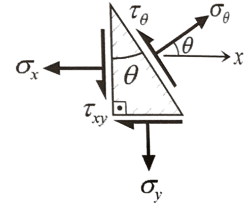


PROBLEM 17-3 Düzlem gerilme durumunda gerilme bileşenleri $\sigma_x = 180 \text{ N/mm}^2$, $\sigma_y = 60 \text{ N/mm}^2$ ve $\sigma_\theta = 112.8 \text{ N/mm}^2$ Şekil (17-P3) de görülmektedir. $\tan \theta = \frac{4}{3}$ olduğuna göre,

- τ_{xy} ve τ_θ gerilmelerini hesaplayınız,
- Asal gerilmeleri ve doğrultularını bulunuz,
- Bütün sonuçları Mohr dairesi üstünde gösteriniz.



Şekil (17-P3)

ÇÖZÜM: Bilinenler,

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= 180 \text{ N/mm}^2 \\ \sigma_y &= 60 \text{ N/mm}^2 \\ \sigma_\theta &= 112.8 \text{ N/mm}^2 \end{aligned} \right\} \quad \left. \begin{aligned} \cos \theta &= \frac{3}{5} \\ \sin \theta &= \frac{4}{5} \end{aligned} \right\} \quad \tan \theta = \frac{4}{3}$$

Dönüşüm bağıntılarında (P3.1) ve (P3.2) kullanılırsa,

$$\sigma_\theta = \sigma_x \cos^2 \theta + \sigma_y \sin^2 \theta + 2\tau_{xy} \sin \theta \cos \theta$$

$$\rightarrow 112.8 = 180 \times \frac{9}{25} + 60 \times \frac{16}{25} + 2\tau_{xy} \left(\frac{12}{25} \right) \quad (\text{P3.3})$$

$$\tau_\theta = -(\sigma_x - \sigma_y) \sin \theta \cos \theta + \tau_{xy} (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta)$$

$$\rightarrow \tau_\theta = -(180 - 60) \frac{12}{25} + \tau_{xy} \left(\frac{9}{25} - \frac{16}{25} \right) \quad (\text{P3.4})$$

Yazılır. (P3.3) ve (P3.4) den kayma gerilmeleri çözümlerse:

$$\tau_{xy} = 10 \text{ N/mm}^2 \quad \text{ve} \quad \tau_\theta = -60.4 \text{ N/mm}^2 \quad (\text{P3.5})$$

b). Asal gerilme bağıntısında (P3.1) ile (P3.5a) yerleştirilirse,

$$\sigma_{1,2} = \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y) \pm \sqrt{\left[\frac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_y) \right]^2 + \tau_{xy}^2} = 120 \pm \sqrt{60^2 + 10^2} \rightarrow \begin{cases} \sigma_1 \cong 181 \text{ N/mm}^2 \\ \sigma_2 \cong 59 \text{ N/mm}^2 \end{cases}$$

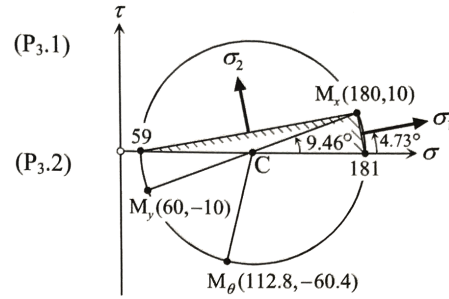
biçiminde bulur. Asal düzlem doğrultuları ise,

$$\tan(2\phi_0) = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} = \frac{20}{180 - 60} = \frac{1}{6} \rightarrow 2\phi_0 = 9.46^\circ \quad (\text{P3.6})$$

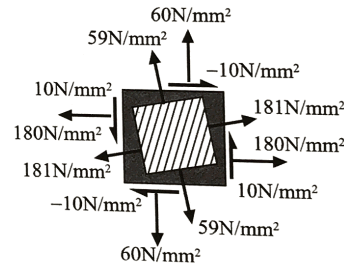
olur. $2\phi_0$ in ölçüleceği bölgeyi belirlemek için, trigonometrik ilişki $\tan(2\phi_0) = \sin(2\phi_0) / \cos(2\phi_0)$ ile (P3.6) karşılaştırılırsa $\sin(2\phi_0) > 0$ ve $\cos(2\phi_0) > 0$ olduğu görülüyor ve açı I. bölgede ölçülür.

c). Mohr dairesi Şekil.(P3.a) da çizilmiştir. Ayrıca Şekil (P3.b) de yönlendirilmiş elemanda gerilmeler görülmektedir. En büyük ve en küçük kayma gerilmeleri ise,

$$\tau_{\max/\min} = \pm \frac{1}{2} |\sigma_1 - \sigma_2| = 61 \text{ N/mm}^2$$

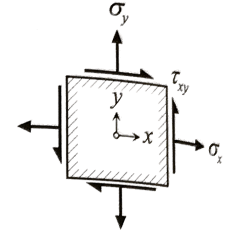


Şekil (P3.a)



Şekil (P3.b)

PROBLEM 17-7 Şekil (17-P7) deki düzlem gerilme halinde (x, y) takımında gerilme bileşenleri $\sigma_x = 6 \text{ kN/cm}^2$, $\sigma_y = -2 \text{ kN/cm}^2$ ve $\tau_{xy} = -3 \text{ kN/cm}^2$ dir. Bu durumda,
a). σ_1 , σ_2 asal gerilmeleriyle, bunların asal doğrultuları bulunuz ve bu sonuçları yönlendirilmiş bir eleman üzerinde gösteriniz.
b). Mohr dairesini çiziniz.



Şekil (17-P7)

ÇÖZÜM: a). Gerilme bileşenleri,

$$\sigma_x = 6 \text{ kN/cm}^2, \quad \sigma_y = -2 \text{ kN/cm}^2, \quad \tau_{xy} = -3 \text{ kN/cm}^2 \quad (\text{P7.1})$$

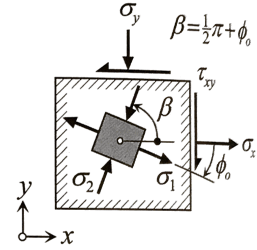
dir. Buna göre asal gerilmeler,

$$\begin{aligned} \sigma_{1,2} &= \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y) \pm \sqrt{\left[\frac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_y)\right]^2 + \tau_{xy}^2} \\ &= \frac{1}{2}[6 + (-2)] \pm \sqrt{\left[\frac{1}{2}(6 - (-2))\right]^2 + (-3)^2} = (2 \pm 5) \text{ kN/cm}^2 \\ \Rightarrow \sigma_1 &= 7 \text{ kN/cm}^2 \quad \text{ve} \quad \sigma_2 = -3 \text{ kN/cm}^2 \end{aligned}$$

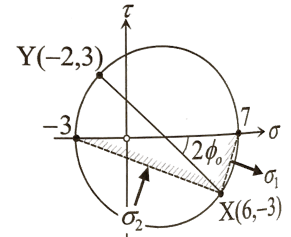
olur. En büyük normal gerilmenin doğrultusu için (P7.1) den yararlanarak,

$$\tan(2\phi_0) = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} = \frac{2(-3)}{6 - (-2)} = \frac{-6}{8} \Rightarrow \phi_0 = -18.43^\circ$$

elde edilir. Burada $2\phi_0$ in nasıl ölçüleceği önemlidir. Yukarıdaki denklem ile $\tan(2\phi_0) = \sin(2\phi_0) / \cos(2\phi_0)$ karşılaştırılırsa $\sin(2\phi_0) < 0$ ve $\cos(2\phi_0) > 0$ olduğu görülür. Şu halde $2\phi_0$ açısının ölçümü IV. bölgededir. Ya da bir geniş açı olarak $360^\circ - 2\phi_0 = 323.14^\circ$ diye matematik pozitif yönde de ölçülebilir. Sonuçta yönlendirilmiş eleman Şekil (P7.a) da görüldüğü gibi çizilir. Burada $\beta = \frac{1}{2}\pi + \phi_0$ dir.



Şekil (P7.a)



Şekil (P7.b)

b). Sonuçlar Şekil (P7.b) deki Mohr dairesi üstünde görülmektedir.

PROBLEM 17-8 Şekil (17-P8) deki düzlem gerilme halinde (x, y) eksen takımında gerilme bileşenleri $\sigma_x = 6 \text{ kN/cm}^2$, $\sigma_y = 3 \text{ kN/cm}^2$ ve $\tau_{xy} = 8 \text{ kN/cm}^2$ ise,

- Yatayla $\theta = 45^\circ$ yapan kesitteki σ_θ ve τ_θ gerilmelerini bulunuz,
- Asal gerilmeleri ve doğrultularını hesaplayınız,
- Bütün sonuçları Mohr dairesi üzerinde gösteriniz.

ÇÖZÜM: Yatay x eksenini ile keyfi bir φ açısı yapan ξ doğrultusundaki gerilmeler için dönüşüm bağıntıları,

$$\left. \begin{aligned} \sigma_\xi &= \sigma_x \cos^2 \varphi + \sigma_y \sin^2 \varphi + 2\tau_{xy} \sin \varphi \cos \varphi \\ \tau_\xi &= -(\sigma_x - \sigma_y) \sin \varphi \cos \varphi + \tau_{xy} (\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi) \end{aligned} \right\} \quad (\text{P8.1})$$

a) (P8.1) de $\theta = 45^\circ$ doğrultusu ve $\sigma_x = 6 \text{ kN/cm}^2$, $\sigma_y = 3 \text{ kN/cm}^2$, $\tau_{xy} = 8 \text{ kN/cm}^2$ yerleştirilirse,

$$\sigma_\theta = 6 \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right)^2 + 3 \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right)^2 + 2 \times 8 \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right)^2 \Rightarrow \sigma_\theta = 12.5 \text{ kN/cm}^2$$

$$\tau_\theta = -(6-3) \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right)^2 + 8 \left[\left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right)^2 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right)^2 \right] \Rightarrow \tau_\theta = -1.5 \text{ kN/cm}^2$$

b) Asal gerilmeler: $\sigma_{1,2} = \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y) \pm \sqrt{\left[\frac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_y) \right]^2 + \tau_{xy}^2}$

$$= \frac{1}{2}(6+3) \pm \sqrt{\left[\frac{1}{2}(6-3) \right]^2 + 8^2}$$

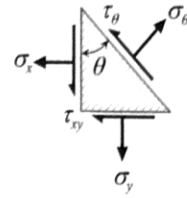
$$\Rightarrow \sigma_1 \cong 12.64 \text{ kN/cm}^2, \quad \sigma_2 \cong -3.64 \text{ kN/cm}^2$$

biçiminde elde edilir. Asal doğrultman ise,

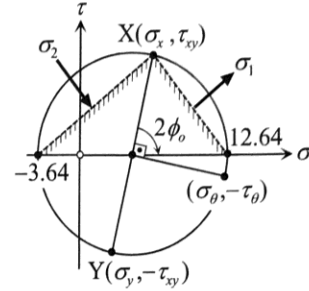
$$\tan(2\phi_o) = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} = \frac{2 \times 8}{6-3} = \frac{16}{3} \Rightarrow \phi_o = 39.69^\circ$$

dir. Tanım gereği $\tan(2\phi_o) = \sin(2\phi_o) / \cos(2\phi_o)$ dir. Şu halde yukarıdaki bağıntıdan $\sin(2\phi_o) > 0$ ve $\cos(2\phi_o) > 0$ olduğu görülür. Şu halde açı I. bölgede olacaktır.

c) Gerilme haline ait Mohr grafik tasviri Şekil (P8.a) da çizilmiştir.



Şekil (17-P8)

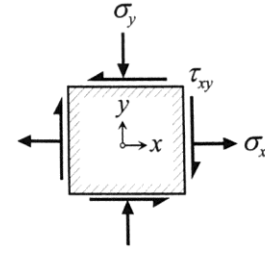


Şekil (P8.a)

PROBLEM 17-9 Şekil (17-P9) daki düzlem gerilme durumunda gerilme bileşenleri $\sigma_x = 7 \text{ N/mm}^2$, $\sigma_y = 7 \text{ N/mm}^2$ ve $\tau_{xy} = 24 \text{ N/mm}^2$ dir.

- Normal gerilmenin sıfır olduğu doğrultuyu belirleyiniz,
- Normal gerilmenin kayma gerilmesine eşit olduğu doğrultuyu bulunuz,
- Kayma gerilmesinin sıfır olduğu doğrultuyu hesaplayınız.

ÇÖZÜM: Normali yatay x eksenine ile keyfi bir θ açısı yapan eğik düzlemdeki gerilmeler için dönüşüm bağıntıları,



Şekil (17-P9)

$$\left. \begin{aligned} \sigma_\theta &= \sigma_x \cos^2 \theta + \sigma_y \sin^2 \theta + 2\tau_{xy} \cos \theta \sin \theta \\ \tau_\theta &= -(\sigma_x - \sigma_y) \cos \theta \sin \theta + \tau_{xy} (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) \end{aligned} \right\} \quad (P_9.1)$$

dır. Şekil (17-P9) daki yönlerle göre gerilme bileşenleri,

$$\sigma_x = 7 \text{ N/mm}^2, \sigma_y = -7 \text{ N/mm}^2, \tau_{xy} = -24 \text{ N/mm}^2 \quad (P_9.2)$$

- $\sigma_\theta = 0$ koşulunu sağlayacak θ açısını bulmak için, (P_{9.1}a) da (P_{9.2}) yerleştirilirse,

$$0 = 7 \cos^2 \theta + 7 \sin^2 \theta + 48 \cos \theta \sin \theta \Rightarrow 24 \sin(2\theta) - 7 \cos(2\theta) = 0 \Rightarrow \theta = 8.13^\circ$$

bulunur. Bu sonuç $\cos(2\theta) = \cos^2 \theta - \sin^2 \theta$, $\sin(2\theta) = 2 \sin \theta \cos \theta$ trigonometrik bağıntılarından yararlanılarak elde edilmiştir.

- (P_{9.1}) de (P_{9.2}) yerleştirilip, ifade 2θ cinsinden düzenlenirse,

$$\sigma_\theta = 7 \cos^2 \theta - 7 \sigma_y \sin^2 \theta - 48 \cos \theta \sin \theta = 24 \sin(2\theta) - 7 \cos(2\theta)$$

$$\tau_\theta = -14 \cos \theta \sin \theta + 24(\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) = 24 \cos(2\theta) + 7 \sin(2\theta)$$

olur. $\sigma_\theta = \tau_\theta$ koşuluna sağlayacak θ açısını bulmak için, yukarıdaki denklemlerin sağ tarafları birbirlerine eşitlenirse:

$$17 \sin(2\theta) - 31 \cos(2\theta) = 0 \Rightarrow \tan(2\theta) = \frac{31}{17} \Rightarrow \theta = 30.63^\circ$$

- $\tau_\theta = 0$ koşulunu sağlayacak θ açısını bulabilmek için (P_{9.1}b) de (P_{9.2}) değerleri yerleştirilip, ifade 2θ cinsinden düzenlenirse,

$$24 \cos(2\theta) + 7 \sin(2\theta) = 0 \Rightarrow \tan(2\theta) = -\frac{24}{7} \Rightarrow \theta \cong -36.87^\circ$$

bulunur. Aynı sonuç şöyle de bulunabilir. $\tau_\theta = 0$ ise, bu aynı zamanda asal düzlemdir ve o zaman doğrultman ifadesinden:

$$\tan(2\phi_o) = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} = \frac{2(-24)}{7 - (-7)} \Rightarrow \phi_o \cong -36.87^\circ$$