$\bigcup_{\lambda\in\Lambda} I_\lambda$ kümesinin ürettiği ideale I_λ ideallerinin toplamı denir ve

$$\sum_{\lambda\in\Lambda} I_\lambda$$

biçiminde yazılır.

$$\left(\bigcup_{\lambda\in\Lambda} I_\lambda\right) = \sum_{\lambda\in\Lambda} I_\lambda$$

Λ kümesi sonlu ise $I_1,\dots,I_n$ ideallerinin toplamını kimi zaman $I_1+\dots+I_n$ şeklinde yazacağız.

Tanımdan dolayı ideallerin toplamının değişmeli ve birleşmeli olduğunu söyleyebiliriz.

$$A+(B+C) = A+(B\cup C)R = (A\cup(B\cup C)R) = (A\cup B\cup C)R$$

Benzer şekilde $(A+B)+C = (A\cup B\cup C)R$

<u>**6. Önerme.**</u> R bir halka ve $\{I_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ R nin ideallerinin bir ailesi olsun. O zaman

$$\sum_{\lambda\in\Lambda} I_\lambda = \left\{\sum_{i=1}^{n} r_i : n\in\mathbb{N},\ r_i\in I_{\lambda_i}\ \text{o.ş. } \lambda_i\in\Lambda \text{ var}\right\}$$

olur.

<u>Kanıt.</u> Eşitliğin sağ tarafına A diyelim. A'nın R'nin bir ideali olduğunu görmek zor değildir. Ayrıca her $\lambda\in\Lambda$ için $I_\lambda\subseteq A$ dır.

$$\Rightarrow \bigcup_{\lambda\in\Lambda} I_\lambda \subseteq A \Rightarrow \sum_{\lambda\in\Lambda} I_\lambda \subseteq A \text{ dır.}$$

$x\in A$ alalım. $x=r_1+\dots+r_n$ ve $r_i\in I_{\lambda_i}$ o.ş. $\lambda_i\in\Lambda$ vardır.

$$x=r_1+\dots+r_n \in (I_{\lambda_1}\cup\dots\cup I_{\lambda}) \subseteq \left(\bigcup_{\lambda\in\Lambda} I_\lambda\right) = \sum_{\lambda\in\Lambda} I_\lambda$$

$$\therefore\ A\subseteq \sum_{\lambda\in\Lambda} I_\lambda \Rightarrow \sum_{\lambda\in\Lambda} I_\lambda = A.$$

$\square$

Not. R bir halka ve $I_1, \ldots, I_n$ R nin birer ideali ise

$$I_1 + \cdots + I_n = \{ r_1 + \cdots + r_n : r_i \in I_i \ (i=1,\ldots,n) \}$$

Özel olarak I ve J gibi iki ideal için

$$I + J = \{ a+b : a \in I, \ b \in J \}$$

$h_1, \ldots, h_t \in R$ ise

$$(h_1, \ldots, h_t) = \{ r_1 h_1 + \cdots + r_t h_t : r_1, \ldots, r_t \in R \}$$

$$= (h_1) + \cdots + (h_t) = Rh_1 + \cdots + Rh_t$$

Tanım. R bir halka ve I, R'nin bir ideali olsun.

$$\sqrt{I} := \{ r \in R : r^n \in I \text{ o.ş. } n \in \mathbb{N} \text{ vardır} \}$$

kümesine I idealinin radikali denir.

7. Lemma. R bir halka ve I, R'nin bir ideali ise o zaman $\sqrt{I}$, R'nin I'yı içeren bir idealidir.

Kanıt. $\forall a \in I$ için $a \in \sqrt{I}$ olacağından $I \subseteq \sqrt{I}$ olur. $\sqrt{I} \neq \emptyset$.

$a, b \in \sqrt{I}$ olsun. O zaman $a^n, b^m \in I$ o.ş. $n, m \in \mathbb{N}$ vardır.

$$(a+b)^{n+m} = a^{n+m} + \binom{n+m}{1} a^{n+m-1} b + \cdots + \binom{n+m}{k} a^{n+m-k} b^k + \cdots + b^{n+m}$$

$k \geq m$ ise $k-m \geq 0$ ve böylece $b^k = \underbrace{b^m}_{} b^{k-m} \in I$.

$k < m$ ise $m-k > 0$ ve böylece $a^{n+m-k} = a^n a^{m-k} \in I$

Buna göre her durumda $\binom{n+m}{k} a^{n+m-k} b^k \in I$ elde edilir.
Dolayısıyla $(a+b)^{n+m} \in I$ ve buradan da $a+b \in \sqrt{I}$ elde edilir.

$r \in R$ ve $a \in \sqrt{I}$ alalım. $a^n \in I$ o.ş. $n \in \mathbb{N}$ vardır.

$$(ra)^n = r^n a^n \in I \Rightarrow ra \in \sqrt{I}.$$

8. Önerme. R bir halka ve I, J R'nin birer ideali olsun.

(i) Eğer $I \subseteq J$ ise $\sqrt{I} \subseteq \sqrt{J}$.

(ii) $\sqrt{I+J} = \sqrt{\sqrt{I}+\sqrt{J}}$

(iii) $\sqrt{\sqrt{I}} = \sqrt{I}$

(iv) $\sqrt{I} = R \Leftrightarrow I = R$

(v) Eğer $\sqrt{I} + \sqrt{J} = R$ ise $I + J = R$.

Kanıt. (i) $I \subseteq J$ olsun. $a \in \sqrt{I} \Rightarrow a^n \in I$ o.ş. $n \in \mathbb{N}$ var.

$\Rightarrow a^n \in J \Rightarrow a \in \sqrt{J}$.

$\therefore \sqrt{I} \subseteq \sqrt{J}$.

(ii) $I \subseteq \sqrt{I}$, $J \subseteq \sqrt{J} \Rightarrow I + J \subseteq \sqrt{I} + \sqrt{J} \Rightarrow \sqrt{I+J} \subseteq \sqrt{\sqrt{I}+\sqrt{J}}$

$a \in \sqrt{\sqrt{I}+\sqrt{J}}$ olsun. $a^n \in \sqrt{I}+\sqrt{J}$ o.ş. $n \in \mathbb{N}$ vardır. $a^n = x+y$ o.ş.
$x \in \sqrt{I}$ ve $y \in \sqrt{J}$ vardır. $I \subseteq I+J$ ve $J \subseteq I+J$ old.
$\sqrt{I} \subseteq \sqrt{I+J}$ ve $\sqrt{J} \subseteq \sqrt{I+J}$ olur. $a^n = x+y \in \sqrt{I}+\sqrt{J} \subseteq \sqrt{I+J}$
$\Rightarrow (a^n)^m \in I+J$ o.ş. $m \in \mathbb{N}$ var. $\Rightarrow a^{nm} \in I+J \Rightarrow a \in \sqrt{I+J}$

$\therefore \sqrt{\sqrt{I}+\sqrt{J}} \subseteq \sqrt{I+J}$

$\therefore \sqrt{\sqrt{I}+\sqrt{J}} = \sqrt{I+J}$

(iii) $I \subseteq \sqrt{I}$ old. $\sqrt{I} \subseteq \sqrt{\sqrt{I}}$ olur. $a \in \sqrt{\sqrt{I}}$ olsun. $a^n \in \sqrt{I}$ o.ş $n \in \mathbb{N}$