idealini gösterelim. (H) ideali H kümesini içeren R nin en küçük idealidir. Bu ideale R nin H kümesi tarafından üretilen ideali denir. $H = \phi$ ise $(H) = 0$ olarak kabul edeceğiz.

5. Önerme. R bir halka ve $\phi \neq H \subseteq R$ olsun. O zaman

$$(H) = \left\{ \sum_{i=1}^{n} r_i h_i \; : \; n \in \mathbb{N},\; r_1, \ldots, r_n \in R,\; h_1, \ldots, h_n \in H \right\}$$

olur.

Kanıt. Eşitliğin sağ tarafına I diyelim. Önce I nın bir ideal olduğunu gösterelim. $0 \in I$ olduğu açıktır. $x, y \in I$ olsun.

$$x = r_1 h_1 + \cdots + r_n h_n$$

$$y = r_1' h_1' + \cdots + r_m' h_m'$$

o.s. $r_i, r_i' \in R$ ve $h_i, h_i' \in H$ $(n, m \in \mathbb{N})$ vardır.

$$x + y = r_1 h_1 + \cdots + r_n h_n + \underbrace{r_1'}_{r_{n+1}} \underbrace{h_1'}_{h_{n+1}} + \cdots + \underbrace{r_m'}_{r_{n+m}} \underbrace{h_m'}_{h_{n+m}} = \sum_{i=1}^{n+m} r_i h_i \in I$$

$r \in R$ alalım. $rx = r \sum_{i=1}^{n} r_i h_i = \sum_{i=1}^{n} (r r_i) h_i \in I$

$\therefore$ I R'nin bir idealidir.

$h \in H$ olsun. $h = 1.h$ $\quad r_1 = 1$ alınırsa $h = \sum_{i=1}^{1} r_i h \in I$

$\therefore H \subseteq I$

$\therefore (H) \subseteq I$.

Öte yandan $H \subseteq (H)$ ve (H) R nin bir ideali olduğundan $\sum_{i=1}^{n} r_i h_i$ $(h_i \in H)$ tipindeki her eleman (H) içine düşer.

$\therefore I \subseteq (H)$.

$\therefore (H) = I$.

Not R bir halka ve $\emptyset \neq H \subseteq R$ olsun. Eğer $H=\{h_1,\ldots,h_t\}$ ise

$$(H)=\{r_1h_1+\cdots+r_th_t : r_i\in R\}=(h_1,\ldots,h_t)$$

olur. Özel olarak eğer $H=\{h\}$ ise o zaman

$$(H)=\{rh : r\in R\}=(h)=Rh=hR \longrightarrow h \text{ nin ürettiği temel ideal}$$

I R nin bir ideali olsun. Eğer $I=(H)$ o.ş. bir sonlu $H\subseteq R$ alt kümesi varsa I ya R nin bir sonlu üretedi ideali denir.

Örnek. R bir halka ve $R[X_1,\ldots,X_n]$ $X_1,\ldots,X_n$ değişkenlerine bağlı polinomların halkası olsun. $a_1,\ldots,a_n\in R$ için

$$f : R[X_1,\ldots,X_n] \longrightarrow R$$
$$P(X_1,\ldots,X_n) \longmapsto P(a_1,\ldots,a_n)$$

dönüşümünün bir halka epimorfizması olduğunu biliyoruz. Bu homomorfizmanın çekirdeği $\{X_1-a_1,\ldots,X_n-a_n\}$ kümesi tarafından üretilen idealdir; yani

$$Ker(f)=(X_1-a_1,\ldots,X_n-a_n).$$

Örnek. $f: \mathbb{Q}[X]\longrightarrow \mathbb{Q}$, $f(P(X))=P(2)$ değer homomorfizmasını düşünelim. $Ker(f)=\{P(X) ; P(2)=0\}=(X-2)$

İdealler arasındaki İşlemler

(a) Toplama

R bir halka ve $\{I_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ R nin ideallerinin bir ailesi olsun.

$\bigcup_{\lambda\in\Lambda} I_\lambda$ kümesinin ürettiği ideale I_λ ideallerinin toplamı denir ve

$$\sum_{\lambda\in\Lambda} I_\lambda$$

biçiminde yazılır.

$$\left(\bigcup_{\lambda\in\Lambda} I_\lambda\right) = \sum_{\lambda\in\Lambda} I_\lambda$$

Λ kümesi sonlu ise $I_1, \dots, I_n$ ideallerinin toplamını kimi zaman $I_1 + \dots + I_n$ şeklinde yazacağız.

Tanımdan dolayı ideallerin toplamının değişmeli ve birleşmeli olduğunu söyleyebiliriz.

$$A + (B+C) = A + (B\cup C)R = \left(A \cup (B\cup C)R\right) = (A\cup B\cup C)R$$

Benzer şekilde $(A+B)+C = (A\cup B\cup C)R$

6. Önerme. R bir halka ve $\{I_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ R nin ideallerinin bir ailesi olsun. O zaman

$$\sum_{\lambda\in\Lambda} I_\lambda = \left\{ \sum_{i=1}^{n} r_i : n\in\mathbb{N},\ r_i\in I_{\lambda_i} \text{ o.ş. } \lambda_i\in\Lambda \text{ var} \right\}$$

olur.

Kanıt. Eşitliğin sağ tarafına A diyelim. A'nın R'nin bir ideali olduğunu görmek zor değildir. Ayrıca her $\lambda\in\Lambda$ için $I_\lambda \subseteq A$ dır.

$\Rightarrow \bigcup_{\lambda\in\Lambda} I_\lambda \subseteq A \Rightarrow \sum_{\lambda\in\Lambda} I_\lambda \subseteq A$ dır.

$x\in A$ alalım. $x = r_1 + \dots + r_n$ ve $r_i \in I_{\lambda_i}$ o.ş. $\lambda_i\in\Lambda$ vardır.

$$x = r_1 + \dots + r_n \in \left(I_{\lambda_1} \cup \dots \cup I_{\lambda_n}\right) \subseteq \left(\bigcup_{\lambda\in\Lambda} I_\lambda\right) = \sum_{\lambda\in\Lambda} I_\lambda$$

$$\therefore A \subseteq \sum_{\lambda\in\Lambda} I_\lambda \Rightarrow \sum_{\lambda\in\Lambda} I_\lambda = A. \quad \square$$