Tersine V maksimal koşulunu sağlasın.

$$v_1 \le v_2 \le \dots \le v_i \le v_{i+1} \le \dots$$

şeklinde V nin elemanlarından oluşan bir artan zincir alalım.
$\mathcal{U} = \{ v_i : i \ge 1 \} \ne \emptyset$. Kabulümüzden dolayı $\mathcal{U}$ nun bir maksimal elemanı vardır. Bu eleman v_n olsun. Her $i \ge 1$ için $v_n \le v_{n+i} \in \mathcal{U}$ old. $v_n = v_{n+i}$ olmak zorundadır. Dolayısıyla zincir durur.

$\square$

Tanım. R bir halka olsun. Eğer R'nin tüm ideallerinin kümesi $\mathcal{I}_R$ kapsama bağıntısına göre bir kısmî sıralı küme olarak artan zincir koşulunu (ya da denk olarak maksimal koşulunu) sağlıyor ise o zaman R'ye bir Noether halkası denir.
(Emmy Noether)

17. Teorem. Her TİB bir Noether halkadır.

Kanıt. R bir TİB olsun. R'nin ideallerinin

$$I_1 \subseteq I_2 \subseteq \dots \subseteq I_i \subseteq I_{i+1} \subseteq \dots$$

şeklindeki bir artan zincirini alalım. $J = \bigcup_{i \ge 1} I_i$ olsun. J'nin de ideal olduğunu biliyoruz. R TİB old. $J = (a)$ o.ş. bir $a \in R$ vardır. Özel $a \in J$ old. $a \in I_n$ o.ş. bir $n \ge 1$ vardır.

$$\Rightarrow J = (a) \subseteq I_n \subseteq I_{n+1} \subseteq I_{n+2} \subseteq \dots \subseteq J$$

$$\Rightarrow J = I_n = I_{n+1} = \dots$$

$\therefore$ R bir Noether halkasıdır.

18. Teorem Her TİB bir TGAB'dir.

Kanıt. R'nin sıfırdan farklı tersinir olmayan her elemanının sonlu tane indirgenmez elemanın çarpımı şeklinde yazılabildiğini göstereceğiz. Kabul edelim ki R'nin sonlu tane indirgenmez elemanın çarpımı şeklinde yazılamayan sıfırdan farklı ve tersinir olmayan elemanları olsun. Bu elemanların kümesine A diyelim ve

$$\Psi = \{ aR : a \in A \}$$

kümesini düşünelim. $A \neq \emptyset$ old $\Psi \neq \emptyset$. R Noether halkası old. Ψ kümesinin bir maksimal elemanı vardır. Bu eleman bR olsun. $b \in A$ old. b sonlu tane indirgenmez elemanın çarpımı şeklinde yazılamaz. Özel olarak b nin kendisi de indirgenmez olamaz. Dolayısıyla $b = cd$ o.ş tersinir olmayan c ve d elemanları vardır. d tersinir olmadığından $bR \subsetneq cR$. Benzer şekilde $bR \subsetneq dR$. $cR, dR \notin \Psi \Rightarrow c$ ve d sonlu tane indirgenemez elemanın çarpımı şeklinde yazılabilir. $b = cd$ old. bu durum bir çelişkidir.

Tetkik kısmı ödev olarak bırakılmıştır.

$\square$

7. Alıştırma Teorem 18'in kanıtını tamamlayınız.

$\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ bir TGAB olmadığından TİB de değildir.

8. Alıştırma. $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ halkasının temel olmayan bir idealini bulunuz. $f: \mathbb{Z}[x] \to \mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$, $x \mapsto \sqrt{-5}$ $\quad \ker(f) = (x^2+5)$ $\quad \mathbb{Z}[x]/(x^2+5) \cong \mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$

$I/_{(x^2+5)}$ $\quad I \supseteq (x^2+5)$

$(5,x) \supseteq (x^2+5)$ $\quad (5,x)/_{(x^2+5)}$

$(5,\sqrt{-5})$ ideali düşünülebilir.

Tanım. R bir halka ve $\emptyset \neq S \subseteq R$ olsun. Eğer

(i) $1 \in S$

(ii) her $s_1, s_2 \in S$ için $s_1 s_2 \in S$

ise S'ye R'nin bir çarpımsal kapalı alt kümesi denir.

– $f \in R \setminus \{0\}$ için $\{f^i : i \geq 0\}$ kümesi R'nin bir çarpımsal kapalı alt kümesidir.

– $P \in Spec(R)$ için $R \setminus P$ kümesi R'nin bir çarpımsal kapalı (ç.k.) alt kümesidir.

– $\{P_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda} \subseteq Spec(R)$ ise $R \setminus \left(\bigcup_{\lambda \in \Lambda} P_\lambda\right)$ R'nin bir ç.k. alt kümesidir.

19. Teorem. R bir halka, $I \trianglelefteq R$, S R'nin bir ç.k. alt kümesi olmak üzere $I \cap S = \emptyset$ olsun. O zaman $P \supseteq I$ ve $P \cap S = \emptyset$ o.ş. $P \in Spec(R)$ vardır.