koruyan bir eşlemedir. Yani $J_1 \supseteq J_2 \supseteq I \Leftrightarrow J_1/I \supseteq J_2/I$.

14. Teorem. R bir halka ve I, J R'nin iki ideali olmak üzere $J \supseteq I$ olsun. Buna göre

$$\begin{aligned} \psi : R/I &\longrightarrow R/J \\ r+I &\longmapsto r+J \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanan dönüşüm çekirdeği J/I olan bir halka epimorfizmasıdır. Böylece 1. İzomorfizma Teoremi'nden

$$\frac{R/I}{J/I} \cong R/J$$

Kanıt. İyi tanımlılık: $r_1, r_2 \in R$ olmak üzere $r_1+I = r_2+I$ olsun. $r_1 - r_2 \in I \subseteq J \Rightarrow \underbrace{r_1+J}_{\psi(r_1+I)} = \underbrace{r_2+J}_{\psi(r_2+I)}$

Homomorfizma: $r_1, r_2 \in R$ olsun.

$$\begin{aligned} \psi((r_1+I)+(r_2+I)) = \psi(r_1+r_2+I) = r_1+r_2+J &= (r_1+J)+(r_2+J) \\ &= \psi(r_1+I)+\psi(r_2+I) \end{aligned}$$

$\psi((r_1+I).(r_2+I)) = \psi(r_1+I).\psi(r_2+I)$ olduğu da benzer şekilde görülebilir.

Örtenlik: Açıktır.

$x \in J/I$ olsun. $x = r+I$ o.ş. $r \in J$ vardır. $\psi(x) = \psi(r+I) =$

$r+J = J = 0_{R/J} \Rightarrow x \in Ker(\psi)$. $\therefore J/I \subseteq Ker(\psi)$.

Şimdi $x \in Ker(\psi)$ olsun. $x = r+I$ o.ş. $r \in R$ vardır.

$0_{R/J} = \psi(x) = \psi(r+I) = r+J \Rightarrow r \in J \Rightarrow x = r+I \in J/I$

$\therefore Ker(\psi) \subseteq J/I$.

$\square$

15. Örnek $R = \mathbb{Z}_6$ ve $I = \bar{3}\mathbb{Z}_6 = \{\bar{0}, \bar{3}\}$

$R/I \cong \mathbb{Z}_3$.

$R \cong \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ ve I'ya bu izomorfizma altında $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ içinde karşılık gelen ideal $\frac{3\mathbb{Z}}{6\mathbb{Z}}$ idealidir.

$$R/I \cong \frac{\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}}{3\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}} \cong \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}_3$$

Genel olarak $\mathbb{Z}_{nm}/\bar{n}\mathbb{Z}_{nm} \cong \mathbb{Z}_m$ yazılabilir.

16. Lemma R ve S iki değişmeli halka ve $f: R \to S$ bir halka hom. olsun. J, S'nin bir ideali ise $f^{-1}(J)$ de R'nin bir idealidir. ($f^{-1}(J) = \{r \in R : f(r) \in J\}$)

Not. Yukarıdaki lemmada $I \trianglelefteq R$ olsa bile $f(I) \trianglelefteq S$ olmak zorunda değildir. $x, y \in f(I) \Rightarrow x = f(a),\ y = f(b),\ a, b \in I$

$x + y = f(a) + f(b) = f(\underbrace{a+b}_{\in I}) \in f(I)$

$s \in S$ için $s f(a) \in f(I)$ olması gerekmez!

$f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}[x]$ $\qquad I = 2\mathbb{Z} \Rightarrow f(I) = 2\mathbb{Z} \ntrianglelefteq \mathbb{Z}[x]$

$a \mapsto a$

Tanım. R ve S iki halka ve $f : R \to S$ bir halka hom. olsun. $I \trianglelefteq R$ ve $J \trianglelefteq S$ olsun.

(i) $f(I)S$ idealine I'nın S'ye genişlemesi,

(ii) $f^{-1}(J)$ idealine ise J'nin R'ye daralması

denir.

I'nın genişlemesini I^g, J'nın daralmasını da J^d gösterimlerini kullanarak yazacağız.

Alıştırma 1. $f : R \to S$ bir halka hom. ve $I \trianglelefteq R$ olsun. Genişleme gösterimini f dönüşümüne göre kullanalım. Gösteriniz ki eğer I bir $H \subseteq R$ altkümesi tarafından üretilir ise I^g $f(H) \subseteq S$ altkümesi tarafından üretilir.

Alıştırma 2. $f : R \to S$ bir halka homomorfizması $I_1, I_2 \trianglelefteq R$, $J_1, J_2 \trianglelefteq S$ olsun. Genişleme ve daralma gösterimlerini f'ye göre kullanalım. Aşağıdaki ifadelerin doğru olduğunu gösteriniz.

(i) $(I_1 + I_2)^g = I_1^g + I_2^g$