kümesi tarafından üretileceğinden $(IJ)K = I(JK) := IJK$ yazılabilir. Daha genel olarak $I_1, \ldots, I_n$ idealleri için

$$\prod_{i=1}^{n} I_i = I_1 \ldots I_n$$

ideali $\{a_1 \ldots a_n : a_i \in I_i \ (1 \leq i \leq n)\}$ kümesi tarafından üretilir. Dolayısıyla bu çarpımın tipik bir elemanı

$$a_{11} \ldots a_{1n} + a_{21} \ldots a_{2n} + \cdots + a_{m1} \ldots a_{mn}$$

$(a_{ij} \in I_i)$ biçimindedir.

$$I_1 = I_2 = \ldots = I_n = I \Rightarrow \prod_{i=1}^{n} I_i := I^n$$

Buna göre I^n idealinin genel bir elemanı

$$a_{11} \ldots a_{1n} + \cdots + a_{m1} \ldots a_{mn} \quad (a_{ij} \in I)$$

şeklindedir

$$I \supseteq I^2 \supseteq I^3 \supseteq \ldots \supseteq I^n \supseteq I^{n+1} \supseteq \ldots$$

Örnek. $R[x_1, \ldots, x_n]$ polinom halkasının $(x_1, \ldots, x_n)^m$ idealini belirleyelim.

$m=2$ alalım.

$(x_1, \ldots, x_n)^2$ ideali

$$(x_1 f_1 + \cdots + x_n f_n)(x_1 g_1 + \cdots + x_n g_n)$$

$(f_i, g_i \in R[x_1, \ldots, x_n])$ şeklindeki çarpımların kümesi tarafından üretilir. Böyle bir çarpım $X_i X_j$ $(1 \leq i,j \leq n)$ terimlerinin bir doğrusal kombinasyonu olacaktır. Dolayısıyla $(X_1, \dots X_n)^2$ ideali $\{X_i X_j : 1 \leq i,j \leq n\}$ kümesi tarafından üretilir. Tümevarımla kolayca görülebilir ki $(X_1, \dots, X_n)^m$ ideali

$$\{X_{i_1} \dots X_{i_m} : 1 \leq i_1, \dots, i_m \leq n\}$$

kümesi tarafından üretilir.

9. Önerme. R bir halka ve I, J, R'nin birer ideali ise o zaman

$$\sqrt{IJ} = \sqrt{I \cap J} = \sqrt{I} \cap \sqrt{J}$$

olur.

Kanıt. $IJ \subseteq I \cap J$ old. $\sqrt{IJ} \subseteq \sqrt{I \cap J}$. Ayrıca $I \cap J \subseteq I$ ve $I \cap J \subseteq J$ old. $\sqrt{I \cap J} \subseteq \sqrt{I} \cap \sqrt{J}$ olur. Dolayısıyla

$$\sqrt{IJ} \subseteq \sqrt{I \cap J} \subseteq \sqrt{I} \cap \sqrt{J}$$

elde edilir.

$x \in \sqrt{I} \cap \sqrt{J}$ olsun. $x^n \in I$ ve $x^m \in J$ o.ş. $n, m \in \mathbb{N}$ vardır.

$\Rightarrow$ $x^{n+m} = x^n x^m \in IJ \Rightarrow x \in \sqrt{IJ} \Rightarrow$

$$\sqrt{IJ} = \sqrt{I \cap J} = \sqrt{I} \cap \sqrt{J}$$

elde edilir.

(c) Kolon İdeali ve Sıfırlayan

R bir halka $a\in R$ ve I, R'nin bir ideali olsun.

(a) $$I = \left\{\sum_{i=1}^{n} r_i a b_i : r_i\in R,\ b_i\in I\ (1\leq i\leq n)\right\}$$
$$= \left\{a\sum_{i=1}^{n} r_i b_i : r_i\in R,\ b_i\in I\right\} = \left\{ab : b\in I\right\} := aI$$

J, R'nin bir ideali olmak üzere

$$(I:J) := \{r\in R : rJ\subseteq I\}$$

olsun.

<u>İddia:</u> $(I:J)$ kümesi R'nin bir idealidir.

$0J = 0 \subseteq I$ old. $0\in(I:J) \Rightarrow (I:J)\neq\emptyset$.

$a, b\in(I:J)$ olsun.

$j\in J$ alalım. $(a+b)j = \underbrace{aj}_{I} + \underbrace{bj}_{I} \in I \Rightarrow (a+b)J\subseteq I$

$\Rightarrow a+b\in(I:J)$.

$a\in(I:J)$ ve $r\in R$ alalım.

$(ra)J = r(aJ)\subseteq rI\subseteq I$ old. $ra\in(I:J)$.

$(I:J)$ idealine bir <u>kolon ideali</u> denir.

Özel olarak $I=0$ alınırsa $(0:J)$ kolon idealine J'nin R içindeki <u>sıfırlayanı</u> (annihilator) denir. $(0:J)$ bazen $\mathrm{Ann}_R(J)$ şeklinde de gösterilir.