

**1.**  $\mathbb{Z}_2[x]/(x^3 + x + 1)$  halkası bir cisim midir? Bu halkanın işlem tablolarını yapınız. Elemanları ikilik ve ondalık sayı düzeninde yeniden yazarak işlem tablolarını yeniden elde ediniz.

Yukarıda istenenlerin aynısını  $\mathbb{Z}_3[x]/(x^2 + 1)$  halkası için de yapınız.

**2.** Aşağıdaki polinomların indirgenemez olduklarını gösteriniz:

(a)  $\mathbb{F}_2$  üzerinde  $x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$ ,  $x^4 + x + 1$  ve  $x^4 + x^3 + 1$ .

(b)  $\mathbb{F}_3$  üzerinde  $x^2 + x + 2$  ve  $x^2 + 2x + 2$ .

**3.** (a)  $\mathbb{F}_q$  üzerindeki ikinci dereceden monik indirgenemez polinomların sayısını bulunuz.

(b)  $\mathbb{F}_q$  üzerindeki üçüncü dereceden monik indirgenemez polinomların sayısını bulunuz.

(c)  $\mathbb{F}_2$  üzerindeki bütün ikinci ve üçüncü dereceden indirgenemez polinomların sayısını bulunuz.

**4.**  $\mathbb{F}_2$  üzerinde  $P(x) = x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x + 1$  ve  $Q(x) = x^5 + x^3 + x^2 + x$  polinomlarının en büyük ortak bölenini bulunuz. Ayrıca

$$(P(x), Q(x)) = P(x)u(x) + Q(x)v(x)$$

olacak şekilde  $u(x), v(x) \in \mathbb{F}_2[x]$  polinomları bulunuz.

**5.**  $\mathbb{F}_2$  üzerinde

$$(x^3 + x + 1)u(x) + (x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)v(x) = 1$$

olacak şekilde  $u(x)$  ve  $v(x)$  polinomları bulunuz.

**6.**  $\alpha, x^4 + x + 1 \in \mathbb{F}_2[x]$  polinomunun bir kökü olmak üzere  $\mathbb{F}_{16}$  cismi içinde  $\alpha, \alpha^3, \alpha + 1$  ve  $\alpha^3 + 1$  elemanlarının mertebelerini bulunuz.

**7.**  $\alpha \in \mathbb{F}_q$  bir ilkel eleman olsun. Gösteriniz ki  $\alpha^i$  ilkeldir ancak ve ancak  $(i, q - 1) = 1$ .

Buna göre  $\mathbb{F}_9, \mathbb{F}_{19}, \mathbb{F}_{25}$  ve  $\mathbb{F}_{32}$  cisimlerinin kaç tane ilkel elemana sahip olacağını bulunuz.

**8.**  $\alpha, x^2 + 1$  polinomunun bir kökü olmak üzere  $\mathbb{F}_9 = \mathbb{F}_3(\alpha)$  cisminin bütün ilkel elemanlarını belirleyiniz.

**9.** Aşağıdaki sonlu cisimlerin birer ilkel elemanını bularak, Zech Logaritma Tablolarını yapınız:

(a)  $\mathbb{F}_9$

(b)  $\mathbb{F}_{32}$

(c)  $\mathbb{F}_{25}$

**10.**  $x^6 + x + 1 \in \mathbb{F}_2[x]$  polinomunun indirgenemez olduğunu gösteriniz.

$\alpha, x^6 + x + 1$  polinomunun bir kökü olmak üzere  $\alpha \in \mathbb{F}_{64} = \mathbb{F}_2(\alpha)$  elemanının bir ilkel eleman olduğunu gösteriniz.