$(hf)(z) = h(z)\overbrace{f(z)}^{0} = 0 \Rightarrow hf \in M_z$.

$\therefore$ M_z $C[0,1]$'in bir idealidir.

$$\varphi : C[0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$f \longmapsto f(z)$$

dönüşümünü tanımlayalım

φ homomorfizma mıdır?

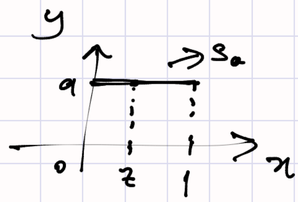
$f, g \in C[0,1]$ olsun $\varphi(f+g) = (f+g)(z) = f(z) + g(z)$
$= \varphi(f) + \varphi(g)$.

Benzer şekilde $\varphi(fg) = \varphi(f)\varphi(g)$ dir.

$\therefore$ φ bir halka hom.

Her $a \in \mathbb{R}$ için

$$s_a : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto a$$



şeklinde tanımlanırsa $s_a \in C[0,1]$ ve $\varphi(s_a) = s_a(z) = a$.

$\therefore$ φ örtendir.

Ayrıca $\ker(\varphi) = M_z$ olduğu açıktır. Böylece

$$C[0,1]/M_z \cong \mathbb{R}$$

olacağından $C[0,1]/M_z$ bir cisim; yani M_z $C[0,1]$'in bir maksimal ideali olur.

Şimdi M $C[0,1]$ halkasının bir maksimal ideali olsun.

İddia: $M = M_z$ olacak şekilde bir $z \in [0,1]$ vardır.

$f \in C[0,1]$ ise $f^{-1}(0) = \{ z \in [0,1] \; ; \; f(z) = 0 \}$ olsun.
$\{0\} \subseteq \mathbb{R}$ kapalı old. $f^{-1}(0) \subseteq [0,1]$ kapalı olur
(f sürekli old.)

Kabul edelim ki $\bigcap_{f \in M} f^{-1}(0) = \phi$ olsun. $[0,1]$ kompakt
olduğundan $f_1, \dots, f_r \in M$ vardır öyle ki

$$f_1^{-1}(0) \cap \dots \cap f_r^{-1}(0) = \phi$$

dir. $f = f_1^2 + \dots + f_r^2$ olsun. Her $i = 1, \dots, r$ için $f_i \in M$
old. $f \in M$.

$f(a) = 0$ o.ş. $a \in [0,1]$ varsa o zaman
$f_1^2(a) + \dots + f_r^2(a) = 0 \Rightarrow f_1(a) = \dots = f_r(a) = 0 \Rightarrow$
$a \in f_1^{-1}(0) \cap \dots \cap f_r^{-1}(0) = \phi$, çelişki.

$\therefore$ f tersinir $\Rightarrow$ çelişki $(M \neq R)$

$\therefore \bigcap_{f \in M} f^{-1}(0) \neq \phi$

$z \in \bigcap_{f \in M} f^{-1}(0)$ olsun. $\forall f \in M$ için $f(z) = 0 \Rightarrow M \subseteq M_z$

M maksimal ideal ve $M_z \neq R$ old $M = M_z$ dir.

Tanım R bir halka ve $P \trianglelefteq R$ olsun. Eğer

(i) $P \neq R$,

(ii) her $a, b \in R$ için $ab \in P$ iken ya $a \in P$ ya da $b \in P$

koşulları sağlanıyorsa P'ye R'nin bir asal ideali denir.

10. Örnek $\mathbb{Z}$ halkasının asal idealleri p bir asal sayı olmak üzere $p\mathbb{Z}$ tipindedir.

K bir cisim ve $R = K[X]$ ise R'nin asal idealleri $p(X) \in K[X]$ bir indirgenmez polinom olmak üzere $p(X)K[X] = (p(X))$ tipindedir.

11. Önerme R bir halka ve $I \trianglelefteq R$ olsun. I, R'nin bir asal idealidir ancak ve ancak R/I bir tamlık bölgesidir.

12. Sonuç. Bir değişmeli halkanın her maksimal ideali asaldır.

Tanım. R bir halka olsun. R'nin tüm asal ideallerinin kümesine R'nin asal spektrumu ya da kısaca spektrumu denir. R'nin spektrumu $\operatorname{Spec}(R)$ şeklinde gösterilir.

13. Önerme $f: R \to S$ bir halka homomorfizması ve $Q \in \operatorname{Spec}(S)$ ise $f^{-1}(Q) = Q^{d} \in \operatorname{Spec}(R)$ dir.

Kanıt. $g: R \xrightarrow{f} S \xrightarrow{\pi} S/Q$ (π doğal epi.) denirse $\ker(g) = f^{-1}(Q)$ old. görmek zor değildir. Böylece 1. İzomorfizma Teoreminden dolayı $R/f^{-1}(Q)$ halkası S/Q halkasının içine gömüle-bilir. S/Q tamlık bölgesinin tüm alt halkaları da birer tamlık bölgesi olacağından $R/f^{-1}(Q)$ da bir tamlık bölgesidir. Buna göre Önerme 11'den $f^{-1}(Q) \in \operatorname{Spec}(R)$ elde edilir.

$\square$

14. Lemma R bir halka ve I, R'nin bir öz ideali olsun. O zaman bir $P \supseteq I$ idealinin R'de asal olması ile P/I idealinin R/I da asal olması denktir.