zorunda değildir. $x, y \in f(I) \Rightarrow x = f(a), y = f(b),\ a, b \in I$

$x + y = f(a) + f(b) = f(\underbrace{a+b}_{\in I}) \in f(I)$

$s \in S$ için $s f(a) \in f(I)$ olması gerekmez!

$f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}[x]$ $\qquad I = 2\mathbb{Z} \Rightarrow f(I) = 2\mathbb{Z} \ntrianglelefteq \mathbb{Z}[x]$

$a \mapsto a$

Tanım. R ve S iki halka ve $f : R \to S$ bir halka hom. olsun $I \trianglelefteq R$ ve $J \trianglelefteq S$ olsun.

(i) $f(I) S$ idealine I'nın S'ye genişlemesi,

(ii) $f^{-1}(J)$ idealine ise J'nin R'ye daralması

denir.

I'nın genişlemesini I^g, J'nın daralmasını da J^d gösterimlerini kullanarak yazacağız.

Alıştırma 1. $f : R \to S$ bir halka hom. ve $I \trianglelefteq R$ olsun. Genişleme gösterimini f dönüşümüne göre kullanalım. Gösteriniz ki eğer I bir $H \subseteq R$ altkümesi tarafından üretilir ise I^g $f(H) \subseteq S$ altkümesi tarafından üretilir.

Alıştırma 2. $f : R \to S$ bir halka homomorfizması $I_1, I_2 \trianglelefteq R$, $J_1, J_2 \trianglelefteq S$ olsun. Genişleme ve daralma gösterimlerini f'ye göre kullanalım. Aşağıdaki ifadelerin doğru olduğunu gösteriniz.

(i) $(I_1 + I_2)^g = I_1^g + I_2^g$

(ii) $(I_1 I_2)^g = I_1^g I_2^g$

(iii) $(J_1 \cap J_2)^d = J_1^d \cap J_2^d$

(iv) $\sqrt{J_1^d} = (\sqrt{J_1})^d$.

17. Lemma. $f: R \to S$ bir halka hom, $I \trianglelefteq R$ ve $J \trianglelefteq S$ olsun. Genişleme ve daralma gösterimlerini f'ye göre kullanalım. Bu durumda

(i) $I \subseteq I^{gd} = (I^g)^d$

(ii) $J^{dg} \subseteq J$

(iii) $I^{gdg} = I^g$

(iv) $J^{dgd} = J^d$.

Kanıt.

(i) $a \in I \Rightarrow f(a) \in f(I) \subseteq I^g \Rightarrow a \in f^{-1}(I^g) = I^{gd}$

$\therefore I \subseteq I^{gd}$

(ii) $s \in J^{dg} = (J^d)^g = f(J^d)S$

$s = \sum_{i=1}^{k} \underbrace{f(a_i)s_i}_{\in J}$ o.ş. $a_i \in J^d$ ve $s_i \in S$ vardır.

$\Rightarrow s \in J$.

$\therefore J^{dg} \subseteq J$.

(iii) $I \subseteq I^{gd}$ olduğunu (i) den dolayı biliyoruz.

$$\Rightarrow \quad I^{g} \subseteq I^{gdg}$$

(ii) şıkkında $J = I^{g}$ alınırsa

$$I^{gdg} = J^{dg} \subseteq J = I^{g}$$

$$\therefore \quad I^{gdg} = I^{g}.$$

(iv) (iii) şıkkının kanıtında olduğu gibi verilebilir. $\square$

<u>**18. Sonuç.**</u> Bir önceki lemmada verilen koşulları kabul edelim.

$$\mathcal{D}_R = \{ J^{d} : J \in \mathcal{I}_S \} \quad \text{ve} \quad \mathcal{G}_S = \{ I^{g} : I \in \mathcal{I}_R \}$$

olsun. Buna göre

$$\begin{aligned} \varphi : \mathcal{D}_R &\longrightarrow \mathcal{G}_S \\ I &\longmapsto I^{g} \end{aligned}$$

eşlemesi bir 1-1 eşlemedir. Bu eşlemenin tersi

$$\begin{aligned} \psi : \mathcal{G}_S &\longrightarrow \mathcal{D}_R \\ J &\longmapsto J^{d} \end{aligned}$$

şeklindedir.

<u>Kanıt.</u> $I \in \mathcal{D}_R$ için

$\psi\varphi(I) = \psi(I^{g}) = I^{gd}$ olur. Fakat $I \in \mathcal{D}_R$ old. $I = J^{d}$ o.ş. $J \trianglelefteq S$ vardır. Buna göre