Alıştırma 5. K bir cisim olmak üzere $K[X]$ halkasının tüm maksimal ideallerini belirleyiniz.

Hatırlatma $V \neq \emptyset$ bir küme olsun. V üzerinde $\preceq$ şeklinde gösterilen bir bağıntı yansıma, ters-simetri ve geçişme özelliklerini sağlar ise $\preceq$ bağıntısına V üzerinde bir "kısmî sıralama bağıntısı" denir. Bu durumda $(V, \preceq)$ ikilisine de bir kısmî sıralı küme denir. Eğer her $u, v \in V$ için ya $u \preceq v$ ya da $v \preceq u$ oluyorsa o zaman $(V, \preceq)$ ikilisine bir tam sıralı küme ya da bir zincir adı verilir.

W, $(V, \preceq)$ kısmî sıralı kümesinin boştan farklı bir alt kümesi olsun. Eğer bir $v \in V$ için

$$w \preceq v, \quad \forall w \in W$$

ise v'ye W kümesinin bir üst sınırı denir.

$(V, \preceq)$ bir kısmî sıralı küme ve $u, v \in V$ olsun. Eğer $u \preceq v$ ve $u \neq v$ ise bu durumu $u \prec v$ yazarak ifade edeceğiz. Bir $m \in V$ için $m \prec v$ olacak şekilde $v \in V$ yok ise o zaman m'ye V'nin bir maksimal elemanı denir.

3. Zorn Lemması: $(V, \preceq)$ bir kısmî sıralı küme olsun. Eğer V'nin her tam sıralı alt kümesinin bir üst sınırı varsa o zaman V'nin bir maksimal elemanı vardır.

4. Önerme. R aşikâr olmayan $(1_R \neq 0_R)$ olsun. O zaman R'nin en az bir maksimal ideali vardır.

Kanıt. Dikkat edilirse R'nin bir idealinin maksimal ideal olması ile bu idealin R'nin öz ideallerinin kapsama bağıntısına göre kısmî sıralı kümesinin maksimal elemanı olması aynı anlama gelir. Dolayısıyla R'nin öz ideallerinin kısmî sıralı kümesinin en az bir maksimal elemanı olduğunu göstermek yeterlidir. Δ, R'nin öz ideallerinin bir tam sıralı kümesi olsun.

$$J = \bigcup_{I \in \Delta} I$$

olsun. Her $I \in \Delta$ için $I \subseteq J$. Eğer J, R'nin bir öz ideali ise o zaman J, Δ tam sıralı kümesinin bir üst sınırı olur. Böylece Zorn Lemması'ndan kanıt tamamlanır. Dolayısıyla J'nin R içinde bir öz ideal old. göstermeliyiz. $a, b \in J$, $r \in R$ alalım. $a \in I_1$ ve $b \in I_2$ o.ş. $I_1, I_2 \in \Delta$ bulunabilir. Δ tam sıralı old. ya $I_1 \subseteq I_2$ ya da $I_2 \subseteq I_1$ olur. Genelliği bozmadan $I_1 \subseteq I_2$ alabiliriz. $a, b \in I_2$ ve buradan $a+b \in I_2 \subseteq J$. Aynı zamanda $ra \in I_1 \subseteq J$ bulunur. Böylece $J \trianglelefteq R$ olur. Her $I \in \Delta$ için $1 \notin I$ old. $1 \notin J$ dir. Dolayısıyla J, R'nin bir öz idealidir. $\square$

$(\mathbb{Q}, +)$ abelyan grubu üzerinde her $a, b \in \mathbb{Q}$ için $ab = 0$ şeklinde tanımlanan çarpma işlemi ile birlikte $\mathbb{Q}$ bir halka olur. $\mathbb{Q}$'nun idealleri ile toplamsal alt grupları aynıdır. Fakat $\mathbb{Q}$'nun bir maksimal alt grubu yoktur. Böylece birimli olmayan halkalarda maksimal ideal bulunmak zorunda değildir.

5. Sonuç R bir halka ve I, R'nin bir öz ideali ise R'nin I'yı içeren bir maksimal ideali vardır.

Kanıt. R'nin I'yı içeren öz idealleri ile R/I'nın öz idealleri birebir eşleşir. Önerme 4'ten dolayı R/I halkasının bir maksimal ideali vardır. Alıştırma 4'ten dolayı bu maksimal ideal R'nin I'yı içeren bir M maksimal ideali için M/I şeklinde olmak zorundadır. Buna göre R'nin I'yı içeren bir maksimal ideali vardır.

$\square$

6. Sonuç. R bir halka ve $a \in R$ olsun. a tersinir değildir ancak ve ancak $a \in M$ o.ş. R'nin bir M maksimal ideali vardır. Başka bir deyişle a nın tersinir olması ile R'nin hiçbir maksimal ideali tarafından içerilmemesi denktir.

Tanım. Eğer bir R halkasının yalnızca bir tek maksimal ideali varsa bu halkaya bir yerel halka denir. Eğer R tek maksimal ideali M olan bir yerel halka ise R/M cismine R'nin kalan cismi adı verilir.

7. Lemma. R bir halka olsun. R'nin yerel halka olması ile tüm tersinir olmayan elemanlarının bir ideal oluşturması denktir.

Kanıt. R yerel halka olsun. R'nin tek maks. ideali M olsun. R'nin tersinir olmayan elemanlarının kümesi A olsun. $M \neq R$ olduğundan M'nin hiçbir elemanı tersinir olamaz. $M \subseteq A$. Fakat Sonuç 6'dan dolayı $A \subseteq M$ olmak zorundadır. Böyle $A = M$, yani A, R'nin bir