemanı için

$$\sigma(\{u_1, \dots, u_k\}) \subseteq \{u_1, \dots, u_k\}$$

ise o zaman $G(E/F)$ S_k permütasyon grubuna izomorftur ve $|G(E/F)| \,\big|\, k!$ dir.

Kanıt. $\sigma \in G(E/F)$ ve $y \in E$ olsun.

$$y = \sum c_{m_{i1} \dots m_{ik}} u_1^{m_{i1}} \dots u_k^{m_{ik}}, \quad c_{m_{i1} \dots m_{ik}} \in F$$

şeklinde yazılabileceğinden

$$\sigma(y) = \sum c_{m_{i1} \dots m_{ik}} \sigma(u_1)^{m_{i1}} \dots \sigma(u_k)^{m_{ik}}$$

olur. Dolayısıyla σ, $\sigma(u_1), \ldots, \sigma(u_k)$ değerleriyle tam olarak belirlenir.

$\mathcal{U} = \{u_1, \ldots, u_k\}$ ve her $\sigma \in G(E/F)$ için $\sigma(\mathcal{U}) \subseteq \mathcal{U}$ olsun. Buna göre her $\sigma \in G(E/F)$ için $\sigma|_{\mathcal{U}} : \mathcal{U} \to \mathcal{U}$ 1-1 ve böylece örtendir. Dolayısıyla $G(E/F)$ den $\mathcal{U}$ nun simetri grubu $Sym(\mathcal{U})$ ya

$$\begin{aligned} G(E/F) &\longrightarrow Sym(\mathcal{U}) \\ \sigma &\longmapsto \sigma|_{\mathcal{U}} \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanan dönüşüm bir birebir grup homomorfizmasıdır. $Sym(\mathcal{U}) \cong S_k$ ve $|S_k| = k!$ olduğundan istenen gösterilmiş olur.

$\blacksquare$

Örnek. $G(\mathbb{C}/\mathbb{R}) = \{\psi_{i,i}, \psi_{i,-i}\}$ dir. Ayrıca $G(\mathbb{C}/\mathbb{R})$ nin sabit cismi $\mathbb{R}$ dir.

Örnek. $E = \mathbb{Q}(\sqrt{2})$ olsun. $G(E/\mathbb{Q}) = \{\psi_{\sqrt{2},\sqrt{2}}, \psi_{\sqrt{2},-\sqrt{2}}\}$ dir. Dolayısıyla $G(E/\mathbb{Q})$ mertebesi 2 olan bir devirli gruptur. $E_{G(E/\mathbb{Q})} = \mathbb{Q}$ dur. E nin $\mathbb{Q}$ ve kendisinden başka alt cismi,

$G(E/\mathbb{Q})$ nun birim ve kendisinden başka alt grubu yoktur.

Örnek. $E=\mathbb{Q}(\sqrt{2},\sqrt{3})$ olsun. $G(E/\mathbb{Q})$ yu belirleyelim:
$E=\mathbb{Q}(\sqrt{2})(\sqrt{3})$ yazabiliriz. $\sqrt{3}\notin\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ olduğundan

$$Min_{\mathbb{Q}(\sqrt{2})}(\sqrt{3})=x^2-3$$

olur. Böylece $\sqrt{3}$ ün $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ üzerindeki eşlenikleri $\sqrt{3},-\sqrt{3}$ tür. Dolayısıyla $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ yi sabit bırakan $\psi_{\sqrt{3},\sqrt{3}}$, $\psi_{\sqrt{3},-\sqrt{3}}$ otomorfizmaları yazılabilir. Bunlar elbette ki $\mathbb{Q}$ yu da sabit bırakır. Benzer şekilde $\mathbb{Q}(\sqrt{3})$ ü sabit bırakan $\psi_{\sqrt{2},\sqrt{2}}$, $\psi_{\sqrt{2},-\sqrt{2}}$ otomorfizmaları yazılabilir. Bunlar da E nin $\mathbb{Q}$ yu sabit bırakan otomorfizmalarıdır.
Aslında $\psi_{\sqrt{3},\sqrt{3}}=I_E=\psi_{\sqrt{2},\sqrt{2}}$ ve her $a\in\mathbb{Q}$ için

$$\begin{aligned}\psi_{\sqrt{2},-\sqrt{2}}: E &\longrightarrow E \\ a &\longmapsto a \\ \sqrt{2} &\longmapsto -\sqrt{2} \\ \sqrt{3} &\longmapsto \sqrt{3}\end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned}\psi_{\sqrt{3},-\sqrt{3}}: E &\longrightarrow E \\ a &\longmapsto a \\ \sqrt{2} &\longmapsto \sqrt{2} \\ \sqrt{3} &\longmapsto -\sqrt{3}\end{aligned}$$

şeklindedir. $\sigma=\psi_{\sqrt{2},-\sqrt{2}}$ ve $\tau=\psi_{\sqrt{3},-\sqrt{3}}$ denirse $\sigma\tau=\tau\sigma$ bileşkesi de E nin $\mathbb{Q}$ yu sabit bırakan bir ototorfizması olur. Buna göre

$$\{I_E,\sigma,\tau,\sigma\tau\}\subseteq G(E/\mathbb{Q})$$

yazılabilir. Acaba başka otomorfizma var mıdır?

Şimdi $\sigma\in G(E/\mathbb{Q})$ alalım. σ, $\sigma(\sqrt{2})$ ve $\sigma(\sqrt{3})$ değerleri ile tam olarak belirlidir. $\sigma(\sqrt{2})\in\{\sqrt{2},-\sqrt{2}\}$ ve $\sigma(\sqrt{3})\in\{\sqrt{3},-\sqrt{3}\}$ olduğunu biliyoruz. Buna göre σ dört farklı biçimde seçilebilir.

Dolayısıyla yukarıda bulduklarımızdan başka otomorfizma yoktur ve $G(E/F) = \{ I_E, \sigma, \tau, \sigma\tau \}$ olur. Dikkat edilirse $\sigma^2 = I_E = \tau^2$ olduğundan $G(E/F)$, S_4 ün Klein-4 altgrubu V_4 e izomorftur.

Örnek. Yukarıdaki örnekte bulduğumuz $G(E/\mathbb{Q})$ grubunun alt-gruplarını ve bunların sabit cisimlerini belirleyelim:

$G = G(E/\mathbb{Q})$ olsun. $G = \{1, \sigma, \tau, \sigma\tau\}$, $\sigma^2 = \tau^2 = 1$ ve $\sigma\tau = \tau\sigma$ olduğundan G nin alt grupları $G, \{1\}, <\sigma>, <\tau>, <\sigma\tau>$ dur. Açıkça görüldüğü gibi $E_G = \mathbb{Q}$ ve $E_{\{1\}} = E$ dir. $\sigma(\sqrt{3}) = \sqrt{3}$ olduğundan $\mathbb{Q}(\sqrt{3}) \subseteq E_\sigma$ dır. Ayrıca $2 = [E : \mathbb{Q}(\sqrt{3})] = [E : E_\sigma][E_\sigma : \mathbb{Q}(\sqrt{3})]$ olduğundan $[E : E_\sigma] = 1$ ya da $[E : E_\sigma] = 2$ olmalıdır. Birinci durumda $E = E_\sigma$ olur. Fakat $\sigma(\sqrt{2}) = -\sqrt{2} \neq \sqrt{2}$ olduğundan bu çelişkidir. Dolayısıyla $[E : E_\sigma] = 2$ olmalıdır. Buradan $[E_\sigma : \mathbb{Q}(\sqrt{3})] = 1$, yani $E_\sigma = \mathbb{Q}(\sqrt{3})$ bulunur. Benzer bir yolla $E_\tau = \mathbb{Q}(\sqrt{2})$ olduğu gösterilebilir. Son olarak $E_{\sigma\tau}$ yu belirleyelim. $\sigma\tau(\sqrt{6}) = \sigma(\tau(\sqrt{6})) = \sigma(\tau(\sqrt{2})\tau(\sqrt{3}))$ $= \sigma(-\sqrt{6}) = -\sigma(\sqrt{2})\sigma(\sqrt{3}) = \sqrt{6}$ olduğundan $\sqrt{6} \in E_{\sigma\tau}$ ve buradan $\mathbb{Q}(\sqrt{6}) \subseteq E_{\sigma\tau}$ olur. Ayrıca $[E : \mathbb{Q}(\sqrt{6})] = 2$ olduğundan E_σ nın belirlenmesinde olduğu gibi $E_{\sigma\tau} = \mathbb{Q}(\sqrt{6})$ bulunur. G grubunun altgrup kafesi ve E nin altcisim kafesi aşağıda gösterilmiştir.

$$\begin{tikzcd}
& G \arrow[dl, dash] \arrow[d, dash] \arrow[dr, dash] & \\
\langle\sigma\rangle \arrow[dr, dash] & \langle\sigma\tau\rangle \arrow[d, dash] & \langle\tau\rangle \arrow[dl, dash] \\
& \{1\} &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
& E \arrow[dl, dash] \arrow[d, dash] \arrow[dr, dash] & \\
\mathbb{Q}(\sqrt{3}) \arrow[dr, dash] & \mathbb{Q}(\sqrt{6}) \arrow[d, dash] & \mathbb{Q}(\sqrt{2}) \arrow[dl, dash] \\
& \mathbb{Q} &
\end{tikzcd}$$

Örnek. $E=\mathbb{Q}(\sqrt{2}+i)$ olsun. E nin bir $\mathbb{Q}$-bazını ve $G(E/\mathbb{Q})$ grubunu belirleyelim: Önce $E=\mathbb{Q}(\sqrt{2},i)$ olduğunu gösterelim. Sol tarafın sağ tarafın içinde olduğu açıktır. Öte yandan $(\sqrt{2}+i)^2=2+2\sqrt{2}i-1=1+2\sqrt{2}i\in E$ olduğundan $\sqrt{2}i\in E$ ve $\sqrt{2}i(\sqrt{2}+i)=2i-\sqrt{2}\in E$ ve böylece $(\sqrt{2}+i)+(2i-\sqrt{2})=3i\in E$ olur. Buradan $i\in E$ ve $\sqrt{2}=\sqrt{2}+i-i\in E$ elde edilir. Böylece sağ taraf sol tarafın içindedir. Dolayısıyla $E=\mathbb{Q}(\sqrt{2},i)$ yazabiliriz. Bilindiği gibi $Min_{\mathbb{Q}}(\sqrt{2})=x^2-2$ ve $Min_{\mathbb{Q}}(i)=x^2+1$ dir. Dolayısıyla $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ nin bir $\mathbb{Q}$-bazı $\{1,\sqrt{2}\}$ yazılabilir. Ayrıca $i\notin\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ olduğundan $Min_{\mathbb{Q}(\sqrt{2})}(i)=x^2+1$ dur. Buradan E nin bir $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$-bazı $\{1,i\}$ bulunur. Dolayısıyla E nin bir $\mathbb{Q}$-bazı $\{1,\sqrt{2},i,i\sqrt{2}\}$ yazılabilir. Şimdi $\sigma\in G(E/\mathbb{Q})$ olsun. $\sqrt{2}$ ve i nin $\mathbb{Q}$-üzerindeki eşlenikleri sırasıyla $-\sqrt{2},\sqrt{2}$ ve $-i,i$ olduğundan $\psi_{\sqrt{2},-\sqrt{2}}$ ve $\psi_{i,-i}$ temel otomorfizmaları vardır. Eğer $\sigma=\psi_{\sqrt{2},-\sqrt{2}}$ ve $\tau=\psi_{i,-i}$ konulursa $G(E/F)=\{1,\sigma,\tau,\sigma\tau\}$ Klein-4 grubu elde edilir.