Alıştırma 3. Örnek 20'nin (iv) şıkkını kanıtlayınız.

2. ASAL ve MAKSİMAL İDEALLER

1. Önerme R bir halka olsun. R bir cisimdir ancak ve ancak R'nin yalnızca iki ideali vardır.

Kanıt. R bir cisim olsun. $I \trianglelefteq R$ olsun. $I \neq 0$ olsun. $a \in I \setminus \{0\}$ alabiliriz. R cisim old. $a^{-1} \in R$. $1 = a a^{-1} \in I$ olacağından $I = R$ elde edilir.

R'nin $\{0\}$ ve R'den başka ideali olmasın. $0 \neq a \in R$ alalım. $(a) = aR$ idealini düşünelim. $(a) \neq 0$ dır. Kabulümüzden dolayı $(a) = R$ olmak zorundadır. O zaman $1 = ab$ o.ş. $b \in R$ vardır.

$\therefore a \in R$ birimsel

$\therefore R$ cisim.

Tanım. R bir halka ve $M \ntrianglelefteq R$ olsun. Eğer M, R'nin öz ideallerinin kapsama bağıntısına göre bir maksimal elemanı ise M'ye R'nin bir maksimal ideali denir. Başka bir deyişle eğer her $I \trianglelefteq R$ için $M \subseteq I$ olduğunda ya $M = I$ ya da $I = R$ oluyorsa M, R'nin bir maksimal idealidir.

2. Lemma R bir halka ve $M \trianglelefteq R$ olsun. M, R'nin bir maksimal idealidir ancak ve ancak R/M halkası cisimdir.

Kanıt. $\{ I \in \mathcal{I}_R : I \supseteq M \} \longrightarrow \mathcal{I}_{R/M}$

$$I \longmapsto I/M$$

dönüşümünün bir birebir eşleme old. biliyoruz. Buna göre

M maksimaldir $\Leftrightarrow$ $M \neq R$ ve $\{ I \in \mathcal{I}_R : I \supseteq M\} = \{M, R\}$

$$\Leftrightarrow R/M \neq 0 \text{ ve } \mathcal{I}_{R/M} = \{ 0_{R/M}, R/M \}$$

$$\overset{\text{Önerme 1.}}{\Leftrightarrow} R/M \text{ cisimdir.}$$

Alıştırma 4. R bir halka $I, M \trianglelefteq R$ olmak üzere $I \subseteq M$ olsun. Gösteriniz ki M, R'nin bir maksimal idealidir ancak ve ancak M/I, R/I halkasının bir maksimal idealidir. Yani

$\{ J \in \mathcal{I}_R : J \supseteq I \} \longrightarrow \mathcal{I}_{R/I}$

$$J \longmapsto J/I$$

birebir eşlemesi maksimal idealleri yine maksimal ideallerle eşleştirir.

Örnek p bir asal sayı ise $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}_p$ cisim olacağından $p\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}$'nin bir maksimal idealidir.

$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}_n$ cisim $\Leftrightarrow$ n asal

Dolayısıyla $\mathbb{Z}$'nin tüm maksimal idealleri p asal olmak üzere $p\mathbb{Z}$ tipindedir.

Alıştırma 5. K bir cisim olmak üzere $K[X]$ halkasının tüm maksimal ideallerini belirleyiniz.

Hatırlatma $V \neq \emptyset$ bir küme olsun. V üzerinde $\preceq$ şeklinde gösterilen bir bağıntı yansıma, ters-simetri ve geçişme özelliklerini sağlar ise $\preceq$ bağıntısına V üzerinde bir "kısmî sıralama bağıntısı" denir. Bu durumda $(V, \preceq)$ ikilisine de bir kısmî sıralı küme denir. Eğer her $u, v \in V$ için ya $u \preceq v$ ya da $v \preceq u$ oluyorsa o zaman $(V, \leq)$ ikilisine bir tam sıralı küme ya da bir zincir adı verilir.

W, $(V, \leq)$ kısmî sıralı kümesinin boştan farklı bir alt kümesi olsun. Eğer bir $v \in V$ için

$$w \leq v, \quad \forall w \in W$$

ise v'ye W kümesinin bir üst sınırı denir.

$(V, \leq)$ bir kısmî sıralı küme ve $u, v \in V$ olsun. Eğer $u \leq v$ ve $u \neq v$ ise bu durumu $u < v$ yazarak ifade edeceğiz. Bir $m \in V$ için $m < v$ olacak şekilde $v \in V$ yok ise o zaman m'ye V'nin bir maksimal elemanı denir.

3. Zorn Lemması: $(V, \leq)$ bir kısmî sıralı küme olsun. Eğer V'nin her tam sıralı alt kümesinin bir üst sınırı varsa o zaman V'nin bir maksimal elemanı vardır.