PATLAMALI-HATA-DÜZELTİCİ KODLAR

Şu ana kadar ele aldığımız kodlar rastgele meydana gelen hataları düzelten türden kodlar idi. Ancak belli bir aralık içine sınırlanmış hatalardan etkilenen iletişim kanalları da mevcuttur (örneğin; telefon teli veya manyetik veri depolama ortamları gibi). Bu türden hatalara "**patlama**" hataları denmektedir. Genelde rastgele hataları düzeltmek için elverişli kodlar patlama hataların düzeltmede verimli olmadıklarından patlama hatalarını düzeltmek için özel olarak tasarlanmış kodlara ihtiyaç vardır. Bu tür kodlara "**patlamalı-hata-düzeltici**" kodlar denilmektedir.

Devirli kodlar patlama hataların düzeltmede çok kullanışlı ve verimli olabilmektedir. Bu bölümde bu konuyu ele alacağız. Bu bölüm içinde ele alınan kodlar ikili kodlardır.

Tanım. $l>1$ bir tamsayı olsun. Eğer bir (ikili) vektörde başı ve sonu sıfırdan farklı olmak kaydıyla sıfırdan farklı tüm bileşenler dairesel olarak ardışık olan l adet pozisyona sıkışmış ise bu vektöre <u>l uzunluklu bir patlama</u> denir.

Örneğin; 0001011000 vektörü 4 uzunluklu bir patlama iken 0100000000000100 vektörü 5 uzunluklu bir patlamadır.

Eğer bir kod l uzunluklu patlama hatalarının tümünü düzeltebiliyor ise bu koda <u>l-patlamalı-hata-düzeltici</u> kod denir.

Teorem. Bir $\mathcal{C}$ kodu l-patlamalı hata düzeltici kod olması için gerek ve yeter şart en fazla l-uzunluklu bütün patlama hatalarının $\mathcal{C}$ nin farklı kosetlerine düşmesidir.

Teorem. $\mathcal{C}$ bir $[n,k]$-doğrusal kodu olsun. Eğer $\mathcal{C}$ l-patlamalı-hata-düzeltici ise o zaman

(i) $2l$ veya daha az uzunluklu hiçbir (sıfırdan farklı) patlama, kod sözcüğü değildir.

(ii) $n-k \geq 2l$ dir.

Yukarıdaki teoreme göre l-patlamalı-hata-düzeltici bir $[n,k]$-doğrusal kodu için $n-k \geq 2l$ eşitsizliği sağlanmalıdır. Bu ise

$$l \leq \left[\!\left[\frac{n-k}{2} \right]\!\right]$$

demektir. Buna Reigel sınırı denir. Reigel sınırına ulaşan bir patlamalı hata düzeltici koda "optimal" patlamalı-hata-düzeltici kod denir.

Örnek $\mathcal{C}$ $g(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + x^6 \in \mathbb{F}_2[x]$ tarafından üretilen 15 uzunluklu ikili devirli kod olsun. $\mathcal{C}$ bir $[15,9]$-doğrusal kodudur. Dikkat edilirse $\mathbb{F}_2^{15}$ içinde 2 uzunluklu patlamalar, 110000000000000 sözcüğü ile bunun bütün dairesel kaymalarıdır. Tüm bu sözcüklerin sendromlarının farklı olduğu görülür. Ayrıca 3 uzunluklu patlamalar da

101000000000000 ve 111000000000000

ile bunların tüm dairesel kaymalarıdır. Örneğin

$$v=101000000000000$$

denirse $v(x)=1+x^2$ dir. Her $1\leq i\leq 14$ için $x^i v(x)$ in sendromunu $s_i(x)$ ile gösterirsek

$s_1(x)=x+x^3$ $\qquad$ $s_8(x)=1+x^2+x^3+x^4$

$s_2(x)=x^2+x^4$ $\qquad$ $s_9(x)=x+x^3+x^4+x^5$

$s_3(x)=x^3+x^5$ $\qquad$ $s_{10}(x)=1+x+x^3+x^4+x^5$

$s_4(x)=1+x+x^2+x^3+x^4$ $\qquad$ $s_{11}(x)=1+x^3+x^4+x^5$

$s_5(x)=x+x^2+x^3+x^4+x^5$ $\qquad$ $s_{12}(x)=1+x^2+x^3+x^4+x^5$

$s_6(x)=1+x+x^4+x^5$ $\qquad$ $s_{13}(x)=1+x^2+x^4+x^5$

$s_7(x)=1+x^3+x^5$ $\qquad$ $s_{14}(x)=1+x^2+x^5$

bulunur. Benzer şekilde 111000000000000 sözcüğü ile bunun tüm dairesel kaymalarının sendromları hesaplanırsa bütün elde edilen sendromların birbirinden farklı olduğu görülür. Böylece 3 veya daha az uzunluktaki patlamalar $\mathcal{C}$ nin farklı kosetlerine düşerler. Dolayısıyla $\mathcal{C}$ bir 3-patlamalı-hata-düzeltici koddur. Üstelik $\mathcal{C}$ kodu bir optimal 3-patlamalı-hata-düzeltici kod olur.

Dikkat edilirse l uzunluklu bir patlamada sıfırın $n-l$ uzunluklu bir devirli dizisi bulunur. Buna göre bir l-patlamalı-hata-düzeltici $[n,k]$-doğrusal kodu için $k\leq n-2l\leq n-l$ olacağından devirli kodlar için daha önce verdiğimiz kod çözme algoritmasının önemli bir koşulu sağlanmış olur. Dolayısıyla orada sunulan algoritma patlamalı hataları düzeltmek için de uygulanabilir. Tek fark ise hata dizgesinin ağırlığının $\left[\!\left[\frac{d(\mathcal{C})-1}{2}\right]\!\right]$ sayısından küçük ya da eşit olduğunu bilmeye artık ihtiyacımızın olmayışıdır.

Patlamalı-hata-düzeltici devirli kodlar için kod çözme algoritması:

$\mathcal{C}$ üreteç polinomu $g(x)$ olan bir $(q\text{-lu})$ devirli $[n,k]$-doğrusal kodu olsun.

$w(x)$ alınsın ve $e(x)$ hata dizgesi en fazla ℓ uzunluklu bir patlama şeklinde olsun. O zaman $e(x)$ i bulmak için aşağıdaki adımları takip edebiliriz:

Adım 1: $i=1,2,\ldots$ için $x^i w(x)$ sendromlarını hesapla ve $x^i w(x)$ in sendromunu $S_i(x)$ ile göster,

Adım 2: $S_m(x)$ en fazla ℓ uzunluklu bir patlama olacak şekildeki (ilk) m sayısını bul,

Adım 3: $x^{n-m}S_m(x)$ in x^n-1 ile bölümünden kalanı bul ve bu kalanı $e(x)$ ile göster. $w(x)$ sözcüğünü $w(x)-e(x)$ olarak çöz.

Örnek. $g(x)=1+x+x^2+x^3+x^6$ tarafından üretilen devirli $[15,9]$-doğrusal kodunu ele alalım. Buna göre uzunluğu en fazla 3 olan tüm patlamalı hataları düzeltebiliriz. Kabul edelim ki alınan sözcük

$$w(x)=111011101100000=1+x+x^2+x^4+x^5+x^6+x^8+x^9$$

olsun. $x^i w(x)$ sendromlarını S_i ile gösterirsek, bu sendromları, aşağıdaki gibi, uzunluğu en fazla 3 olan bir patlama elde edene kadar hesaplayalım:

i	$s(i)$
0	$1+x+x^4+x^5$
1	$1+x^3+x^5$
2	$1+x^2+x^3+x^4$
3	$x+x^3+x^4+x^5$
4	$1+x+x^3+x^4+x^5$
5	$1+x^3+x^4+x^5$
6	$1+x^2+x^3+x^4+x^5$
7	$1+x^2+x^4+x^5$
8	$1+x^2+x^5$
9	$1+x^2$

$x^{15-9}s_9(x) = x^6(1+x^2) = x^6+x^8$ olduğundan $e(x) = x^6+x^8$ olur. Böylece $w(x)$, $w(x)-e(x) = 1+x+x^2+x^4+x^5+x^9 = 111011000100000$ olarak çözülür.

Aşağıdaki tabloda bazı optimal patlamalı-hata-düzeltici kodlar verilmiştir:

Kod parametreleri	Üreteç polinomları
[7,3]	$1+x+x^3+x^4$
[15,9]	$1+x+x^2+x^3+x^6$
[15,7]	$1+x^4+x^6+x^7+x^8$
[15,5]	$1+x+x^2+x^4+x^5+x^8+x^{10}$