Tanım. R bir halka olsun. R'nin bütün maksimal ideallerinin arakesitine Jacobson radicali denir ve $Jac(R)$ ile gösterilir. R'nin bütün maksimal ideallerinin kümesini $Max(R)$ ile göstereceğiz. Buna göre $Jac(R) = \bigcap_{\mathfrak{m} \in Max(R)} \mathfrak{m}$

8. Lemma R bir halka ve $r \in R$ olsun. Buna göre $r \in Jac(R)$ olması ile her $a \in R$ için $1-ar$ nin tersinir olması denktir.
Yani

$$Jac(R) = \{ r \in R : \text{her } a \in R \text{ için } 1-ar \text{ tersinirdir} \}$$

olur.

Kanıt. $r \in Jac(R)$ olsun. Kabul edelim ki bir $a \in R$ için $1-ar$ tersinir olmasın. $1-ar \in \mathfrak{m}$ olacak şekilde bir $\mathfrak{m} \in Max(R)$ vardır. $1-ar = x \in \mathfrak{m}$ yazalım. $1 = ar + x \in \underbrace{Jac(R) + \mathfrak{m}}_{Jac(R) \subseteq \mathfrak{m}} = \mathfrak{m}$ olacağından çelişki elde edilir.

Tersine her $a \in R$ için $1-ar$ tersinir olsun. $\mathfrak{m} \in Max(R)$ seçelim. $r \in \mathfrak{m}$ olduğunu görmek yeter. Kabul edelim ki $r \notin \mathfrak{m}$ olsun. $\mathfrak{m} \subsetneq \mathfrak{m} + (r) \subseteq R$ old. $R = \mathfrak{m} + (r)$ elde edilir. $1 = m + ar$ o.ş. $m \in \mathfrak{m}$ ve $a \in R$ vardır. Kabulümüze göre $1-ar$ tersinirdir. $m \in \mathfrak{m}$ tersinir olur ki bu da bir çelişkidir. Dolayısıyla $r \in \mathfrak{m}$ dir. $\square$

9. Örnek. $[0,1]$ aralığı üzerinde tanımlı reel değerli sürekli fonksiyonların kümesi değişmeli ve birimli bir halkadır.

$f, g : [0,1] \to \mathbb{R}$ sürekli ise

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x)$$
$$(fg)(x) = f(x)g(x)$$

şeklinde tanımlanan $f+g$ ve fg fonksiyonları da süreklidir. $[0,1]$ aralığı üzerindeki sürekli fonksiyonların kümesi bu işlemlerle birlikte bir değişmeli halkadır. Bu halkayı $C[0,1]$ ile göstereceğiz.

$$1 : [0,1] \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto 1$$

denirse $C[0,1]$ halkasının birimi 1 olur.

<u>Gözlem:</u> $f \in C[0,1]$ olsun. f 'nin tersinir olması ile her $x \in [0,1]$ için $f(x) \neq 0$ olması denktir. Başka bir deyişle $C[0,1]$'in tersinir elemanları $[0,1]$ aralığında grafikleri x-eksenini kesmeyen sürekli fonk.lardır.

$z \in [0,1]$ için $M_z = \{ f \in C[0,1] : f(z) = 0 \}$

M_z ideal midir?

$$0 : [0,1] \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto 0$$

denirse $0 \in M_z$; yani $M_z \neq \emptyset$. $f, g \in M_z$, $h \in C[0,1]$ olsun. $(f+g)(z) = f(z) + g(z) = 0 + 0 = 0 \Rightarrow f+g \in M_z$.

$$(hf)(z) = h(z)\overbrace{f(z)}^{0} = 0 \Rightarrow hf \in \mathcal{M}_z .$$

$\therefore$ $\mathcal{M}_z$ $C[0,1]$'in bir idealidir.

$$\varphi : C[0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$f \longmapsto f(z)$$

dönüşümünü tanımlayalım

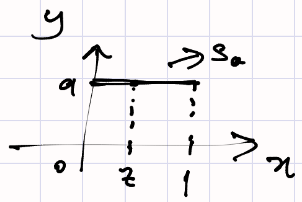
φ homomorfizma mıdır?

$f, g \in C[0,1]$ olsun $\varphi(f+g) = (f+g)(z) = f(z)+g(z)$
$= \varphi(f)+\varphi(g)$.

Benzer şekilde $\varphi(fg) = \varphi(f)\varphi(g)$ dir.

$\therefore$ φ bir halka hom.

Her $a \in \mathbb{R}$ için



$$s_a : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto a$$

şeklinde tanımlanırsa $s_a \in C[0,1]$ ve $\varphi(s_a) = s_a(z) = a$.

$\therefore$ φ örtendir.

Ayrıca $\ker(\varphi) = \mathcal{M}_z$ olduğu açıktır. Böylece

$$C[0,1]/\mathcal{M}_z \cong \mathbb{R}$$

olacağından $C[0,1]/\mathcal{M}_z$ bir cisim; yani $\mathcal{M}_z$ $C[0,1]$'in bir maksimal ideali olur.

Şimdi $\mathcal{M}$ $C[0,1]$ halkasının bir maksimal ideali olsun.

<u>İddia</u>: $\mathcal{M} = \mathcal{M}_z$ olacak şekilde bir $z \in [0,1]$ vardır.