Ders boyunca ele alınacak halkaların tümü aksi belirtilmedikçe değişmeli ve birimli olarak kabul edilecektir.

1. İDEALLER

<u>Tanım.</u> R ve S iki halka ve $f: R \to S$ bir halka hom. olsun. $Ker(f) = \{r \in R : f(r) = 0\}$ şeklinde tanımlanan kümeye f nin çekirdeği denir.

Aşağıdakileri görmek zor değildir:

(i) $0_R \in Ker(f)$. Dolayısıyla $Ker(f) \neq \emptyset$.

(ii) $a, b \in Ker(f)$ ise $a+b \in Ker(f)$.

(iii) $r \in R$ ve $a \in Ker(f)$ ise $ra \in Ker(f)$.

<u>1. Lemma.</u> $f: R \to S$ bir halka hom. olsun. O zaman f bir mono.dır ancak ve ancak $Ker(f) = \{0_R\}$

$$f(a) = f(b) \Rightarrow \underbrace{f(a) - f(b)}_{f(a-b)} = 0 \Rightarrow a-b \in Ker(f) = \{0_R\}$$
$$\Rightarrow a-b = 0_R \Rightarrow a = b$$

<u>Tanım.</u> R bir halka olsun. R'nin bir I altkümesi için

(i) $I \neq \emptyset$,

(ii) $a, b \in I$ iken $a+b \in I$,

(iii) $r \in R$ ve $a \in I$ iken $ra \in I$

koşulları sağlanıyorsa I kümesine R'nin bir ideali denir.

<u>Örnek.</u> $R = \mathbb{Z}$ olsun. $n \in \mathbb{Z}$ için $I = n\mathbb{Z} = \{nk : k \in \mathbb{Z}\}$ kümesi R'nin bir idealidir. Aslında R nin tüm idealleri bu yapıdadır.

I $\mathbb{Z}$'nin bir ideali olsun. $I=\{0\}$ ise o zaman $n=0$ için $I=n\mathbb{Z}$. Bu nedenle $I\neq\{0\}$ seçelim. $0\neq a\in I$. Eğer $a<0$ ise $-a=(-1).a\in I$ olacağından a yı pozitif kabul edebiliriz. Buna göre $\{a\in I : a>0\}$ kümesinin bir en küçük elemanı vardır. Bu eleman n olsun.

<u>İddia</u> : $I=n\mathbb{Z}$.

$n\in I$ old. her $k\in\mathbb{Z}$ için $nk\in I \Rightarrow n\mathbb{Z}\subseteq I$.

$b\in I$ alalım. Bölme algoritmasından $b=nq+r$ ve $0\leq r<n$ olacak şekilde $q,r\in\mathbb{Z}$ vardır. $r=b-nq\in I$. Eğer $0<r<n$ ise bu durum n nin seçimiyle çelişir. Dolayısıyla $r=0$ olmak zorundadır. O zaman $b=nq\in n\mathbb{Z}$ ve böylece $I\subseteq n\mathbb{Z}$ elde edilir. Dolayısıyla $I=n\mathbb{Z}$ dir.

<u>Örnek.</u> $I=\{f(x)\in\mathbb{Q}[x] : f(2)=0\}$ kümesi $\mathbb{Q}[x]$ halkasının bir idealidir.

$0\in I$

$f,g\in I \Rightarrow (f+g)(2)=f(2)+g(2)=0 \Rightarrow f+g\in I.$

$h\in\mathbb{Q}[x],\ f\in I \Rightarrow (hf)(2)=h(2).f(2)=0 \Rightarrow hf\in I.$

Bölüm Halkaları

R halka olduğundan $(R,+)$ toplamsal abelyan gruptur. I R'nin bir ideali olsun. $(I,+)\trianglelefteq(R,+)$

R/I bölüm grubu tanımlıdır.

$$+ : R/I \times R/I \longrightarrow R/I$$

$$(a+I,\ b+I)\longmapsto (a+b)+I$$

R/I grubu üzerinde çarpma işlemi

$$\cdot : R/I \times R/I \longrightarrow R/I$$
$$(a+I,\ b+I) \longmapsto ab+I$$

şeklinde tanımlansın. Kolayca görülebilir ki bu işlem iyi tanımlıdır ve $(R/I, +, \cdot)$ değişmeli ve birimli bir halkadır.

$$0_{R/I} = I = 0+I = a+I \ (a\in I)$$

$$1_{R/I} = 1_R + I \qquad a+I = b+I \Leftrightarrow a-b\in I$$

J, R nin I'yı içeren bir ideali ise

$$J/I = \{ a+I : a\in J \}$$

kümesi R/I halkasının bir idealidir.

2 Lemma R bir halka ve I R nin bir ideali olsun. O zaman $f: R \longrightarrow R/I$, her $r\in R$ için $f(r) = r+I$ şeklinde tanımlanan dönüşüm çekirdeği I olan bir halka epimorfizmasıdır. Bu epimorfizmaya bir kanonik epimorfizma denir.

3. Teorem. (İzomorfizma Teoremi) $f: R \rightarrow S$ bir halka hom. alalım. O zaman

$$\bar{f} : R/Ker(f) \longrightarrow S$$
$$r+Ker(f) \longmapsto f(r)$$

şeklinde tanımlanan dönüşüm bir halka monomorfizmasıdır. Özel olarak

$$R/Ker(f) \cong f(R)$$

Kanıt. $a+Ker(f) = b+Ker(f) \Rightarrow f(a)=f(b)$?