$$p \text{ asal } \overset{\not\Leftarrow}{\Rightarrow} p \text{ indirgenmez}$$

$$p \text{ asal } \Leftrightarrow pR \in \mathrm{Spec}(R).$$

15. Lemma R bir TİB ve $p \in R \setminus \{0\}$ olsun. Buna göre aşağıdakiler denktir:

(i) $pR \in \mathrm{Max}(R)$.

(ii) $pR \in \mathrm{Spec}(R)$

(iii) p, R'nin bir asal elemanıdır.

(iv) p, R'nin bir indirgenmez elemanıdır.

Kanıt.

(i) $\Rightarrow$ (ii): Sonuç 12. den açıktır.

(ii) $\Rightarrow$ (iii): Açık.

(iii) $\Rightarrow$ (iv): Açık.

(iv) $\Rightarrow$ (i): $p \in R$ indirgenmez olsun. $pR \subseteq I \subseteq R$ olacak şekilde bir I ideali alalım. R TİB old. $I = aR$ o.ş. $a \in R$ vardır. $p \in aR$ olacağından $p = ab$ o.ş. $b \in R$ vardır.

$\Rightarrow$ a veya b den biri tersinir.

a tersinir $\Rightarrow$ $a \in I$ old. $I = R$.

b tersinir $\Rightarrow$ $a = b^{-1}p \in pR \Rightarrow I \subseteq pR \Rightarrow I = pR$.

$\therefore$ $pR \in \mathrm{Max}(R)$.

$(V, \leq)$ bir kısmî sıralı küme olsun.

(i) V 'nin elemanları arasından

$$v_1 \leq v_2 \leq \dots \leq v_i \leq v_{i+1} \leq \dots$$

şeklinde oluşan herhangi bir artan zincir için

$$v_n = v_{n+i} \quad (\forall i \geq 1)$$

eşitliğini sağlayan bir n pozitif tamsayısı varsa (yani başka bir deyişle zincir n 'de duruyorsa) o zaman V için "artan zincir koşulunu sağlıyor" denir.

(ii) V 'nin boştan farklı her alt kümesinin bir maksimal elemanı varsa o zaman V için "maksimal koşulunu sağlıyor" denir.

16. Lemma Bir $(V, \leq)$ kısmî sıralı kümesinin artan zincir koşulunu sağlaması ile maksimal koşulunu sağlaması denktir.

Kanıt:

V, artan zincir koşulunu sağlasın. $\emptyset \neq U \subseteq V$ olsun. Kabul edelim ki U 'nun bir maksimal elemanı olmasın. $U \neq \emptyset$ old. $u_1 \in U$ seçebiliriz. u_1 U'nun maksimal elemanı olamayacağından $u_1 < u_2$ o.ş. $u_2 \in U$ vardır. Benzer şekilde u_2 de U nun maks. elemanı olmadığından $u_1 < u_2 < u_3$ o.ş. $u_3 \in U$ bulunabilir. Bu şekilde devam edilirse U nun elemanlarından oluşan

$$u_1 < u_2 < \dots < u_i < u_{i+1} < \dots$$

şeklinde bir artan zincir elde edilir. Bu ise V nin artan zincir koşulunu sağlaması ile çelişir.

Tersine V maksimal koşulunu sağlasın.

$$v_1 \leq v_2 \leq \dots \leq v_i \leq v_{i+1} \leq \dots$$

şeklinde V'nin elemanlarından oluşan bir artan zincir alalım.
$\mathcal{U} = \{ v_i : i \geq 1 \} \neq \phi$. Kabulümüzden dolayı $\mathcal{U}$ nun bir maksimal elemanı vardır. Bu eleman v_n olsun. Her $i \geq 1$ için $v_n \leq v_{n+i} \in \mathcal{U}$ old. $v_n = v_{n+i}$ olmak zorundadır. Dolayısıyla zincir durur.

□

Tanım. R bir halka olsun. Eğer R'nin tüm ideallerinin kümesi $\mathcal{I}_R$ kapsama bağıntısına göre bir kısmî sıralı küme olarak artan zincir koşulunu (ya da denk olarak maksimal koşulunu) sağlıyor ise o zaman R'ye bir Noether halkası denir.

(Emmy Noether)

17. Teorem. Her TİB bir Noether halkadır.

Kanıt. R bir TİB olsun. R'nin ideallerinin

$$I_1 \subseteq I_2 \subseteq \dots \subseteq I_i \subseteq I_{i+1} \subseteq \dots$$

şeklindeki bir artan zincirini alalım. $J = \bigcup_{i \geq 1} I_i$ olsun. J'nin de ideal olduğunu biliyoruz. R TİB old. $J = (a)$ o.ş. bir $a \in R$ vardır. Özel $a \in J$ old. $a \in I_n$ o.ş. bir $n \geq 1$ vardır.

$$\Rightarrow J = (a) \subseteq I_n \subseteq I_{n+1} \subseteq I_{n+2} \subseteq \dots \subseteq J$$

$$\Rightarrow J = I_n = I_{n+1} = \dots$$

$\therefore$ R bir Noether halkasıdır.