13. Önerme R bir halka, I, R'nin bir ideali, J ve K ise R'nin I'yı içeren idealleri olsun $a_1, \ldots, a_n \in R$ olsun.

(i) $I/I = 0_{R/I} = \{0_{R/I}\}$

(ii) $J/I + K/I = (J+K)/I$

(iii) $(J/I)(K/I) = (JK+I)/I$

(iv) $J/I \cap K/I = (J \cap K)/I$

(v) $(J/I)^n = (J^n + I)/I$

(vi) $(J/I :_{R/I} K/I) = (J :_R K)/I$

(vii) $\sum_{i=1}^{n} (R/I)[a_i + I] = \left(\sum_{i=1}^{n} Ra_i\right) + I \Big/ I$

Özel olarak $I \subseteq \sum_{i=1}^{n} Ra_i$ ise o zaman

$$\sum_{i=1}^{n} Ra_i \Big/ I = \sum_{i=1}^{n} (R/I)[a_i + I]$$

elde edilir. Yani K R'nin I'yı içeren sonlu üreteçli bir ideali ise o zaman K/I ideali de R/I halkasının bir sonlu üreteçli idealidir.

Kanıt. (vi) $I \subseteq J \subseteq (J:K) \Rightarrow (J:K)/I \trianglelefteq R/I$.

$$(J/I : K/I) = \{a + I \in R/I : (a+I)(K/I) \subseteq J/I\}$$

$$= \{a+I \in R/_I : (a+I)(k+I) \in J/_I, \forall k \in K\}$$

$$= \{a+I \in R/_I : ak \in J, \forall k \in K\}$$

$$= \{a+I \in R/_I : a \in (J:K)\}$$

$$= (J:K)/_I$$

(vii) $x \in \sum_{i=1}^{n} (R/_I)(a_i+I)$ olsun.

$$x = \sum_{i=1}^{n} (r_i+I)(a_i+I)$$

o.s. $r_i \in R$ vardır.

$$x = \sum_{i=1}^{n} (r_i a_i + I) = \underbrace{\left(\sum_{i=1}^{n} r_i a_i\right)}_{\sum_{i=1}^{n} Ra_i} + I \in \frac{\left(\sum_{i=1}^{n} Ra_i\right) + I}{I}$$

$$\therefore \sum_{i=1}^{n} (R/_I)(a_i+I) \subseteq \frac{\left(\sum_{i=1}^{n} Ra_i\right)+I}{I}.$$

Ters kapsam benzer şekilde gösterilebilir.

<u>Not.</u> R bir halka ve $I \trianglelefteq R$ olsun. $\mathcal{I}_R$ ve $\mathcal{I}_{R/_I}$ ile sırasıyla R ve $R/_I$ halkalarının tüm ideallerinin kümelerini gösterelim. Önerme 12'den

$$\{J \in \mathcal{I}_R : J \supseteq I\} \longrightarrow \mathcal{I}_{R/_I}$$

$$J \longmapsto J/_I$$

şeklinde bir 1-1 eşleme elde edilir. Üstelik bu 1-1 eşleme sıra koruyan bir eşlemedir. Yani $J_1 \supseteq J_2 \supseteq I \Leftrightarrow J_1/I \supseteq J_2/I$.

14. Teorem. R bir halka ve I, J R'nin iki ideali olmak üzere $J \supseteq I$ olsun. Buna göre

$$\psi : R/I \longrightarrow R/J$$
$$r+I \longmapsto r+J$$

şeklinde tanımlanan dönüşüm çekirdeği J/I olan bir halka epimorfizmasıdır. Böylece 1. İzomorfizma Teoremi'nden

$$\frac{R/I}{J/I} \cong R/J$$

Kanıt. İyi tanımlılık: $r_1, r_2 \in R$ olmak üzere $r_1+I = r_2+I$ olsun. $r_1 - r_2 \in I \subseteq J \Rightarrow \underbrace{r_1+J}_{\psi(r_1+I)} = \underbrace{r_2+J}_{\psi(r_2+I)}$

Homomorfizma: $r_1, r_2 \in R$ olsun.

$$\psi((r_1+I)+(r_2+I)) = \psi(r_1+r_2+I) = r_1+r_2+J = (r_1+J)+(r_2+J)$$
$$= \psi(r_1+I)+\psi(r_2+I)$$

$\psi((r_1+I).(r_2+I)) = \psi(r_1+I).\psi(r_2+I)$ olduğu da benzer şekilde görülebilir.

Örtenlik: Açıktır.

$x \in J/I$ olsun. $x = r+I$ o.ş. $r \in J$ vardır. $\psi(x) = \psi(r+I) =$