R/I grubu üzerinde çarpma işlemi

$$\cdot : R/I \times R/I \longrightarrow R/I$$
$$(a+I, b+I) \longmapsto ab+I$$

şeklinde tanımlansın. Kolayca görülebilir ki bu işlem iyi tanımlıdır ve $(R/I, +, \cdot)$ değişmeli ve birimli bir halkadır.

$$0_{R/I} = I = 0+I = a+I \quad (a \in I)$$

$$1_{R/I} = 1_R + I \qquad a+I = b+I \Leftrightarrow a-b \in I$$

J, R nin I 'yı içeren bir ideali ise

$$J/I = \{ a+I : a \in J \}$$

kümesi R/I halkasının bir idealidir.

2 Lemma R bir halka ve I R nin bir ideali olsun. O zaman $f : R \longrightarrow R/I$, her $r \in R$ için $f(r) = r+I$ şeklinde tanımlanan dönüşüm çekirdeği I olan bir halka epimorfizmasıdır. Bu epimorfizmaya bir kanonik epimorfizma denir.

3. Teorem. (İzomorfizma Teoremi) $f : R \to S$ bir halka hom. alalım. O zaman

$$\bar{f} : R/Ker(f) \longrightarrow S$$
$$r + Ker(f) \longmapsto f(r)$$

şeklinde tanımlanan dönüşüm bir halka monomorfizmasıdır. Özel olarak

$$R/Ker(f) \cong f(R)$$

Kanıt. $a + Ker(f) = b + Ker(f) \Rightarrow f(a) = f(b)$?

$a + Ker(f) = b + Ker(f) \Leftrightarrow a - b \in Ker(f) \Leftrightarrow f(a-b) = 0 \Leftrightarrow f(a) = f(b)$

$\bar{f}$ iyi tanımlı ve 1-1.

$\bar{f}$ nin bir halka hom. old. açıktır.

$\bar{f}(1_{R/Ker(f)}) = \bar{f}(1 + Ker(f)) = f(1) = 1$ $\square$

idealllerin üretilmesi

<u>Not</u>: R bir halka ise R nin kendisi her zaman bir idealdir. I R'nin bir ideali olmak üzere $I \neq R$ ise I'ya R'nin bir <u>öz ideali</u> denir.

$\{0_R\}$ kümesi de R'nin bir idealidir. $\{0_R\}$ idealini genellikle kısaca 0 şeklinde göstereceğiz.

<u>**4. Lemma**</u> R bir halka ve $a \in R$ olsun. $aR = \{ar : r \in R\}$ kümesi R'nin a'yı içeren bir idealidir.

Yukarıdaki lemmada bahsedilen aR ideali alternatif olarak (a) ya da Ra şeklinde de gösterilebilir.

$R = (1)$ ve $0 = (0)$
$a \in R$ için $(a) = R \Leftrightarrow a$ birimsel
$(\Rightarrow)$ $(a) = R \Leftrightarrow 1 \in (a) \Leftrightarrow 1 = ab$ o.ş. $b \in R$ var.

R bir halka ve $\{I_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ R nin ideallerinin bir ailesi olsun. O zaman

$$\bigcap_{\lambda \in \Lambda} I_\lambda$$

kümesi de R nin bir idealidir. Eğer $\Lambda = \phi$ ise $\bigcap_{\lambda \in \Lambda} I_\lambda = (0)$ olarak kabul edilecektir.

$H \subseteq R$ alalım. HR, RH ya da (H) ile

$$\bigcap \{I : I, R\text{'nin bir ideali ve } H \subseteq I\}$$

idealini gösterelim. (H) ideali H kümesini içeren R nin en küçük idealidir. Bu ideale R nin H kümesi tarafından üretilen ideali denir. $H=\emptyset$ ise $(H)=0$ olarak kabul edeceğiz.

5. Önerme. R bir halka ve $\emptyset \neq H \subseteq R$ olsun. O zaman

$$(H) = \left\{ \sum_{i=1}^{n} r_i h_i : n \in \mathbb{N},\ r_1,\dots,r_n \in R,\ h_1,\dots,h_n \in H \right\}$$

olur.

Kanıt. Eşitliğin sağ tarafına I diyelim. Önce I nın bir ideal olduğunu gösterelim. $0 \in I$ olduğu açıktır. $x, y \in I$ olsun.

$$x = r_1 h_1 + \dots + r_n h_n$$

$$y = r_1' h_1' + \dots + r_m' h_m'$$

o.s. $r_i, r_i' \in R$ ve $h_i, h_i' \in H$ $(n, m \in \mathbb{N})$ vardır.

$$x+y = r_1 h_1 + \dots + r_n h_n + \underset{r_{n+1}}{r_1'}\,\underset{h_{n+1}}{h_1'} + \dots + \underset{r_{n+m}}{r_m'}\,\underset{h_{n+m}}{h_m'} = \sum_{i=1}^{n+m} r_i h_i \in I$$

$r \in R$ alalım. $rx = r \sum_{i=1}^{n} r_i h_i = \sum_{i=1}^{n} (r r_i) h_i \in I$

$\therefore$ I R'nin bir idealidir.

$h \in H$ olsun. $h = 1.h$ $r_1 = 1$ alınırsa $h = \sum_{i=1}^{1} r_i h \in I$

$\therefore$ $H \subseteq I$

$\therefore$ $(H) \subseteq I$.

Öte yandan $H \subseteq (H)$ ve (H) R nin bir ideali olduğundan $\sum_{i=1}^{n} r_i h_i$ $(h_i \in H)$ tipindeki her eleman (H) içine düşer.

$\therefore$ $I \subseteq (H)$.

$\therefore$ $(H) = I$.