Buna göre her durumda $\binom{n+m}{k} a^{n+m-k} b^k \in I$ elde edilir.
Dolayısıyla $(a+b)^{n+m} \in I$ ve buradan da $a+b \in \sqrt{I}$ elde edilir.

$r \in R$ ve $a \in \sqrt{I}$ alalım. $a^n \in I$ o.ş. $n \in \mathbb{N}$ vardır.

$$(ra)^n = r^n a^n \in I \Rightarrow ra \in \sqrt{I}.$$

8. Önerme. R bir halka ve I, J R'nin birer ideali olsun.

(i) Eğer $I \subseteq J$ ise $\sqrt{I} \subseteq \sqrt{J}$.

(ii) $\sqrt{I+J} = \sqrt{\sqrt{I}+\sqrt{J}}$

(iii) $\sqrt{\sqrt{I}} = \sqrt{I}$

(iv) $\sqrt{I} = R \Leftrightarrow I = R$

(v) Eğer $\sqrt{I} + \sqrt{J} = R$ ise $I + J = R$.

Kanıt. (i) $I \subseteq J$ olsun. $a \in \sqrt{I} \Rightarrow a^n \in I$ o.ş. $n \in \mathbb{N}$ var.

$\Rightarrow a^n \in J \Rightarrow a \in \sqrt{J}$.

$\therefore \sqrt{I} \subseteq \sqrt{J}$.

(ii) $I \subseteq \sqrt{I}$, $J \subseteq \sqrt{J} \Rightarrow I + J \subseteq \sqrt{I} + \sqrt{J} \Rightarrow \sqrt{I+J} \subseteq \sqrt{\sqrt{I}+\sqrt{J}}$

$a \in \sqrt{\sqrt{I}+\sqrt{J}}$ olsun. $a^n \in \sqrt{I} + \sqrt{J}$ o.ş. $n \in \mathbb{N}$ vardır. $a^n = x + y$ o.ş.
$x \in \sqrt{I}$ ve $y \in \sqrt{J}$ vardır. $I \subseteq I+J$ ve $J \subseteq I + J$ old.
$\sqrt{I} \subseteq \sqrt{I+J}$ ve $\sqrt{J} \subseteq \sqrt{I+J}$ olur. $a^n = x + y \in \sqrt{I} + \sqrt{J} \subseteq \sqrt{I+J}$
$\Rightarrow (a^n)^m \in I + J$ o.ş. $m \in \mathbb{N}$ var. $\Rightarrow a^{nm} \in I + J \Rightarrow a \in \sqrt{I+J}$

$\therefore \sqrt{\sqrt{I}+\sqrt{J}} \subseteq \sqrt{I+J}$

$\therefore \sqrt{\sqrt{I}+\sqrt{J}} = \sqrt{I+J}$

(iii) $I \subseteq \sqrt{I}$ old. $\sqrt{I} \subseteq \sqrt{\sqrt{I}}$ olur. $a \in \sqrt{\sqrt{I}}$ olsun. $a^n \in \sqrt{I}$ o.ş $n \in \mathbb{N}$

var. $\Rightarrow (a^n)^m \in I$ o.ş. $m \in \mathbb{N}$ var. $\Rightarrow a^{nm} \in I \Rightarrow a \in \sqrt{I}$.

$\therefore \sqrt{\sqrt{I}} \subseteq \sqrt{I}$.

$\therefore \sqrt{\sqrt{I}} = \sqrt{I}$.

(iv) $I \subseteq \sqrt{I}$ old. $I = R$ ise $\sqrt{I} = R$ olur. Şimdi $\sqrt{I} = R$ olsun. O zaman $1 \in \sqrt{I}$ olur. $\Rightarrow 1 \in I \Rightarrow I = R$.

(v) (ii) ve (iv) 'den dolayı açıktır.

(b) Çarpma İşlemi

R bir halka ve I, J, R'nin birer ideali olsun.

$$I + J = \{a+b : a \in I, b \in J\}$$

$$IJ \neq \underbrace{\{ab : a \in I, b \in J\}}$$

ideal bile olmayabilir. (toplamsal kapalılık genellikle sağlanmaz.)

$\{ab : a \in I \text{ ve } b \in J\}$ kümesi tarafından üretilen ideale I ve J ideallerinin çarpımı denir ve IJ şeklinde gösterilir. Buna göre

$$IJ = \left\{ \sum_{i=1}^{n} a_i b_i : n \in \mathbb{N}, a_i \in I, b_i \in J \ (1 \le i \le n) \right\}$$

şeklinde yazılabilir.

$$IJ = JI \subseteq I \cap J$$

$(IJ)K$ ve $I(JK)$ ideallerinin her ikisi de

$$\{abc : a \in I, b \in J, c \in K\}$$

kümesi tarafından üretileceğinden $(IJ)K = I(JK) := IJK$ yazılabilir. Daha genel olarak $I_1, \ldots, I_n$ idealleri için

$$\prod_{i=1}^{n} I_i = I_1 \ldots I_n$$

ideali $\{a_1 \ldots a_n : a_i \in I_i \ (1 \le i \le n)\}$ kümesi tarafından üretilir. Dolayısıyla bu çarpımın tipik bir elemanı

$$a_{11} \ldots a_{1n} + a_{21} \ldots a_{2n} + \cdots + a_{m1} \ldots a_{mn}$$

$(a_{ij} \in I_i)$ biçimindedir.

$$I_1 = I_2 = \ldots = I_n = I \Rightarrow \prod_{i=1}^{n} I_i := I^n$$

Buna göre I^n idealinin genel bir elemanı

$$a_{11} \ldots a_{1n} + \cdots + a_{m1} \ldots a_{mn} \quad (a_{ij} \in I)$$

şeklindedir

$$I \supseteq I^2 \supseteq I^3 \supseteq \ldots \supseteq I^n \supseteq I^{n+1} \supseteq \ldots$$

Örnek. $R[X_1, \ldots, X_n]$ polinom halkasının $(X_1, \ldots, X_n)^m$ idealini belirleyelim.

$m=2$ alalım.

$(X_1, \ldots, X_n)^2$ ideali

$$(X_1 f_1 + \cdots + X_n f_n)(X_1 g_1 + \cdots + X_n g_n)$$

$(f_i, g_i \in R[X_1, \ldots, X_n])$ şeklindeki çarpımların kümesi tarafından