elde edilir. Bu durumda

$$a - \sum_{i=1}^{n} a_i r_i \in Ker(f) \subseteq I$$

olur. Böylece $a \in I$ bulunur. Dolayısıyla $I = I^{gd} = (I^g)^d \in \mathcal{D}_R$.

Tersine $I \in \mathcal{D}_R$ olsun. O zaman $I = J^d$, o.ş. $J \in \mathcal{I}_S$ var. $Ker(f) = 0^d$ old. $Ker f = 0^d \subseteq J^d = I$ elde edilir. Böylece

$$\mathcal{D}_R = \{ I \in \mathcal{I}_R : I \supseteq Ker(f) \}.$$

20. Örnek R bir değişmeli halka ve $f : R \to R[X]$ doğal hom. olmak üzere genişleme ve daralma gösterimlerini f'ye göre kullanalım. I, R'nin bir ideali ve her $r \in R$ için R/I halkasının $r+I$ elemanı $\bar{r}$ şeklinde gösteriliyor olsun.

$$\eta : R[X] \longrightarrow (R/I)[X]$$
$$\sum_{i=0}^{n} r_i x^i \longmapsto \sum_{i=0}^{n} \bar{r}_i x^i$$

şeklinde tanımlanan dönüşüm bir halka homomorfizmasıdır. Dikkat edilirse

$$Ker(\eta) = \left\{ \sum_{i=0}^{n} r_i x^i \in R[X] : n \in \mathbb{N}_0,\ r_i \in I\ \forall i = 0, \dots, n \right\}$$

olur.

(i) $I^g = Ker(\eta)$. $\quad I^g = f(I) R[X]$

$I = f(I)$ old. $a \in I$ alalım $\eta(a) = \bar{a} = \bar{0} \Rightarrow a \in Ker(\eta)$

$\Rightarrow f(I) \subseteq Ker(\eta) \Rightarrow I^g \subseteq Ker(\eta)$.

$n \in \mathbb{N}_0$ ve her $i = 0, \dots, n$ için $r_i \in I$ olmak üzere

$$f(X) = \sum_{i=0}^{n} r_i X^i$$

olsun.

$$f(X) = \sum_{i=0}^{n} r_i X^i = \sum_{i=0}^{n} \underbrace{f(r_i)}_{f(I)} \underbrace{X^i}_{R[X]} \in f(I)R[X] = I^g$$

$\therefore \; I^g = Ker(\eta)$.

(ii) $I^{gd} = I$. Dolayısıyla $\mathcal{I}_R = \mathcal{D}_R$ olur.

Zaten $I \subseteq I^{gd}$ olduğunu biliyoruz. $a \in I^{gd}$ olsun.

$a = f(a) \in I^g$.

$$a = r_0 + \underbrace{r_1 X + \dots + r_n X^n}_{0} \quad \text{o.ş} \quad r_0, \dots, r_n \in I \text{ vardır.}$$

$\Rightarrow a = r_0 \in I \quad \therefore I^{gd} \subseteq I \quad \therefore I = I^{gd}$.

(iii) $I^g = f(I)R[X] = IR[X]$

1. İzo. Teoreminden

$$\frac{R[X]}{I^g} = \frac{R[X]}{IR[X]} \cong (R/I)[X]$$

bulunur.

(iv) $I_1, \dots, I_n \in \mathcal{I}_R$ için

$$(I_1 \cap \dots \cap I_n)R[X] = I_1R[X] \cap \dots \cap I_nR[X]$$

yazılabilir.

Alıştırma 3. Örnek 20'nin (iv) şıkkını kanıtlayınız.

2. ASAL ve MAKSİMAL İDEALLER

1. Önerme R bir halka olsun. R bir cisimdir ancak ve ancak R'nin yalnızca iki ideali vardır.

Kanıt. R bir cisim olsun. $I \trianglelefteq R$ olsun. $I \neq 0$ olsun. $a \in I \setminus \{0\}$ alabiliriz. R cisim old. $a^{-1} \in R$. $1 = aa^{-1} \in I$ olacağından $I = R$ elde edilir.

R'nin $\{0\}$ ve R'den başka ideali olmasın. $0 \neq a \in R$ alalım. $(a) = aR$ idealini düşünelim. $(a) \neq 0$ dır. Kabulümüzden dolayı $(a) = R$ olmak zorundadır. O zaman $1 = ab$ o.ş. $b \in R$ vardır.

$\therefore a \in R$ birimsel

$\therefore R$ cisim.

Tanım. R bir halka ve $M \ntrianglelefteq R$ olsun. Eğer M, R'nin öz ideallerinin kapsama bağıntısına göre bir maksimal elemanı ise M'ye R'nin bir maksimal ideali denir. Başka bir deyişle eğer her $I \trianglelefteq R$ için $M \subseteq I$ olduğunda ya $M = I$ ya da $I = R$ oluyorsa M, R'nin bir maksimal idealidir.

2. Lemma R bir halka ve $M \trianglelefteq R$ olsun. M, R'nin bir maksimal idealidir ancak ve ancak R/M halkası cisimdir.