$$\Rightarrow \quad I^{g} \subseteq I^{gdg}$$

(ii) şıkkında $J = I^{g}$ alınırsa

$$I^{gdg} = J^{dg} \subseteq J = I^{g}$$

$$\therefore \quad I^{gdg} = I^{g}.$$

(iv) (iii) şıkkının kanıtında olduğu gibi verilebilir. $\square$

18. Sonuç. Bir önceki lemmada verilen koşulları kabul edelim.

$$\mathcal{D}_R = \{ J^{d} : J \in \mathcal{I}_S \} \text{ ve } \mathcal{G}_S = \{ I^{g} : I \in \mathcal{I}_R \}$$

olsun. Buna göre

$$\begin{aligned} \varphi : \mathcal{D}_R &\longrightarrow \mathcal{G}_S \\ I &\longmapsto I^{g} \end{aligned}$$

eşlemesi bir 1-1 eşlemedir. Bu eşlemenin tersi

$$\begin{aligned} \psi : \mathcal{G}_S &\longrightarrow \mathcal{D}_R \\ J &\longmapsto J^{d} \end{aligned}$$

şeklindedir.

Kanıt. $I \in \mathcal{D}_R$ için

$\psi\varphi(I) = \psi(I^{g}) = I^{gd}$ olur. Fakat $I \in \mathcal{D}_R$ old.

$I = J^{d}$ o.ş. $J \trianglelefteq S$ vardır. Buna göre

$$\psi\varphi(I) = I^{gd} = J^{dgd} = J^{d} = I.$$

$J \in \mathcal{G}_S$ olsun. $J = I^g$ o.ş. $I \trianglelefteq R$ vardır.

$$\varphi\psi(J) = \varphi(J^d) = J^{dg} = I^{gdg} = I^g = J$$

$\psi\varphi$ ve $\varphi\psi$ dönüşümleri birim dönüşümler old. ψ ve φ birer 1-1 eşlemedir ve bu dönüşümler birbirlerinin tersidir. $\square$

19. Örnek. $f : R \to S$ bir halka epimorfizması olsun. Bu durumda

$$\mathcal{D}_R = \{ I \in \mathcal{I}_R : I \supseteq Ker(f) \}$$

ve

$$\mathcal{G}_S = \mathcal{I}_S.$$

$J \in \mathcal{I}_S$ ise f örten old. $f f^{-1}(J) = J$ ve böylece

$$\underbrace{J^{dg}}_{(J^d)^g} = J$$

$$\therefore \quad \mathcal{G}_S = \mathcal{I}_S.$$

$I \in \mathcal{I}_R$ ve $I \supseteq Ker(f)$ olsun. $a \in I^{gd}$ olsun.

$$f(a) \in I^g \Rightarrow f(a) = \sum_{i=1}^{n} f(a_i) s_i \text{ o.ş. } a_i \in I \text{ ve } s_i \in S \ (1 \le i \le n) \text{ vardır.}$$

f örten old. her $1 \le i \le n$ için $s_i = f(r_i)$ o.ş. $r_i \in R$ bulunabilir.
O zaman

$$f(a) = \sum_{i=1}^{n} f(a_i) f(r_i) = \sum_{i=1}^{n} f(a_i r_i) = f\Big(\sum_{i=1}^{n} a_i r_i\Big)$$

elde edilir. Bu durumda

$$a - \sum_{i=1}^{n} a_i r_i \in Ker(f) \subseteq I$$

olur. Böylece $a \in I$ bulunur. Dolayısıyla $I = I^{gd} = (I^g)^d \in \mathcal{D}_R$.

Tersine $I \in \mathcal{D}_R$ olsun. O zaman $I = J^d$ o.ş. $J \in \mathcal{I}_S$ var. $Ker(f) = 0^d$ old. $Ker f = 0^d \subseteq J^d = I$ elde edilir. Böylece

$$\mathcal{D}_R = \{ I \in \mathcal{I}_R : I \supseteq Ker(f) \}.$$

20. Örnek R bir değişmeli halka ve $f : R \to R[X]$ doğal hom. olmak üzere genişleme ve daralma gösterimlerini f'ye göre kullanalım. I, R'nin bir ideali ve her $r \in R$ için R/I halkasının $r+I$ elemanı $\bar{r}$ şeklinde gösteriliyor olsun.

$$\eta : R[X] \longrightarrow (R/I)[X]$$
$$\sum_{i=0}^{n} r_i x^i \longmapsto \sum_{i=0}^{n} \bar{r}_i x^i$$

şeklinde tanımlanan dönüşüm bir halka homomorfizmasıdır. Dikkat edilirse

$$Ker(\eta) = \left\{ \sum_{i=0}^{n} r_i x^i \in R[X] : n \in \mathbb{N}_0,\ r_i \in I\ \forall i = 0, \dots, n \right\}$$

olur.

(i) $I^g = Ker(\eta)$. $\quad I^g = f(I) R[X]$

$I = f(I)$ old. $a \in I$ alalım $\eta(a) = \bar{a} = \bar{0} \Rightarrow a \in Ker(\eta)$

$\Rightarrow f(I) \subseteq Ker(\eta) \Rightarrow I^g \subseteq Ker(\eta)$.