10. Örnek $\mathbb{Z}$ halkasının asal idealleri p bir asal sayı olmak üzere $p\mathbb{Z}$ tipindedir.

K bir cisim ve $R = K[X]$ ise R'nin asal idealleri $p(X) \in K[X]$ bir indirgenmez polinom olmak üzere $p(X)K[X] = (p(X))$ tipindedir.

11. Önerme R bir halka ve $I \trianglelefteq R$ olsun. I, R'nin bir asal idealidir ancak ve ancak R/I bir tamlık bölgesidir.

12. Sonuç. Bir değişmeli halkanın her maksimal ideali asaldır.

Tanım. R bir halka olsun. R'nin tüm asal ideallerinin kümesine R'nin asal spektrumu ya da kısaca spektrumu denir. R'nin spektrumu $\mathrm{Spec}(R)$ şeklinde gösterilir.

13. Önerme $f: R \to S$ bir halka homomorfizması ve $Q \in \mathrm{Spec}(S)$ ise $f^{-1}(Q) = Q^d \in \mathrm{Spec}(R)$ dir.

Kanıt. $g: R \xrightarrow{f} S \xrightarrow{\pi} S/Q$ (π doğal epi.) denirse $\ker(g) = f^{-1}(Q)$ old. görmek zor değildir. Böylece 1. İzomorfizma Teoreminden dolayı $R/f^{-1}(Q)$ halkası S/Q halkasının içine gömülebilir. S/Q tamlık bölgesinin tüm alt halkaları da birer tamlık bölgesi olacağından $R/f^{-1}(Q)$ da bir tamlık bölgesidir. Buna göre Önerme 11'den $f^{-1}(Q) \in \mathrm{Spec}(R)$ elde edilir. $\square$

14. Lemma R bir halka ve I, R'nin bir öz ideali olsun. O zaman bir $P \supseteq I$ idealinin R'de asal olması ile P/I idealinin R/I de asal olması denktir.

<u>Kanıt.</u> $\dfrac{R/I}{P/I} \cong R/P$ izomorfizması düşünülürse kanıt açıktır.

□

<u>**Alıştırma 6.**</u> $f: R \to S$ <u>örten</u> halka homomorfizması olsun. $\mathcal{D}_R = \{ I \trianglelefteq R : I \supseteq \ker(f) \}$, $\mathcal{G}_S = S$ ve

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{D}_R \to \mathcal{G}_S & , & \mathcal{G}_S \to \mathcal{D}_R \\ I \mapsto I^g & & J \mapsto J^d \end{array}$$

dönüşümlerinin 1-1 eşleme olduğunu biliyoruz. Bu eşlemeler altında asal ideallerin korunduğunu gösteriniz. Yani $I \supseteq \ker(f)$ için $I \in Spec(R) \Leftrightarrow I^g \in Spec(S)$ old. gösteriniz.

<u>**Tanım.**</u> R bir tamlık bölgesi ve $a, b \in R \setminus \{0\}$ olsun. Eğer $a = ub$ o.ş. R'nin bir u tersinir elemanı varsa a ve b bağlantılıdır denir. Bu durumu sıklıkla $a \sim b$ şeklinde göstereceğiz.

Bağlantılı olma bir denklik bağıntısıdır.

$a \sim b \Leftrightarrow aR = bR$

<u>**Tanım.**</u> R bir tamlık bölgesi ve $p \in R$ olsun. Eğer

(i) p sıfır ya da tersinir değil

(ii) her $a, b \in R$ için $p \mid ab$ iken $p \mid a$ veya $p \mid b$

koşulları sağlanıyor ise p'ye R'nin bir asal elemanı denir.

p asal $\overset{\not\Leftarrow}{\Rightarrow}$ p indirgenmez

p asal $\Leftrightarrow$ $pR \in Spec(R)$.

15. Lemma R bir TİB ve $p \in R \setminus \{0\}$ olsun. Buna göre aşağıdakiler denktir:

(i) $pR \in Max(R)$.

(ii) $pR \in Spec(R)$

(iii) p, R'nin bir asal elemanıdır.

(iv) p, R'nin bir indirgenmez elemanıdır.

Kanıt.

(i) $\Rightarrow$ (ii): Sonuç 12. den açıktır.

(ii) $\Rightarrow$ (iii): Açık.

(iii) $\Rightarrow$ (iv): Açık.

(iv) $\Rightarrow$ (i): $p \in R$ indirgenmez olsun. $pR \subseteq I \subseteq R$ olacak şekilde bir I ideali alalım. R TİB old. $I = aR$ o.ş. $a \in R$ vardır. $p \in aR$ olacağından $p = ab$ o.ş. $b \in R$ vardır.

$\Rightarrow$ a veya b den biri tersinir.

a tersinir $\Rightarrow$ $a \in I$ old. $I = R$.

b tersinir $\Rightarrow$ $a = b^{-1}p \in pR \Rightarrow I \subseteq pR \Rightarrow I = pR$.

$\therefore$ $pR \in Max(R)$.