5. Sonuç R bir halka ve I, R'nin bir öz ideali ise R'nin I'yı içeren bir maksimal ideali vardır.

Kanıt. R'nin I'yı içeren öz idealleri ile R/I'nın öz idealleri birebir eşleşir. Önerme 4'ten dolayı R/I halkasının bir maksimal ideali vardır. Alıştırma 4'ten dolayı bu maksimal ideal R'nin I'yı içeren bir M maksimal ideali için M/I şeklinde olmak zorundadır. Buna göre R'nin I'yı içeren bir maksimal ideali vardır.

$\square$

6. Sonuç. R bir halka ve $a \in R$ olsun. a tersinir değildir ancak ve ancak $a \in M$ o.ş. R'nin bir M maksimal ideali vardır. Başka bir deyişle a nın tersinir olması ile R'nin hiçbir maksimal ideali tarafından içerilmemesi denktir.

Tanım. Eğer bir R halkasının yalnızca bir tek maksimal ideali varsa bu halkaya bir yerel halka denir. Eğer R tek maksimal ideali M olan bir yerel halka ise R/M cismine R'nin kalan cismi adı verilir.

7. Lemma. R bir halka olsun. R'nin yerel halka olması ile tüm tersinir olmayan elemanlarının bir ideal oluşturması denktir.

Kanıt. R yerel halka olsun. R'nin tek maks. ideali M olsun. R'nin tersinir olmayan elemanlarının kümesi A olsun. $M \neq R$ olduğundan M'nin hiçbir elemanı tersinir olamaz. $M \subseteq A$. Fakat Sonuç 6'dan dolayı $A \subseteq M$ olmak zorundadır. Böyle $A = M$, yani A, R'nin bir ideali olur.

Tersine R'nin tersinir olmayan tüm elemanlarının kümesi A, R'nin bir ideali olsun. $0 \in A$ old. $0 \neq 1$, yani R aşikâr değildir. Dolayısıyla R'nin en az bir maks. ideali vardır. $\mathcal{M}$, R'nin bir maksimal ideali olsun. $\mathcal{M} \subseteq A$ olur. $\mathcal{M}$ maks. ve $A \neq R$ old. $\mathcal{M} = A$ elde edilir. $\mathcal{M}$ keyfi bir maks. ideal olarak seçildiğinden R'nin bir tek maksimal ideali olur ve bu maks. ideal A'dır. $\square$

Örnek. K cisim ve $X_1, \ldots, X_n$ birer değişken olsun. $a_1, \ldots, a_n \in K$ olmak üzere $(X_1 - a_1, \ldots, X_n - a_n)$ ideali $K[X_1, \ldots, X_n]$ halkasının bir maksimal idealidir.

$$\varphi : K[X_1, \ldots, X_n] \longrightarrow K$$
$$f(X_1, \ldots, X_n) \longmapsto f(a_1, \ldots, a_n)$$

dönüşümü bir halka epi. ve $\ker(\varphi) = (X_1 - a_1, \ldots, X_n - a_n)$ old. $K[X_1, \ldots, X_n] / (X_1 - a_1, \ldots, X_n - a_n)$ bir cisim olur. Buna göre $(X_1 - a_1, \ldots, X_n - a_n)$ ideali bir maks. idealdir.

K cisim $\quad K[[X]]$

$$a_0 + a_1 X + a_2 X^2 + \cdots = \sum_{i=0}^{\infty} a_i X^i \in K[[X]] \text{ birimsel}$$
$$\Longleftrightarrow$$
$$a_0 \neq 0$$

Tersinir olmayan elemanlar $a_1 X + a_2 X^2 + \cdots = X(a_1 + a_2 X + \cdots)$ old. tersinir olmayan elemanların kümesi $\langle X \rangle$ olur. Lemma 7 den dolayı $K[[X]]$ bir yerel halkadır.

Tanım. R bir halka olsun. R'nin bütün maksimal ideallerinin arakesitine Jacobson radicali denir ve $Jac(R)$ ile gösterilir. R'nin bütün maksimal ideallerinin kümesini $Max(R)$ ile göstereceğiz. Buna göre $Jac(R) = \bigcap_{\mathfrak{M} \in Max(R)} \mathfrak{M}$

8. Lemma R bir halka ve $r \in R$ olsun. Buna göre $r \in Jac(R)$ olması ile her $a \in R$ için $1-ar$ nin tersinir olması denktir.
Yani

$$Jac(R) = \{ r \in R : \text{her } a \in R \text{ için } 1-ar \text{ tersinirdir} \}$$

olur.

Kanıt. $r \in Jac(R)$ olsun. Kabul edelim ki bir $a \in R$ için $1-ar$ tersinir olmasın. $1-ar \in \mathfrak{M}$ olacak şekilde bir $\mathfrak{M} \in Max(R)$ vardır. $1-ar = x \in \mathfrak{M}$ yazalım. $1 = ar + x \in \underbrace{Jac(R) + \mathfrak{M}}_{Jac(R) \subseteq \mathfrak{M}} = \mathfrak{M}$ olacağından çelişki elde edilir.

Tersine her $a \in R$ için $1-ar$ tersinir olsun. $\mathfrak{M} \in Max(R)$ seçelim. $r \in \mathfrak{M}$ olduğunu görmek yeter. Kabul edelim ki $r \notin \mathfrak{M}$ olsun. $\mathfrak{M} \subsetneq \mathfrak{M} + (r) \subseteq R$ old. $R = \mathfrak{M} + (r)$ elde edilir. $1 = m + ar$ o.ş. $m \in \mathfrak{M}$ ve $a \in R$ vardır. Kabulümüze göre $1-ar$ tersinirdir. $m \in \mathfrak{M}$ tersinir olur ki bu da bir çelişkidir. Dolayısıyla $r \in \mathfrak{M}$ dir.

$\square$