(ii) $r \in ((I:J):K) \Leftrightarrow rK \subseteq (I:J)$

$\Leftrightarrow rKJ \subseteq I$

$\Leftrightarrow r \in (I:KJ)$

$\therefore ((I:J):K) = (I:JK).$

Benzer şekilde diğer eşitlik gösterilebilir.

(iii) $\bigcap_{\lambda\in\Lambda} I_\lambda \subseteq I_\lambda \quad (\forall \lambda \in \Lambda)$ old.

$(\bigcap_{\lambda\in\Lambda} I_\lambda : K) \subseteq (I_\lambda : K) \quad (\forall \lambda \in \Lambda)$

$\Rightarrow (\bigcap_{\lambda\in\Lambda} I_\lambda : K) \subseteq \bigcap_{\lambda\in\Lambda} (I_\lambda : K)$

$r \in \bigcap_{\lambda\in\Lambda} (I_\lambda : K) \Rightarrow rK \subseteq I_\lambda \quad (\forall \lambda \in \Lambda)$

$\Rightarrow rK \subseteq \bigcap_{\lambda\in\Lambda} I_\lambda$

$\Rightarrow r \in (\bigcap_{\lambda\in\Lambda} I_\lambda : K)$

$\therefore (\bigcap_{\lambda\in\Lambda} I_\lambda : K) = \bigcap_{\lambda\in\Lambda} (I_\lambda : K)$

(iii) $I_\lambda \subseteq \sum_{\lambda\in\Lambda} I_\lambda \quad (\forall \lambda \in \Lambda)$

$(J : I_\lambda) \supseteq (J : \sum_{\lambda\in\Lambda} I_\lambda) \quad (\forall \lambda \in \Lambda)$

$$\Rightarrow \bigcap_{\lambda\in\Lambda} (J : I_\lambda) \supseteq (J : \sum_{\lambda\in\Lambda} I_\lambda)$$

$r \in \bigcap_{\lambda\in\Lambda} (J : I_\lambda)$ olsun. $\quad r\left(\sum_{\lambda\in\Lambda} I_\lambda\right) \subseteq J$?

$\forall \lambda\in\Lambda$ için $rI_\lambda \subseteq J$. $\Rightarrow \forall x \in \bigcup_{\lambda\in\Lambda} I_\lambda$ için $rx \in J$.

$\sum_{\lambda\in\Lambda} I_\lambda = \left(\bigcup_{\lambda\in\Lambda} I_\lambda\right)$ ve $(J ; \sum_{\lambda\in\Lambda} I_\lambda) = (J : \bigcup_{\lambda\in\Lambda} I_\lambda)$

olduğundan sonuç elde edilir. $\square$

11. Teorem Bir Öklid bölgesinin her ideali bir temel idealdir.

Kanıt. R bir Öklid bölgesi ve $\partial : R\setminus\{0\} \to \mathbb{N}_0$ derece fonk. olsun.

- $a, b \in R\setminus\{0\}$ ve $a \mid b \Rightarrow \partial(a) \le \partial(b)$
- $a, b \in R$ ve $b \neq 0$ ise

$$a = bq + r \text{ ve } r = 0 \text{ ya da } r \neq 0 \text{ ve } \partial(r) < \partial(b)$$

o.ş. $q, r \in R$ vardır.

$I \trianglelefteq R$ olsun. $I = 0$ ise $I = (0)$ old. I bir temel idealdir. $I \neq 0$.

$$\{\partial(a) : a \in I, a \neq 0\}$$

kümesi doğal sayıların boştan farklı bir alt kümesidir ve dolayısıyla en küçük elemanı vardır. Bu eleman $h \in I\setminus\{0\}$ için $\partial(h)$ olsun. $h \in I$ old. $hR \subseteq I$. $a \in I$ alalım. Bölme algoritmasından

$$a = hq + r \quad \text{ve} \quad r = 0 \text{ ya da } r \neq 0 \text{ ve } \partial(r) < \partial(h)$$

o.ş. $q, r \in R$ bulunabilir.

$$r = a - hq \in I$$

olduğunda h'ın seçimi gereğince $r = 0$ olmak zorundadır.
O zaman $a = hq \in hR$ olur.

$$\therefore \; I = hR.$$

$\square$

12. Örnek. R bir Öklid bölgesi ve $a, b \in R \setminus \{0\}$ için $h = (a, b)$ olsun.

$$(a) + (b), \quad (a) \cap (b), \quad (a)(b) \quad \text{ve} \quad (aR : b)$$

ideallerinin üreteçlerini bulalım.

$h | a$ ve $h | b$ old. $(a) \subseteq (h)$ ve $(b) \subseteq (h)$ olur. Dolayısıyla

$$(a) + (b) \subseteq (h)$$

bulunur. Öte yandan

$$h = (a, b) = au + bv \in (a) + (b)$$

o.ş. $u, v \in R$ elemanları bulunabileceğinden $(h) \subseteq (a) + (b)$ elde edilir.
Böylece

$$\boxed{(a) + (b) = (h)}$$

olur.

$k = [a, b]$ diyelim. $a | k$ ve $b | k$ olacağından $k \in (a) \cap (b)$ olur. Böylece $(k) \subseteq (a) \cap (b)$ bulunur. Diğer taraftan $x \in (a) \cap (b)$ alınırsa $a | x$ ve $b | x$ olacağından (ekok tanımından) $k | x$ olur. Buna göre $x \in (k)$ ve böylece $(a) \cap (b) \subseteq (k)$ elde edilir.