$I/_{(x^2+5)}$ $\qquad I \supseteq (x^2+5)$

$(5, x) \supseteq (x^2+5) \qquad (5,x)/_{(x^2+5)}$

$(5, \sqrt{-5})$ ideali düşünülebilir.

Tanım. R bir halka ve $\emptyset \neq S \subseteq R$ olsun. Eğer

(i) $1 \in S$

(ii) her $s_1, s_2 \in S$ için $s_1 s_2 \in S$

ise S'ye R'nin bir çarpımsal kapalı alt kümesi denir.

– $f \in R \setminus \{0\}$ için $\{ f^i : i \geq 0 \}$ kümesi R'nin bir çarpımsal kapalı alt kümesidir.

– $P \in Spec(R)$ için $R \setminus P$ kümesi R'nin bir çarpımsal kapalı (ç.k.) alt kümesidir.

– $\{P_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda} \subseteq Spec(R)$ ise $R \setminus \left(\bigcup_{\lambda \in \Lambda} P_\lambda \right)$ R'nin bir ç.k. alt kümesidir.

19. Teorem. R bir halka, $I \trianglelefteq R$, S R'nin bir ç.k. alt kümesi olmak üzere $I \cap S = \emptyset$ olsun. O zaman $P \supseteq I$ ve $P \cap S = \emptyset$ o.ş. $P \in Spec(R)$ vardır.

Kanıt. $\Psi = \{ J \trianglelefteq R : J \supseteq I \text{ ve } J \cap S = \emptyset \}$ olsun. $I \in \Psi$ old. $\Psi \neq \emptyset$. $\{J_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ Ψ içinde bir zincir olsun. $K = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} J_\lambda$ olsun. $K \trianglelefteq R$ old. biliyoruz. Ayrıca $K \supseteq I$ ve $K \cap S = \emptyset$ olduğunu görmek zor değildir. Böylece K, $\{J_\lambda\}$ zincirinin bir üst sınırıdır. Zorn Lemması gereğince Ψ'nin bir maksimal elemanı vardır. Bu elemanı P ile gösterelim. $a, b \in R$ olmak üzere $ab \in P$ olsun. Kabul edelim ki $a, b \notin P$ olsun.

$$P \subsetneq P + Ra \quad \text{ve} \quad P \subsetneq P + Rb$$

olur. $P+Ra$, $P+Rb \notin \Psi \Rightarrow (P+Ra) \cap S \neq \emptyset$, $(P+Rb) \cap S \neq \emptyset$

$s_1 \in (P+Ra) \cap S$ ve $s_2 \in (P+Rb) \cap S$ olsun.

$s_1 = p_1 + r_1 a$ ve $s_2 = p_2 + r_2 b$ o.ş. $p_1, p_2 \in P$, $r_1, r_2 \in R$ elemanları vardır.

$$s_1 s_2 = (p_1 + r_1 a)(p_2 + r_2 b) = \underbrace{p_1 (p_2 + r_2 b)}_{\in P} + \underbrace{r_1 a p_2}_{\in P} + \underbrace{r_1 r_2 ab}_{\in P} \in P \cap S$$

Fakat $P \cap S = \emptyset$ old. bu bir çelişkidir.

$\therefore P \in \operatorname{Spec}(R)$.

$\square$

R halka ve $I \trianglelefteq R$

$$\sqrt{I} = \{ r \in R : r^n \in I \text{ o.ş } n \geq 1 \text{ tamsayısı var} \}$$

Tanım: R bir halka ve $I \trianglelefteq R$ olsun.

$$\operatorname{Var}(I) = \{ P \in \operatorname{Spec}(R) : P \supseteq I \}$$

kümesine I nın varyetesi denir.

20. Teorem. R bir halka ve $I \trianglelefteq R$ olsun. O zaman

$$\sqrt{I} = \bigcap_{P \in Var(I)} P$$

Kanıt.

$r \in \sqrt{I}$ ve $P \in Var(I)$ olsun. $r^n \in I$ o.ş. $n \geq 1$ tamsayısı vardır. $r^n \in I \subseteq P \Rightarrow r \in P \Rightarrow \sqrt{I} \subseteq \bigcap_{P \in Var(I)} P$

$r \notin \sqrt{I}$ alalım $r \notin \bigcap_{P \in Var(I)} P$?

$S = \{r^n : n \geq 0\}$ olsun. S R'nin bir ç.k. alt kümesidir ve $I \cap S = \phi$ din Teorem 19'dan $P \cap S = \phi$ o.ş. $P \in Var(I)$ bulunabilir. $r \notin P$ olacağından $r \notin \bigcap_{P \in Var(I)} P$ elde edilir.

$$\therefore \sqrt{I} = \bigcap_{P \in Var(I)} P.$$

□

21. Sonuç. R bir halka olsun. Buna göre

$$\sqrt{0} = \bigcap_{P \in Spec(R)} P \quad (R\text{'nin nil radikali})$$

olur.

22. Sonuç. R bir halka $I, J \trianglelefteq R$ olmak üzere $I \subseteq J$ olsun. O zaman

$$\sqrt{J/I} = \sqrt{J}/I$$

olur.