[İdeallerin Eşlemesi Teoremi]

12. Teorem. R bir halka ve I, R'nin bir ideali olsun.

(i) Eğer J, R'nin I'yı içeren bir ideali ise o zaman

$$J/I = \{a+I : a \in J\}$$

R/I halkasının bir idealidir. Ayrıca bir $r \in R$ için $r+I \in J/I$ ancak ve ancak $r \in J$ dir.

(ii) $\mathcal{J}$, R/I halkasının bir ideali olsun. O zaman

$$K = \{r \in R : r+I \in \mathcal{J}\}$$

R'nin I'yı içeren bir idealidir ve

$$\mathcal{J} = K/I$$

yazılabilir. Ayrıca K bu eşitliği sağlayan ve I'yı içeren R'nin tek idealidir.

Kanıt.

(i) $J \trianglelefteq R$ old. $0 \in J$ ve böylece $0_{R/I} = I = 0 + I \in J/I$ olur. $J/I \neq \emptyset$.

$x, y \in J/I$ alalım. Tanımdan $x = a+I$, $y = b+I$ o.ş. $a, b \in J$ vardır.

$$x+y = (a+I)+(b+I) = \underbrace{(a+b)}_{\in J}+I \in J/I$$

$r+I \in R/I$ seçelim.

$$(r+I)x = (r+I)(a+I) = \underbrace{ra}_{\in J}+I \in J/I$$

$$\therefore J/I \trianglelefteq R/I.$$

Şimdi bir $r \in R$ için $r+I \in J/I$ olsun. $r+I = a+I$ o.ş. $a \in J$ vardır. Öyleyse $r-a \in I \subseteq J$ olacağından $r \in J$ bulunur.

(ii) $\mathcal{J} \trianglelefteq R/I$ ve $K = \{ r \in R : r+I \in \mathcal{J} \}$ olsun. $I \subseteq K$ olduğu açıktır. $a, b \in K$ ve $r \in R$ olsun.

$$(a+b)+I = \underbrace{(a+I)}_{\mathcal{J}} + \underbrace{(b+I)}_{\mathcal{J}} \in \mathcal{J},$$

$$ra+I = (r+I)\underbrace{(a+I)}_{\mathcal{J}} \in \mathcal{J}$$

olduğundan $a+b, ra \in K$ olur. Yani $K \trianglelefteq R$ dir.

$x \in K/I$ olsun. $x = a+I$ o.ş. $a \in K$ vardır. O zaman K'nın tanımından $x = a+I \in \mathcal{J}$ ve böylece $K/I \subseteq \mathcal{J}$ olur.
Şimdi $x \in \mathcal{J}$ alalım. $x = a+I$ olsun. Yine K'nın tanımından $a \in K$ dır. Bu durumda $x = a+I \in K/I$ ve böylece $\mathcal{J} \subseteq K/I$.

$\therefore \mathcal{J} = K/I$.

L, R'nin I'yı içeren bir ideali olmak üzere $\mathcal{J} = L/I$ olsun.

$l \in L$ seçelim. $l+I \in L/I = \mathcal{J} = K/I$ olur. (i)'in son cümlesinden $l \in K$ bulunur. Yani $L \subseteq K$ dır. Benzer şekilde $K \subseteq L$ elde edilebilir. Böylece $K = L$ bulunur.

13. Önerme R bir halka, I, R'nin bir ideali, J ve K ise R'nin I'yı içeren idealleri olsun. $a_1, \ldots, a_n \in R$ olsun.

(i) $I/I = 0_{R/I} = \{0_{R/I}\}$

(ii) $J/I + K/I = (J+K)/I$

(iii) $(J/I)(K/I) = (JK+I)/I$

(iv) $J/I \cap K/I = (J \cap K)/I$

(v) $(J/I)^n = (J^n + I)/I$

(vi) $(J/I :_{R/I} K/I) = (J :_R K)/I$

(vii) $\sum_{i=1}^{n} (R/I)[a_i + I] = \left(\sum_{i=1}^{n} Ra_i\right) + I \Big/ I$

Özel olarak $I \subseteq \sum_{i=1}^{n} Ra_i$ ise o zaman

$$\sum_{i=1}^{n} Ra_i \Big/ I = \sum_{i=1}^{n} (R/I)[a_i + I]$$

elde edilir. Yani K R'nin I'yı içeren sonlu üreteçli bir ideali ise o zaman K/I ideali de R/I halkasının bir sonlu üreteçli idealidir.

Kanıt. (vi) $I \subseteq J \subseteq (J:K) \Rightarrow (J:K)/I \trianglelefteq R/I$.

$$(J/I : K/I) = \{a+I \in R/I : (a+I)(K/I) \subseteq J/I\}$$