(c) Kolon İdeali ve Sıfırlayan

R bir halka $a \in R$ ve I, R'nin bir ideali olsun.

(a) $I = \left\{ \sum_{i=1}^{n} r_i a b_i : r_i \in R,\ b_i \in I\ (1 \leq i \leq n) \right\}$

$$= \left\{ a \sum_{i=1}^{n} r_i b_i : r_i \in R,\ b_i \in I \right\} = \left\{ ab : b \in I \right\} := aI$$

J, R'nin bir ideali olmak üzere

$$(I : J) := \left\{ r \in R : rJ \subseteq I \right\}$$

olsun.

<u>İddia:</u> $(I:J)$ kümesi R'nin bir idealidir.

$0J = 0 \subseteq I$ old. $0 \in (I:J) \Rightarrow (I:J) \neq \emptyset$.

$a, b \in (I:J)$ olsun.

$j \in J$ alalım. $(a+b)j = \underbrace{aj}_{I} + \underbrace{bj}_{I} \in I \Rightarrow (a+b)J \subseteq I$

$\Rightarrow a+b \in (I:J)$.

$a \in (I:J)$ ve $r \in R$ alalım.

$(ra)J = r(aJ) \subseteq rI \subseteq I$ old. $ra \in (I:J)$.

$(I:J)$ idealine bir <u>kolon ideali</u> denir.

Özel olarak $I = 0$ alınırsa $(0:J)$ kolon idealine J'nin R içindeki <u>sıfırlayanı</u> (annihilator) denir. $(0:J)$ bazen $\mathrm{Ann}_R(J)$ şeklinde de gösterilir.

$$(0:J)=\{r\in R \mid rJ=0\}$$

$$(0:J)J=0.$$

$$(I:J)J\subseteq I$$

$\phi\neq H\subseteq R$ olsun. O zaman

$$(I:(H))=\{r\in R \mid r(H)\subseteq I\}$$

$$=\{r\in R \mid rh\in I, \forall h\in H \text{ için}\}=(I:H)$$

$x\in(H) \Rightarrow x=\sum_{i=1}^{n} r_i h_i$ o.ş. $n\in\mathbb{N}$, $r_i\in R$ ve $h_i\in H$ var.

$$rx=r\sum_{i=1}^{n} r_i h_i=\sum_{i=1}^{n} r_i\underbrace{(rh_i)}_{\in I}\in I.$$

$H=\{h\}$ olduğunda $(0:H)=(0:h)=\{r\in R \mid rh=0\}=\mathrm{Ann}_R(h)$

10. Önerme. R bir halka, I, J, K R'nin birer ideali ve $\{I_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ R'nin ideallerinin bir ailesi olsun. Buna göre aşağıdakiler sağlanır:

(i) $((I:J):K)=(I:JK)=((I:K):J)$

(ii) $\left(\bigcap_{\lambda\in\Lambda} I_\lambda : K\right)=\bigcap_{\lambda\in\Lambda}(I_\lambda:K)$

(iii) $\left(J:\sum_{\lambda\in\Lambda} I_\lambda\right)=\bigcap_{\lambda\in\Lambda}(J:I_\lambda)$

Kanıt.

$$I_1\subseteq I_2 \Rightarrow (I_1:J)\subseteq(I_2:J)$$

$$J_1\subseteq J_2 \Rightarrow (I:J_1)\supseteq(I:J_2)$$

(ii) $r \in ((I:J):K) \Leftrightarrow rK \subseteq (I:J)$

$\Leftrightarrow rKJ \subseteq I$

$\Leftrightarrow r \in (I:KJ)$

$\therefore ((I:J):K) = (I:JK).$

Benzer şekilde diğer eşitlik gösterilebilir.

(ii) $\bigcap_{\lambda\in\Lambda} I_\lambda \subseteq I_\lambda \quad (\forall \lambda \in \Lambda)$ old.

$\left(\bigcap_{\lambda\in\Lambda} I_\lambda : K\right) \subseteq (I_\lambda : K) \quad (\forall\lambda\in\Lambda)$

$\Rightarrow \left(\bigcap_{\lambda\in\Lambda} I_\lambda : K\right) \subseteq \bigcap_{\lambda\in\Lambda} (I_\lambda : K)$

$r \in \bigcap_{\lambda\in\Lambda} (I_\lambda : K) \Rightarrow rK \subseteq I_\lambda \quad (\forall\lambda\in\Lambda)$

$\Rightarrow rK \subseteq \bigcap_{\lambda\in\Lambda} I_\lambda$

$\Rightarrow r \in \left(\bigcap_{\lambda\in\Lambda} I_\lambda : K\right)$

$\therefore \left(\bigcap_{\lambda\in\Lambda} I_\lambda : K\right) = \bigcap_{\lambda\in\Lambda} (I_\lambda : K)$

(iii) $I_\lambda \subseteq \sum_{\lambda\in\Lambda} I_\lambda \quad (\forall\lambda\in\Lambda)$

$(J : I_\lambda) \supseteq \left(J : \sum_{\lambda\in\Lambda} I_\lambda\right) \quad (\forall\lambda\in\Lambda)$