$$a = hq + r \quad \text{ve} \quad r = 0 \text{ ya da } r \neq 0 \text{ ve } \partial(r) < \partial(h)$$

o.ş. $q, r \in R$ bulunabilir.

$$r = a - hq \in I$$

olduğunda h'ın seçimi gereğince $r = 0$ olmak zorundadır.
O zaman $a = hq \in hR$ olur.

$$\therefore \ I = hR.$$

$\square$

12. Örnek. R bir Öklid bölgesi ve $a, b \in R \setminus \{0\}$ için $h = (a,b)$ olsun.

$$(a) + (b), \quad (a) \cap (b), \quad (a)(b) \quad \text{ve} \quad (aR : b)$$

ideallerinin üreteçlerini bulalım.

$h \mid a$ ve $h \mid b$ old. $(a) \subseteq (h)$ ve $(b) \subseteq (h)$ olur. Dolayısıyla

$$(a) + (b) \subseteq (h)$$

bulunur. Öte yandan

$$h = (a,b) = au + bv \in (a) + (b)$$

o.ş. $u, v \in R$ elemanları bulunabileceğinden $(h) \subseteq (a) + (b)$ elde edilir.
Böylece

$$\boxed{(a) + (b) = (h)}$$

olur.

$k = [a,b]$ diyelim. $a \mid k$ ve $b \mid k$ olacağından $k \in (a) \cap (b)$ olur.
Böylece $(k) \subseteq (a) \cap (b)$ bulunur. Diğer taraftan $x \in (a) \cap (b)$ alınırsa $a \mid x$ ve $b \mid x$ olacağından (ekok tanımından) $k \mid x$ olur.
Buna göre $x \in (k)$ ve böylece $(a) \cap (b) \subseteq (k)$ elde edilir.

Dolayısıyla

$$\boxed{(a) \cap (b) = (k)}$$

yazabiliriz.

$(a)(b) = (ab)$ olduğunu görmek zor değildir.

$a = hk$ ve $b = hl$ olsun.

$bk = hlk = (hk)l = al \in aR$ old. $k \in (aR : b)$ ve buradan da $(k) \subseteq (aR : b)$ elde edilir. Diğer taraftan $x \in (aR : b)$ ise o zaman $xb \in aR$ olur. $xb = ac$ o.ş. $c \in R$ vardır

$$x\cancel{h}l = \cancel{h}kc \Rightarrow xl = kc$$

$(k, l) = 1$ olduğundan $ku + lv = 1$ o.ş. $u, v \in R$ vardır.

Bu durumda $x = k(ux) + (xl)v = k(ux) + kcv = k(ux + cv) \in kR$ ve böylece $(aR : b) \subseteq (k)$ olur.

Dolayısıyla

$$\boxed{(aR : b) = \left(\frac{a}{h}\right)}$$

bulunur.

<u>Tanım.</u> Her ideali temel ideal olan tamlık bölgelerine temel ideal bölgeleri (TİB) denir.

<u>Ör:</u> $\mathbb{Z}$, K cisim o.ü. $K[X]$, $\mathbb{Z}[i]$

[İdeallerin Eşlemesi Teoremi]

12. Teorem. R bir halka ve I, R'nin bir ideali olsun.

(i) Eğer J, R'nin I'yı içeren bir ideali ise o zaman

$$J/I = \{a+I : a \in J\}$$

R/I halkasının bir idealidir. Ayrıca bir $r \in R$ için $r+I \in J/I$ ancak ve ancak $r \in J$ dir.

(ii) $\mathcal{J}$, R/I halkasının bir ideali olsun. O zaman

$$K = \{r \in R : r+I \in \mathcal{J}\}$$

R'nin I'yı içeren bir idealidir ve

$$\mathcal{J} = K/I$$

yazılabilir. Ayrıca K bu eşitliği sağlayan ve I'yı içeren R'nin tek idealidir.

Kanıt.

(i) $J \trianglelefteq R$ old. $0 \in J$ ve böylece $0_{R/I} = I = 0+I \in J/I$ olur. $J/I \neq \emptyset$.

$x, y \in J/I$ alalım. Tanımdan $x = a+I$, $y = b+I$ o.ş. $a, b \in J$ vardır.

$$x+y = (a+I)+(b+I) = \underbrace{(a+b)}_{\in J}+I \in J/I$$

$r+I \in R/I$ seçelim.

$$(r+I)x = (r+I)(a+I) = \underbrace{ra}_{\in J}+I \in J/I$$

$\therefore J/I \trianglelefteq R/I$.