Soru 1. *$2x + 3y = 7$ kısıtı altında $U(x, y) = \frac{1}{2}\ln(1 + x) + \frac{1}{4}\ln(1 + y)$ fonksiyonunu maksimize etme problemini çözünüz. (Not: Problemin çözümünün varlığı hakkında bilgi verilmediği için çözümün varlığını da göstermek gereklidir.)*

Çözüm. Bu probleme ait Lagrange fonksiyonu, λ Lagrange çarpanı olmak üzere,

$$\mathscr{L}(x, y) = \frac{1}{2}\ln(1 + x) + \frac{1}{4}\ln(1 + y) - \lambda(2x + 3y - 7)$$

fonksiyonudur. Lagrange fonksiyonunun birinci merteben kısmî türevleri alınır ve sıfıra eşitlenirse

$$\begin{aligned} \mathscr{L}'_1(x, y) &= \tfrac{1}{2(1+x)} - 2\lambda &= 0 \\ \mathscr{L}'_2(x, y) &= \tfrac{1}{4(1+y)} - 3\lambda &= 0 \end{aligned}$$

yani

$$\lambda = \frac{1}{\cancel{4}(1 + x)} = \frac{1}{\underset{3}{\cancel{12}}(1 + y)}$$

eşitlikleri elde edilir. Son iki eşitlik düzenlenirse $x - 3y = 2$ eşitliği bulunur. Buna göre

$$\begin{cases} 2x + 3y = & 7 \\ x - 3y = & 2 \end{cases}$$

denklem sistemi çözülürse $x = 3$ ve $y = 1/3$ bulunur. Yani problemin tek çözüm adayı $(3, 1/3)$ olarak bulunur. Şimdi problemin bir çözümü olması gerektiğini gösterelim. $U(x, y)$ fonksiyonu $\{(x, y) : x \geq -1,\ y \geq -1\}$ konveks kümesi üzerinde tanımlı ve bu kümedeki tüm (x, y) noktaları için

$$\begin{aligned} \mathscr{L}''_{11}(x, y) &= \frac{-1}{2(1 + x)^2} < 0 \\ \mathscr{L}''_{22}(x, y) &= \frac{-1}{4(1 + y)^2} < 0 \end{aligned}$$

ve

$$\mathscr{L}''_{11}(x, y)\mathscr{L}''_{22}(x, y) - (\mathscr{L}''_{12})^2 > 0$$

olduğundan maksimize etme probleminin bir çözümü vardır. Tek çözüm adayı $(3, 1/3)$ olduğundan, $(3, 1/3)$ ikilisi problemin çözümüdür.

□

Soru 2. $\begin{cases} x + y + z = & 1 \\ y^2 + z^2 = & 4 \end{cases}$

kısıtları altında $x + 2y$'yi maksimize etme probleminin bir çözümü olduğu bilindiğine göre problemi çözünüz.

Çözüm. Lagrange fonksiyonu

$$\mathscr{L}(x, y, z) = x + 2y - \lambda_1(x + y + z - 1) + \lambda_2(y^2 + z^2 - 4)$$

olur. Birinci merteben türevler alınır ve sıfıra eşitlenirse

$$\mathscr{L}_1'(x,y,z) = 1 - \lambda_1 = 0 \tag{1}$$
$$\mathscr{L}_2'(x,y,z) = 2 - \lambda_1 + 2y\lambda_2 = 0 \tag{2}$$
$$\mathscr{L}_3'(x,y,z) = -\lambda_1 + 2z\lambda_2 = 0 \tag{3}$$

olur. Buna göre (1) eşitliğinden $\lambda_1 = 1$ elde edilir. (2) eşitliğinde yerine konursa

$$\lambda_2 = \frac{-1}{2y}$$

bulunur. Bulunan λ_1 ve λ_2 değerleri (3) eşitliğinde yerine konursa $y = -z$ elde edilir. $x + y + z = 1$ olduğundan $x = 1$ olur. Ayrıca

$$4 = y^2 + z^2 = 2y^2$$

olacağından $y = \pm\sqrt{2}$ olur. Dolayısıyla çözüm adayları $(1, \sqrt{2}, -\sqrt{2})$ ve $(1, -\sqrt{2}, \sqrt{2})$ dir. Bunlardan $x + 2y$'yi maksimize eden $(1, \sqrt{2}, -\sqrt{2})$ olacağından çözüm elde edilir.

□

Soru 3. *Aşağıdaki integralleri hesaplayınız.*

(*a*)

$$\int_0^{1/2} \frac{x.\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} \mathrm{d}x$$

(*b*)

$$\int \frac{x \mathrm{d}x}{\sqrt{27 + 6x - x^2}}$$

Çözüm. (*a*) Kısmî integrasyon uygulayacağız.

$$u = \arcsin x \quad \text{ve} \quad \mathrm{d}v = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \mathrm{d}x$$

denirse

$$\mathrm{d}u = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \mathrm{d}x \quad \text{ve} \quad v = -\sqrt{1-x^2}$$

elde edilir. Buna göre

$$\begin{aligned}\int_0^{1/2} \frac{x.\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} \mathrm{d}x &= -\sqrt{1-x^2} \arcsin x \Big|_0^{1/2} + \int_0^{1/2} \cancel{\sqrt{1-x^2}} \frac{1}{\cancel{\sqrt{1-x^2}}} \mathrm{d}x \\ &= -\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{\pi}{6} + \int_0^{1/2} \mathrm{d}x \\ &= -\frac{\pi\sqrt{3}}{12} + \frac{1}{2}\end{aligned}$$

elde edilir

(*b*) $27 + 6x - x^2 = 36 - (x-3)^2$ eşitliği yazılabilir. $u = x - 3$ denirse verilen integral

$$\int \frac{x \mathrm{d}x}{\sqrt{27 + 6x - x^2}} = \int \frac{u+3}{\sqrt{36-u^2}} \mathrm{d}u = \int \frac{u \mathrm{d}u}{\sqrt{36-u^2}} + 3\int \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{36-u^2}}$$

şeklinde yazılabilir.

$$\int \frac{u\mathrm{d}u}{\sqrt{36-u^2}} = -\sqrt{36-u^2}$$

ve

$$\int \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{36-u^2}} = \arcsin\frac{u}{6}$$

olduğundan

$$\begin{aligned}\int \frac{x\mathrm{d}x}{\sqrt{27+6x-x^2}} &= -\sqrt{36-u^2} + 3\arcsin\frac{u}{6} + C \\ &= -\sqrt{27+6x-x^2} + 3\arcsin\frac{x-3}{6} + C\end{aligned}$$

bulunur.

□

Soru 4.

$$y' = \frac{2y+x}{x}$$

diferensiyel denklemini çözünüz.

Çözüm.

$$\frac{2(ty)+(tx)}{tx} = \frac{2y+x}{x}$$

olduğundan verilen diferensiyel denklem homojendir. buna göre $y = vx$ dönüşümü uygulanırsa

$$v + x\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} = \frac{2vx+x}{x} = 2v+1$$

ve buradan da

$$x\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} = v+1$$

elde edilir. Buna göre diferensiyel formda

$$-\frac{1}{x}\mathrm{d}x + \frac{1}{v+1}\mathrm{d}v = 0$$

şeklinde yazabiliriz. Böylece

$$\int -\frac{1}{x}\mathrm{d}x + \int \frac{1}{v+1}\mathrm{d}v = c$$

yani

$$-\ln|x| + \ln|v+1| = c$$

eşitliğine ulaşılır. $v = y/x$ olduğunu hatırlarsak, yerine yazıldığında

$$-\ln|x| + \ln|\frac{y}{x} + 1| = c$$

ya da denk olarak

$$\frac{x+y}{x^2} = e^c$$

bulunur. e^c sabiti yerine k yazılırsa genel çözüm $y = kx^2 - x$ şeklinde elde edilir.

□

Soru 5. $(y\sin x + xy\cos x)\mathrm{d}x + (x\sin x + 1)\mathrm{d}y = 0$ *diferensiyel denklemini çözünüz.*

Çözüm. Verilen diferensiyel denklemde

$$(\underbrace{y\sin x + xy\cos x}_{M(x,y)})\mathrm{d}x + (\underbrace{x\sin x + 1}_{N(x,y)})\mathrm{d}y = 0$$

denirse

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \sin x + x\cos x = \frac{\partial N}{\partial x}$$

olacağından denklemin bir tam diferensiyel denklem olduğu görülür. Buna göre

$$\frac{\partial F}{\partial x} = M \quad \text{ve} \quad \frac{\partial F}{\partial y} = N$$

olacak şekilde $F(x,y)$ fonksiyonu bulunabilir. Bu şekilde bir $F(x,y)$ fonksiyonu bulmaya çalışacağız. Birinci eşitlikten dolayı

$$F(x,y) = \int (y\sin x + xy\cos x)\mathrm{d}x = -y\cos x + y\int x\cos x\mathrm{d}x + \phi(y)$$

yazılabilir. Burada $\phi(y)$ sadece y değişkenine bağlı bir fonksiyondur. $\int x\cos x\mathrm{d}x$ integrali kısmî integrasyon yöntemi kullanılarak kolayca hesaplanabilir. Buna göre $F(x,y) = -y\cos x + y(x\sin x + \cos x) + \phi(y) = xy\sin x + \phi(y)$ bulunur. Diğer eşitliği de dikkate alırsak

$$N = x\sin x + 1 = \frac{\partial F}{\partial y} = x\sin x + \phi'(y),$$

yani $\phi'(y) = 0$ elde edilir. Bu durumda $\phi(y) = k$ olacak şekilde bir k sabiti vardır. Böylece $F(x,y) = xy\sin x$ alınabilir. Dolayısıyla verilen diferensiyel denklemin genel çözümü, herhangi bir C sabiti için,

$$xy\sin x = C$$

eşitliğini sağlayan y fonksiyonlarıdır; yani,

$$y = \frac{C}{x\sin x}$$

tipindeki fonksiyonlardır.

□