14.02.2017
Salı

$\mathbb{R}$

tersi yok

$(\mathbb{N}=\{0,1,2,\dots\}, +, \cdot)$

$(\mathbb{Z}=\{\dots,-3,-2,-1,0,1,2,\dots\}, +, \cdot)$

$(\mathbb{Q}=\{\frac{p}{q} : p,q \in \mathbb{Z}, q\neq 0\}, +, \cdot)$

$((\mathbb{R}=\mathbb{Q}\cup\mathbb{Q}', +, \cdot), <) \Rightarrow a<b \Leftrightarrow b-a>0$

Örnek: $\sqrt{2}$ irrasyoneldir. $\sqrt{2}$ rasyonel olsun.

$\sqrt{2}=\frac{a}{b}$, $a,b\in\mathbb{Z}$ obeb$(a,b)=1$, $b\neq 0$

$$2=\frac{a^2}{b^2} \Rightarrow a^2=2b^2$$
$$\Rightarrow a \text{ cift}$$
$$\Rightarrow b \text{ cift}$$
$$\Rightarrow \text{obeb } \lightning$$

Örnek: $\{p\in\mathbb{Q} : p^2<2\}$ A'nın en büyük elemanı olmadığını gösteriniz.

$$q=p-\frac{p^2-2}{p+2} \Rightarrow q>p$$

Eğer $q\in A$ ise herhangi bir p elemanı için bir q vardır öyle ki $q>p$ olur.

$$q=p-\frac{p^2-2}{p+2}=\frac{2p+2}{p+2}$$

$$q^2=4\frac{p^2+2p+1}{(p+2)^2} \Rightarrow q^2-2=\frac{4p^2+8p+4-2p^2-8p-8}{(p+2)^2}$$

$$=\frac{2p^2-4}{(p+2)^2}=\frac{2(p^2-2)}{(p+2)^2}<0 \Rightarrow q\in A$$

Örnek: $B=\{p\in\mathbb{Q} : p^2>2\}$ en küçük elemanı yoktur.

$$q=p-\frac{p^2-2}{p+2} \rightarrow q^2-2=\frac{2(p^2-2)}{(p+2)^2}>0$$

$$\Rightarrow q<p \qquad \Rightarrow q\in B$$

RUDİN

Tanım: (Sıralama Bağıntısı): $S \neq \emptyset$ bir küme o.ü $<$ bağıntısı

1) Yansıma : $a<a$

2) Ters Simetri ; $a<b$ ve $b<a \Rightarrow a=b$

($\forall a,b \in S$ $a<b$ veya $b<a$ veya $a=b$)

3) Geçişme ; $\forall a,b,c \in S$ için $a<b$ ve $b<c \Rightarrow a<c$

koşulları sağlanıyor ise $(S,<)$ tam sıralı küme denir.

$(\phi,<)$, $p<q \Leftrightarrow q-p>0$

Tanım: $(S,<)$ kümesi için en az bir tane x vardır öyle ki $\forall a \in S$ için $a<x$ ise S_1 kümesi üstten sınırlıdır ve x elemanına S'nin üst sınırı denir.

En az bir tane y vardır öyle ki $\forall a \in S_1$ için $y>a$ ise S_1 kümesi alttan sınırlıdır ve y elemanına S'nin alt sınırı denir.

Tanım: $(S,<)$ kümesi için S_1 üstten sınırlı alt kümesi olsun.

1) $k \in S$, S_1'in üstten sınırı

2) Eğer $k' \in S$ S_1'in üstten sınırı ise $k<k'$ olmalıdır.

[Eğer $k'<k$ ise k', S_1'in üst sınırı olamaz.] koşulları sağlanıyor ise $k \in S$'ye S_1 kümesinin en küçük üst sınırı denir.

$k = \sup S_1$

Eğer $k \in S_1$ ise $\sup S_1 = \max S_1$

önemli bak!

$A = \left\{ \frac{1}{n} ; n \in \mathbb{N} \right\} \subset \mathbb{R}$

$\sup A = \max A = 1$

$\inf A = 0$

$\min A$ YOK!

$A = \{ \overset{p\in\mathbb{R}}{p \in \mathbb{Q}} : p^2 < 2 \}$, $B = \{ p \in \mathbb{Q} : p^2 > 2 \} \subset \phi$

Eğer $k \in \mathbb{Q}$ A'nın üst sınırı ise $k \in B^{-}$'dir. ($\subset \mathbb{R}$ $\sup A = \sqrt{2}$)

B'nin tüm elemanları A'nın üst sınırı. B'nin en küçük elemanı olmadığından A'nın sup'u yoktur. Aynı şekilde B'nin inf yoktur.

Tanım: $(S, <)$ sıralı kümesi olsun. Eğer $S_1 \subset S$, $S_1 \neq \phi$ her üstten sınırlı alt kümesi için $\sup S_1$ var ise S sıralı kümesi en küçük üst sınır (eküs) özelliğini sağlıyor olur.

$(\mathbb{R}, <)$, $(\mathbb{Z}, <)$ eküs özelliğini sağlar.

$(\phi, <)$ eküs özelliğini sağlamaz.

Teorem: $(S, <)$ kümesi eküs özelliğine sahip ise ebas özelliğine de sahiptir (alttan sınırlı her alt kümesinin inf. vardır.)

(S kümesi eküs özelliğine sahip sıralı bir küme ve $B \neq \phi \subset S$ alttan sınırlı olsun. L kümesi B'nin tüm alt sınırlarının kümesi ise;

$\sup L \in S$ vardır ve $\sup L = \inf B$ olur.

B alttan sınırlı ise bir tane $a \in S$ vardır öyle ki $\forall b \in B$ için $a < b$ olur.

$\Rightarrow a \in L \Rightarrow L \neq \phi$. L'den alınan her $a \in L$ için $a < b$, $\forall b \in B$.

$\Rightarrow$ B'nin tüm elemanları L'nin üst sınırıdır.

$\Rightarrow$ L üstten sınırlı

$\Rightarrow$ sup L var çünkü eküs özelliği.

→

Marsten

$\alpha = \sup L$ olsun. $\alpha \in L$ olsun. α L'nin üst sınırı $\Rightarrow \alpha \in B$ olmalıdır.

$\Rightarrow a \leq b \quad \forall b \in B$.

$\Rightarrow \alpha$ B'nin alt sınırıdır.

$\Rightarrow \alpha \in L$ olmalıdır. ↯

$\Rightarrow \alpha \in L$

$\Rightarrow \sup L = \max L$.

α B'nin alt sınırı olsun ve $\exists \beta$ vardır öyle ki $\alpha < \beta$ olsun.

Fakat $\alpha = \sup L > \beta \quad \forall \beta \in L$ ↯

$\Rightarrow \alpha$ alt sınırların en büyüğüdür.

$\Rightarrow \alpha = \inf B$

$\Rightarrow (S, <)$ kümesi ebas özelliğine sahiptir.

Cisim

Tanım: $F \neq \emptyset$ kümesi $+$ ve $\bullet$ işlemleri için aşağıdaki aksiyomları sağlıyorsa F'e bir cisim denir.

+ Aksiyomları

(A1) $x, y \in F \Rightarrow x + y \in F$

(A2) $\forall x, y \in F$, $x + y = y + x$

(A3) $\forall x, y, z \in F$, $(x+y)+z = x+(y+z)$

(A4) $\forall x \in F$ için $0 + x = x + 0 = x$ o.s. bir $0 \in F$ vardır.

(A5) $\forall x \in F$ için $-x \in F$, $x + (-x) = 0 = (-x) + x$

• Aksiyomları

(M1) $x, y \in F \Rightarrow x.y \in F$

(M2) $\forall x, y \in F \Rightarrow xy = yx$

(M3) $\forall x, y, z \cdot (xy)z = x(yz)$

(M4) $\forall x \in F$ için $x.1 = x = 1.x$ o.s. $1 \neq 0$ vardır.

(M5) $\forall x \neq 0 \in F$ için $\frac{1}{x} \in F$ vardır;

$$x \cdot \frac{1}{x} = 1 = \frac{1}{x} \cdot x$$

(D) Dağılma özelliği $\forall x, y, z \in F$ için $x(y+z) = xy + x \cdot z = (y+z) \cdot x$

<u>Örnek:</u> $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{Q}$ birer cisimdir.

<u>Önerme:</u> Toplama aksiyomları aşağıdaki koşulları gerektirir.

(a) $x+y = x+z \Rightarrow y = z$

(b) $x+y = x \Rightarrow y = 0$

(c) $x+y = 0 \Rightarrow x = -y$

(d) $-(-x) = x$

<u>İspat</u> ⇒ a) $y = y+0 = y+(-x)+x = y+x+(-x) = z+\cancel{x}+\cancel{(-x)} = z$

b) $z = 0$ alınırsa.

c) $z = -x$ alınırsa.

d) $(-x) + -(-x) = 0 = x + (-x)$

$\Rightarrow x = -(-x)$

<u>Önerme:</u> Çarpma aksiyomları aşağıdaki koşulları gerektirir.

a) $x \neq 0$ ve $xy = xz \Rightarrow y = z$

b) $x \neq 0$ ve $xy = x \Rightarrow y = 1$

c) $x \neq 0 \Rightarrow \frac{1}{(1/x)} = x$'tir.

<u>Tanım:</u> Eğer F cismi

i) $x, y, z \in F$ ve $y < z \Rightarrow x+y < x+z$

ii) $x \in F$, $y \in F$, $x > 0$, $y > 0 \Rightarrow xy > 0$

Koşullarını sağlıyorsa F'e sıralı cisim denir.

$$\left.\begin{array}{l} x > 0 \text{ ise } x\text{'e pozitif} \\ x < 0 \text{ ise } x\text{'e negatif} \end{array}\right\} \text{denir.}$$

ÖR: $\mathbb{R}, \mathbb{Q}$ sıralı cisimdir.

$\mathbb{C}$ sıralı cisim değildir. Farz edelim ki $\mathbb{C}$ üzerinde bir $\leq$ sıralaması olsun.

(i) $i.i > 0.i$ olsun. $i.i = i^2 = -1 > 0 \Rightarrow -1+1 > 0+1 \Rightarrow 0 > 1$ ↯

(ii) $i < 0$ olsun . . .

Önerme- Aşağıdaki koşullar her sıralı cisim için doğrudur.

a) $x > 0 \Rightarrow -x < 0$

b) $x > 0$, $y < z \Rightarrow xy < xz$

c) $x < 0$ ve $y < z \Rightarrow xy > xz$

d) $x \neq 0$ ise $x^2 > 0$ $(1 > 0)$

e) $0 < x < y \Rightarrow 0 < 1/y < 1/x$

1) $a, b \in \mathbb{R}$ olmak üzere, "$\underbrace{\forall \varepsilon > 0 \text{ için } a \leq b+\varepsilon}_{p} \Rightarrow \underbrace{a \leq b}_{q}$" olduğunu gösteriniz.

İspat= $\forall \varepsilon > 0$ için $a \leq b + \varepsilon$ olsun. Tersine $a > b$ olduğunu kabul edelim. Buradan $a - b > 0$, $\varepsilon = \frac{a-b}{2} > 0$. Varsayımdan,

$$a \leq b + \varepsilon = b + \frac{a-b}{2} = \frac{a+\overset{b<a}{b}}{2} < \frac{a+a}{2} = a$$

$$a < a \rightarrow\leftarrow$$

O halde $a \leq b$ olmalıdır. ✓

2) $A, B \subseteq \mathbb{R}$ üstten sınırlı olsunlar. $C = \{a+b : a \in A, b \in A\}$ olsun. C'nin üstten sınırlı olduğunu ve $\sup C = \sup A + \sup B$ olduğunu gösteriniz.

İspat: $c \in C$ alalım. $c = a+b$ o.ş. $a \in A$ ve $b \in B$ vardır.

A ve B üstten sınırlı olduğu için $\sup A$ ve $\sup B$ vardır.

$\forall a \in A$ için $a \leq \sup A$

$\forall b \in B$ için $b \leq \sup B$

$c \leq a+b \leq \sup A + \sup B$

$\sup A + \sup B$ c için bir üst sınırdır. O halde $\sup C$ vardır

O halde $\sup C \leq \sup A + \sup B$ (*)

Amaç $\sup C \geq \sup A + \sup B$ (?)

$\varepsilon > 0$ alalım. $\sup A - \varepsilon/2$. A için bir üst sınır olamaz (Çünkü ekü̈s supA olmak zorunda.) O halde $\exists a \in A;\ \sup A - \frac{\varepsilon}{2} < a$ (*)

$\sup B - \frac{\varepsilon}{2}$ B için bir üst sınır olamaz. O halde $\exists a \in A;$

$\sup B - \frac{\varepsilon}{2} < b$ (**)

(*) ve (**)'dan $\sup A + \sup B - \varepsilon < a + b$. Yani;

$\sup A + \sup B < \underbrace{a+b}_{c} \overset{\in C}{} + \varepsilon < \sup C + \varepsilon$ (##)

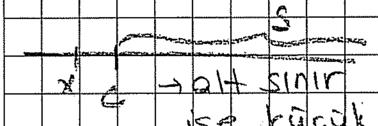
$\forall \varepsilon > 0$ için $\sup A + \sup B < \sup C + \varepsilon$ olduğundan (1)'den

$\sup A + \sup B \leq \sup C$ elde edilir. (*) ve (**)'den eşitlik elde edilir.

3) $b = \inf(S) \Leftrightarrow b$, S için bir alt sınırdır ve her $\varepsilon > 0$ için $x < b + \varepsilon$ o.s. bir $x \in S$ vardır.

İspat: ($\Rightarrow$:) $b = \inf(S)$ olsun. Inf tanımından b, S için bir alt sınırdır. $\varepsilon > 0$ alalım. $b + \varepsilon$ bir alt sınır olamaz. (Çünkü en küçük alt sınır b'dir.) O halde $x < b + \varepsilon$ o.s. bir $x \in S$ vardır.

($\Leftarrow$:) $\forall \varepsilon > 0$ için $x < b + \varepsilon$ o.s. bir $x \in S$ ve b'nin bir alt sınır olduğunu kabul edelim. Amaç: b = inf b'nin alt sınır olduğunu biliyoruz. b en büyük alt sınır mıdır? Tersine b en büyük alt sınır olmasın yani c S'nin bir alt sınırı ve $c > b$ olsun. $\Rightarrow \varepsilon = c - b > 0$. $\varepsilon = c - b > 0$ için varsayımdan $\exists x \in S;\ \underbrace{x < b + \varepsilon = b + c - b = c}$



→ alt sınır ise küçük sayı olmaz

fakat $x < c$ dedik

$\exists x \in S;\ x < c$ ↯

(c'nin alt sınır olması ile çelişir.)

Sıra

1) $a<b \Leftrightarrow b-a>0$

2) Cisim: $(\mathbb{K},+,\cdot)$

3) $x<y \Rightarrow x+z<y+z \quad \forall z\in\mathbb{K}$

$x<y \Rightarrow \alpha x<\alpha y \quad \forall\alpha\in\mathbb{K}_+$

4) Tamlık Aksiyomu: Her artan üstten sınırlı dizinin (x_n) supremumu vardır

1, 2, 3, 4 koşulları sağlanıyor ise tam, sıralı cisimdir. (complete ordered field)

$\mathbb{R}$ sayılar bir tam, sıralı cisimdir. (tek! sayı sistemidir.)

$(\mathbb{R},+,\cdot)$

$(\mathbb{Q},+,\cdot)$ → cisim
→ sıra
→ 3
→ tam değil.

$(\mathbb{C},+,\cdot)$ → cisim

$\mathbb{Q}\subset\mathbb{R}$ alt cismi
$\mathbb{R}\subset\mathbb{C}$

Tanım: Archimedeen (Arşimet) Özelliği

$(\mathbb{K},+,\cdot)$ sıralı cismi olsun. Her $x,y\in\mathbb{R}$, $x>0$ için bir tane $n\in\mathbb{N}$ vardır öyle ki $nx>y$ koşulu sağlanıyor ise $\mathbb{R}$ sıralı cismi Arşimet özelliği sağlar denir.

Teorem: $\mathbb{R}$ reel sayılar cismi Arşimet özelliğini sağlar.

Proof: $\mathbb{R}$ Arşimet özelliğini sağlamasın: $\exists x,y\in\mathbb{R}$ $x>0$, $\forall n\in\mathbb{N}$ için $nx\leq y$.

$A=\{nx : n\in\mathbb{N}\}\subset\mathbb{R}$. $\exists y\in\mathbb{R}$ var öyle ki $\forall a\in A$ için $a\leq y$ A kümesi üstten sınırlı ekü's özelliğinden $\alpha=\sup A$ vardır.

$x>0 \Leftrightarrow -x<0$

$\Rightarrow \alpha-x<\alpha$

$\Rightarrow \alpha-x$ A'nın üst sınırı değildir

$(\exists a'\in A$ vardır öyle ki $\alpha-x\leq a')$

$\Rightarrow \exists m \in \mathbb{N}$ vardır öyle ki

$\alpha - x \le mx$

$\Rightarrow \alpha - x + x \le mx + x$

$\Rightarrow \alpha \le \underbrace{(m+1)x}_{\in A}$ ↯

<u>ÖR1</u> $B = \left\{ -\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N} \right\}$

$B = \left\{ -1, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, \dots \right\}$ sup $B = 0$ ispatlayınız.

0 B'nin üst sınırdır. $\exists x < 0$ öyle ki x B'nin üst sınırı olsun.

$-x > 0$, $1 \in \mathbb{R}$ ve $\mathbb{R}$'nin Arşimet özelliğinden, $\exists n \in \mathbb{N}$ vardır öyle ki $n(-x) > 1$

$\Rightarrow -nx > 1$

$\Rightarrow x < -\frac{1}{n}$, x B'nin üst sınırı olamaz. ↯

——o——

$-nx - 1 > 1 - 1$

$\Rightarrow -1(nx+1) > 0$

$\Rightarrow nx + 1 < 0$

$\Rightarrow nx + 1 - 1 < 0 - 1$

$\Rightarrow nx < -1$

$\Rightarrow \frac{1}{n} \cdot nx < -1 \cdot \frac{1}{n}$

——o——

$\Rightarrow \sup B = 0.$

<u>Teorem</u>: Eğer $x < y \in \mathbb{R}$ ise bir tane $q \in \mathbb{Q}$ vardır öyle ki $x < q < y$ olur.

İspat: $y - x > 0 \Rightarrow$ Arşimet özelliğinden $\exists n \in \mathbb{N}$ vardır öyle ki $n(y-x) > 1 \Rightarrow ny > nx + 1$

[A.Ö, $\forall x > 0, y \Rightarrow \exists n$ öyle ki $nx > y$].

$1 > 0$, nx veya $-nx$ $\Rightarrow \exists m_1$ vardır öyle ki

$m_1 . 1 > nx$

$\exists m_2$ vardır öyle ki

$m_2 . 1 < -nx$

$\Rightarrow -m_2 < nx < m_1$

$-m_2 < nx < m_1$

$\exists m \in \mathbb{Z}$ vardır öyle ki $-m_2 \leq m \leq m_1$

öyle ki $m-1 \leq nx < m$

$nx < m \leq nx + 1 < ny$

$\Rightarrow nx < m < ny$

$\Rightarrow x < \frac{m}{n} = q < y$

Sonuç!; $\forall x, y \in \mathbb{R}$, $x < y \Rightarrow \exists j \in \mathbb{Q}$ öyle ki $x < j < y$ olur.

$x < y \Rightarrow \sqrt{2}x < \sqrt{2}y$

$\exists q \in \mathbb{Q}$ vardır öyle ki

$\sqrt{2}x < q < \sqrt{2}y$

$\Rightarrow x < \underbrace{\frac{q}{\sqrt{2}}}_{\text{irrasyonel.}} < y$

$\mathbb{R}^n$ Topolojisi:

$\dim \mathbb{R}^n = n$

$\mathbb{R}^n = \mathbb{R} \times \dots \times \mathbb{R}$

$\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$

$+ : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$

$(x, y) \longmapsto x + y = (x_1 + y_1, \dots, x_2 + y_2)$

$\cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$

$(\alpha, x) \longrightarrow \alpha . x = (\alpha x_1, \dots, \alpha x_n)$

$(\mathbb{R}^n, +, \cdot)$ $\mathbb{R}$ üzerinde tanımlı vektör uzayı.

$(\mathbb{R}, |\cdot|)$ norm, metrik.

$(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$, $(\mathbb{R}^n, d)$, $(\mathbb{R}^n, \langle , \rangle)$

Tanım: $(\mathbb{R}^n, +, \cdot)$ vektör uzayı o.ü

$$d: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}_+$$

$$(x,y) \longmapsto d(x,y)$$ fonksiyonu

1) $d(x,y) \geq 0$ ve $d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$.

2) $d(x,y) = d(y,x)$

3) $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$ → üçgen eşitsizliği

koşulları sağlıyor ise d fonksiyonuna $\mathbb{R}^n$ üzerindeki d metriği adı verilir.

$\mathbb{R}^2$'de $x = (x_1, x_2)$, $y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$

$d_2(x,y) = \sqrt{(x_1-y_1)^2 + (x_2-y_2)^2}$ Öklid metriği

$\mathbb{R}^2$'de

$d(x,y) = |x_1-y_1| + |x_2-y_2|$

1) $d_1(x,y) \geq 0$ ve $d_1(x,y) = 0$

$$\Leftrightarrow |x_1-y_1| = 0 \wedge |x_2-y_2| = 0$$

$$\Leftrightarrow x_1 = y_1 \wedge x_2 = y_2$$

2) $d_1(x,y) = |x_1-y_1| + |x_2-y_2| = |y_1-x_1| + |y_2-x_2|$

$$= d_1(y,x)$$

3) $d_1(x,y) = |x_1-y_1| + |x_2-y_2|$

$$\leq |x_1-z_1| \underbrace{+ |z_1-y_1| + |x_2-z_2|} + |z_2-y_2|$$

$$\leq d_1(x,z) + d_1(z,y)$$

$d_\infty(x,y) = \max\{|x_1-y_1|, |x_2-y_2|\}$

düzgün / sup / sonsuz metriği

Acık yuvar:

$B_d(x_0, r) = \{ x \in \mathbb{R}^n ; d(x, x_0) < r)$

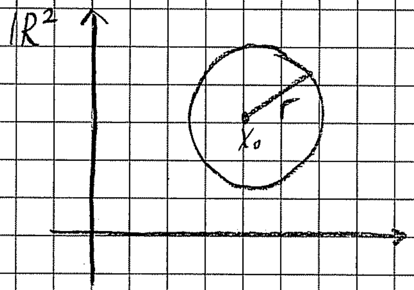
$\mathbb{R}^2$'de

$B_{d_2}(x_0, r) = \{ x \in \mathbb{R}^2 ; d_2(x, x_0) < r \}$

$x = (x_1, x_2) \qquad x_0 = (x_0^1, x_0^2)$

$$\sqrt{(x_1 - x_0^1)^2 + (x_2 - x_0^2)^2} < r$$

$$\Rightarrow (x_1 - x_0^1)^2 + (x_2 - x_0^2)^2 < r^2$$

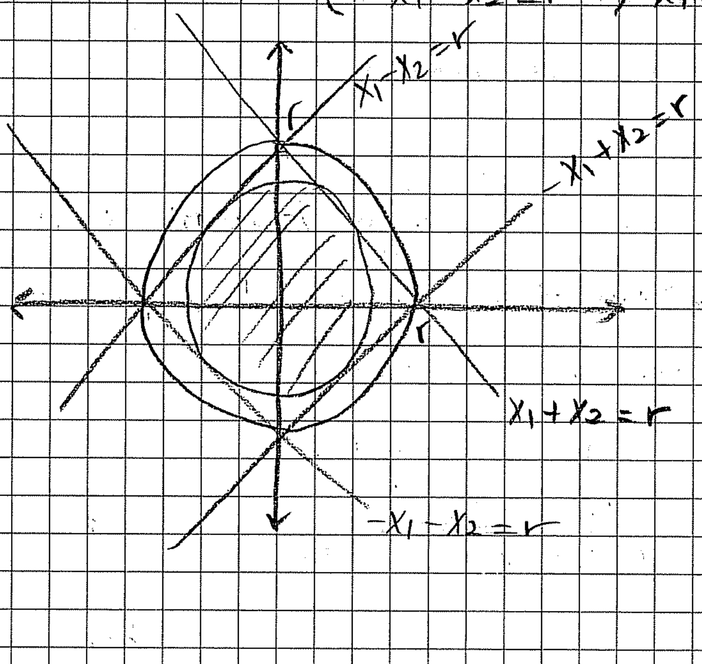


$B_{d_1}(x_0, r) = \{ x \in \mathbb{R}^2 ; d_1(x, x_0) < r \}$

$|x_1 - x_0^1| + |x_2 - x_0^2| < r$

$B_{d_1}(0, r) \qquad |x_1| + |x_2| < r$

$$|x_1| + |x_2| = \begin{cases} x_1 + x_2 = r, & x_1 > 0 \quad x_2 > 0 \\ x_1 - x_2 = r, & x_1 > 0 \quad x_2 < 0 \\ -x_1 + x_2 = r, & x_1 < 0 \quad x_2 > 0 \\ -x_1 - x_2 = r, & x_1 < 0 \quad x_2 < 0 \end{cases}$$



22/02/2017

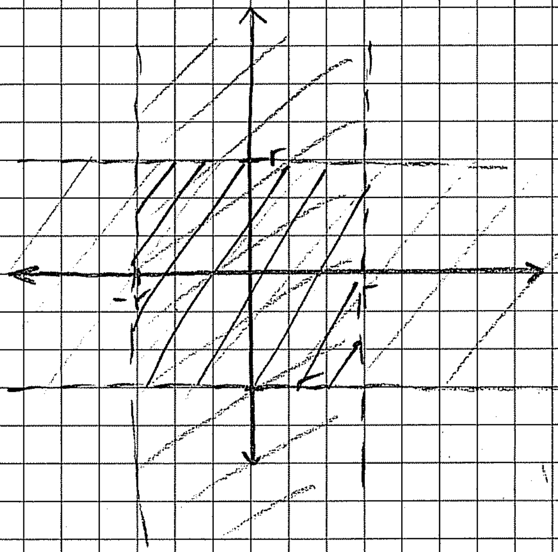
$d_\infty(x,y) = \max\{|x_1-y_1|, |x_2-y_2|\}$

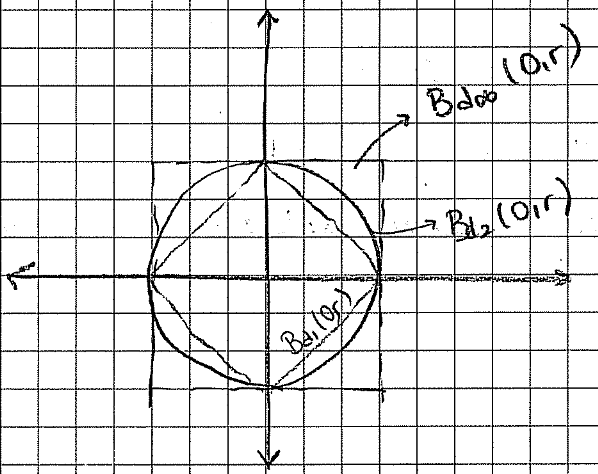
$B_{d_\infty}(x_0,r) = \{x \in \mathbb{R}^2 : d_\infty(x,x_0) < r\}$

$B_{d_\infty}(0,r) = \{x \in \mathbb{R}^2 : \max\{|x_1|,|x_2|\} < r\}$

$\Rightarrow |x_1| < r \wedge |x_2| < r$

$\Rightarrow -r < x_1 < r \wedge -r < x_2 < r$





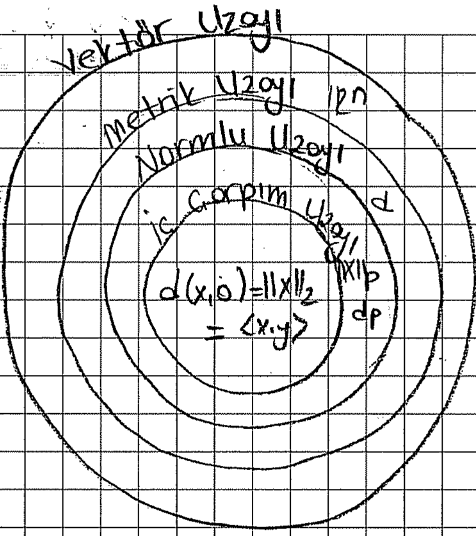
Tanım: d_1 ve d_2 metriği X üzerinde tanımlı olsun. Eğer $m, M \in \mathbb{R}^+$ o.ü $m\,d_2(x,y) \leq d_1(x,y) \leq M\,d_2(x,y)$ koşulu sağlanıyor ise denk metriktir denir.

$\mathbb{R}^n$, d_1, d_∞, d_2 metrikleri denktir

$\mathbb{R}^2$ $d_p(x,y) = \sqrt[p]{(x_1-y_1)^p + (x_2-y_2)^p}$ → p-metriği

$1 \leq p \leq +\infty$ için d_p-metrikleri birbirine denktir

∗ Sadece d_2'de iç çarpım oluyor!

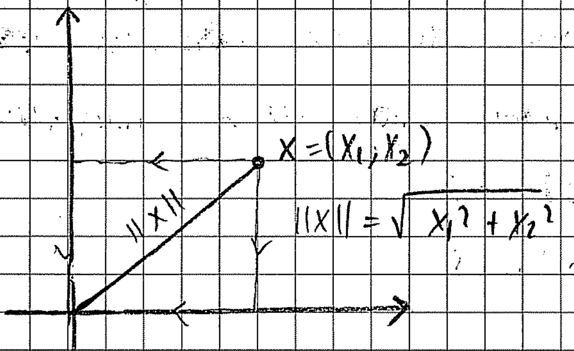


$(\mathbb{R}^n,+,\cdot) \to$ vektör uzayı

$((\mathbb{R}^n,+,\cdot),d_p)$ metrik uzay

$1\le p \le +\infty$

$d_2 \to$ Öklid / Kalkülüs



<u>Tanım</u>: $(\mathbb{R}^n,+,\cdot)$ vektör uzayı o.ü.

$$\|\cdot\| : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}_+ \qquad x \longmapsto \|x\|$$ fonksiyonu tanımlı olsun. Eğer;

1) $\|x\|\ge 0$, $\|x\|=0 \iff x=0$.

2) $\|\alpha x\|=|\alpha|\,\|x\| \quad \forall \alpha\in\mathbb{R}$

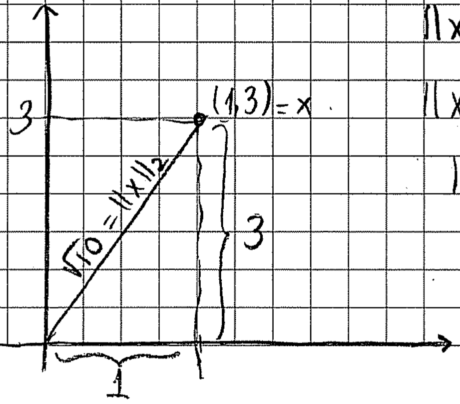
3) $\|x+y\|\le\|x\|+\|y\| \quad \forall x,y\in\mathbb{R}^n$ (üçgen eşitsizliği) koşullarını sağlıyor ise <u>norm</u> adını alır.

$\|x\|_1 = |x_1|+|x_2|$

$\|x\|_\infty = \max\{|x_1|,|x_2|\}$

$\|x\|_2 = \sqrt{|x_1|^2+|x_2|^2}$

$\|x_p\| = \sqrt[p]{|x_1|^p+|x_2|^p}$, $1\le p\le+\infty$



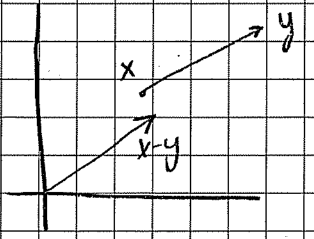
$\|x\|_\infty = 3$

$\|x\|_1 = 4$

$\|x\|_5 = \sqrt[5]{1^5+3^5}$

$m\|x\|_{p_2} \leq \|x\|_{p_1} \leq M\|x\|_{p_2}$

$\mathbb{R}^n$'de tüm $\|\cdot\|_p$ normları birbirine denktir.



$d_p(x,y) = \|x-y\|_p$

Her normdan $\|x-y\| = d(x,y)$ koşulunu sağlayacak şekilde bir metrik türetilir. Her normlu uzay metrik uzaydır.

$B_{\|\cdot\|}(x_0,r) = \{x \in \mathbb{R}^n : d(x,x_0) < r\}$

$= \{x \in \mathbb{R}^n : \|x-x_0\| < r\}$

$\mathbb{R}^2$'de iç çarpım

$x=(x_1,x_2)$, $y=(y_1,y_2)$

$x.y = \langle x,y \rangle = (x|y)$

$= x_1y_1 + x_2y_2 \in \mathbb{R}$

$(x,y) = \|x\|_2 . \|y\|_2 \cos\alpha$

Tanım: $(\mathbb{R}^n,+,\cdot)$ vektör uzayı olmak üzere

$\langle\ ,\ \rangle : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$

$(x,y) \longmapsto x_1y_1 + x_2y_2 + \dots + x_ny_n$ fonk'u olsun.

Eğer;

1) $\langle x,x \rangle \geq 0$, $\langle x,x \rangle = 0 \Leftrightarrow x=0$.

2) $\langle x,y \rangle = \langle y,x \rangle$

3) $\langle \alpha x,y \rangle = \alpha \langle x,y \rangle = \langle x,\alpha y \rangle$

4) $\langle x, y_1+y_2 \rangle = \langle x_1,y_1 \rangle + \langle x_2,y_2 \rangle$

koşulları sağlanıyor ise $\langle\ ,\ \rangle$ fonk'una $\mathbb{R}^n$ üzerinde iç çarpım adı verilir.

$\langle x,x\rangle = x_1^2 + \dots + x_n^2 = \|x\|_2^2$

İç çarpım uzayı bir normlu uzaydır. Öklid normu iç çarpım uzayıdır.

$(\mathbb{R}^n, d_2), (\mathbb{R}^n, \|.\|_2), (\mathbb{R}^n, \langle , \rangle)$

İç çarpım uzayları Cauchy-Schwarz eşitsizliğini sağlar.

$|\langle x,y\rangle| \le \|x\|.\|y\|$

$|x.y| = |\langle x,y\rangle| = \|x\|_2\|y\|_2 \cos\alpha \le \|x\|_2\|y\|_2$

İspatı: $\vec{u} = ax - by$, $a,b \in \mathbb{R}_+$

$$\underbrace{\|ax-by\|^2}_{\ge 0} = \langle ax-by, ax-by\rangle$$

$$= \langle ax,ax\rangle + \langle ax,-by\rangle + \langle -by,ax\rangle + \langle -by,-by\rangle$$

$$= \|ax\|^2 - 2ab\langle x,y\rangle + \|by\|^2$$

$$= a^2\|x\|^2 - 2ab\langle x,y\rangle + b^2\|y\|^2$$

$a = \|y\|$ $\quad = \|y\|^2\|x\|^2 - 2\|x\|\|y\|\langle x,y\rangle + \|x\|^2\|y\|^2$

$b = \|x\|$ $\quad = \underbrace{2\|x\|\|y\|}_{\ge 0}\underbrace{(\|x\|\|y\| - \langle x,y\rangle)}_{\ge 0} \Rightarrow |\langle x,y\rangle| \le \|x\|\|y\|$

Topoloji: X küme

$$\left.\begin{array}{l} (X,\tau) \\ A \in \tau \subset P(X) \\ \emptyset, X \in \tau \\ A \in \tau \Rightarrow A^c = X \setminus A \in \tau \\ \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \tau \\ A_1 \cap \dots \cap A_n \in \tau \end{array}\right\} \text{Topolojik Uzay.}$$

A kümesine τ top. açık kümesi denir.

$(\mathbb{R}^n, d)$ metrik uzayında $B_d(x,r)$ oluşturduğu uzay top. uzay.

Tanım: $((\mathbb{R}^n, +, \cdot)$ vektör uzayı, $\|.\|)$ normlu uzay.

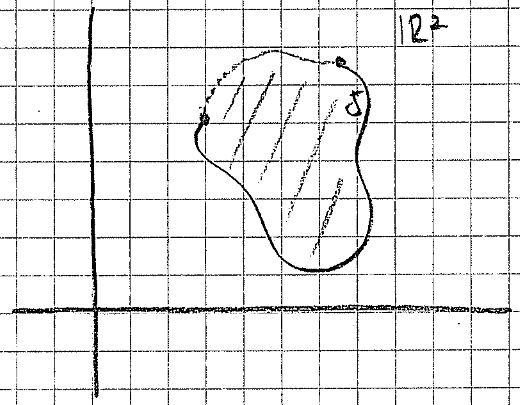
$S \subset \mathbb{R}^n$ alt kümesi $x_0 \in S$ olmak üzere en az bir tane $r + R_+$ var ve $B_{\|.\|}(x_0,r) = \{x \in \mathbb{R}^n ; \|x - x_0\| < r\}$ yuvarı S'nin içinde kalıyor ise $(B_{\|.\|}(x_0,r) \subset S)$ x_0 noktasına iç nokta (interior) denir. $x_0 \in S$ o.ü. her $r \in \mathbb{R}_+$ için $B_{\|.\|}(x_0,r) \cap A \neq \emptyset$ ve $B_{\|.\|}(x_0,r) \cap A^c \neq \emptyset$ ise x_0 noktasına sınır noktası denir.
(boundary)

$\text{Int}\, S = S^{\circ} = \{S$'nin tüm ic noktaları$\}$

$S = S^{\circ} \Leftrightarrow S$ kümesi acık kümedir.

$\partial S = \{S$'nin tüm sınır noktaları$\}$

S° acık $\Leftrightarrow$ S kümesi kapalıdır.



S kümesi acık küme değil. $S \neq S^{\circ}$

S^c acık olmadığından S kapalı değildir.

UYGULAMA (24 Şubat 2017)

① $A, B \subseteq \mathbb{R}^2$ kümeler üstten sınırlı olsun $C = \{a.b : a \in A, b \in B\}$ kümesinin üstten sınırlı olduğunu ve $\sup C = \sup A . \sup B$ olduğunu gösteriniz.

$c \in C$ alalım.

$c = a.b$ olacak sekilde $a \in A$, $b \in B$ vardır.

$c = a.b \leq \sup A . \sup B$

O halde C üstten sınırlıdır. Öyleyse $\sup C$ vardır. $\sup C$ C'nin üst sınırı olduğundan ve $\sup A . \sup B$ C için bir üst sınır olduğundan $\sup C \leq \sup A . \sup B$

$\sup A . \sup B \leq \sup C$: Tersine $\sup C < \sup A . \sup B$ olsun.

$\frac{\sup C}{\sup A} < \sup B \Rightarrow \frac{\sup C}{\sup A} < b \Rightarrow \frac{\sup C}{b} < \sup A$

$\frac{\sup C}{b}$, A icin bir üst sınır olamaz.

$\exists a \in A$; $\frac{\sup C}{b} < a$

$\exists a \in A$, $\exists b \in B$, $\sup C < \underbrace{a.b}_{\in C} \rightarrow\leftarrow$

$\forall x \in \mathbb{R}, \ \exists n \in \mathbb{N} \ \ x < n$

$\forall \varepsilon > 0, \ \exists n \in \mathbb{N} \ \ \frac{1}{n} < \varepsilon.$

2) "$a \in \mathbb{R}, \ a > 0 \Rightarrow \exists n_a \in \mathbb{N}, \ n_a - 1 \leq a \leq n_a$" olduğunu gösteriniz.

$S: \{ y \in \mathbb{N} : a < y \}$

Arşimet özelliğinden $S \neq \emptyset$

Ayrıca $S \subseteq \mathbb{N}$ ve $\mathbb{N}$'yi sıralı olduğundan (yani boştan farklı her alt kümesinin minimum elemanı vardır.) $\min S$ vardır.

$\min S = \overset{\in S}{n_a}$ diyelim.

$n_a \in S$ olduğundan $a < n_a$

$\min S = n_a$ olduğundan $n_a - 1 \notin S \Rightarrow n_a - 1 \leq a$

3) $A = \left\{ \frac{n+2}{n}, n \in \mathbb{N} \right\}$ olmak üzere $\inf A = 1$ olduğunu gösteriniz.

1. "A'nın alt sınırıdır.

$\forall a \in A, \quad a = \frac{n+2}{n} = 1 + \frac{2}{n} > 1$ ($\forall a \in A$ için $1 < a$)

$1 = \inf A$ y, A'nın bir alt sınırı ve $y > 1$ olsun.

$\frac{2}{y-1} > 0$ olduğundan, Arşimet özelliğinden $\underbrace{n > \frac{2}{y-1}}_{\frac{2}{n} < y-1}$ olacak şekilde bir $n \in \mathbb{N}$ var. O halde;

$a = \frac{n+2}{n} = 1 + \frac{2}{n} \leq 1 + y - 1 \leq y$

y'nin alt sınır olması ile çelişir $\rightarrow\leftarrow$

- iç çarpım ≤ norm ≤ metrik

$d: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$

$(x,y) \longmapsto \|x-y\| \in \mathbb{R}^n$

$\|x\| = \sqrt{\langle x,x \rangle}$

$x = y \Leftrightarrow d(x,y) = 0$

$d(x,y) = \|x-y\| \geq 0$

$d(x,y) = d(y,x)$

4) $d: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ bir metrik olsun. $g(x,y) = \frac{d(x,y)}{1+d(x,y)}$ metrik olduğunu göster.

$x,y \in \mathbb{R}^n, \ g(x,y) = \frac{\overset{\neq 0}{d(x,y)}}{\underset{\underset{0}{\neq}}{1+d(x,y)}} \geq 0 \quad (d(x,y) \geq 0)$

$x = y \Leftrightarrow d(x,y) = 0 \Leftrightarrow g(x,y) = \frac{d(x,y)}{1+d(x,y)} = 0$

$g(x,y) = g(y,x)$ tanımdan açıktır.

GIPTA

d metrik : $d(x,y) < d(x,z) + d(y,z)$

$(f*)\ \rho(x,y) \leq \rho(x,z) + \rho(z,y)$?

$$\frac{d(x,y)}{1+d(x,z)} \leq \frac{d(x,z)}{1+d(x,z)} + \frac{d(z,y)}{1+d(z,y)} \ (?) \ \leq \frac{d(x,z)}{1+d(x,z)} + \frac{d(z,y)}{1+d(z,y)} = \rho(x,z)+\rho(z,y)$$

$$g(x,y) = \frac{d(x,y)}{1+d(x,y)} \leq \frac{d(x,z)+d(z,y)}{1+d(x,z)+d(z,y)} = \frac{d(x,z)}{1+d(x,z)+d(z,y)} + \frac{d(z,y)}{1+d(x,z)+d(z,y)}$$

* $f(x) = \dfrac{x}{1+x}$, $x < y \Rightarrow f(x) < f(y)$ (fonksiyonun artanlığı)

$f'(x) = \dfrac{1}{(1+x)^2} > 0$ olduğu için f artandır.

5) $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, $\|x\|_\infty = \sup\{|x_i|\}$ $\mathbb{R}^n$ üzerinde norm olduğunu gösteriniz.

(I) $\|x\|_\infty \geq 0$; $\sup\{|x_i|\} \geq 0$ olduğundan $\|x\|_\infty \geq 0$

(II) $\|x\|_\infty = 0 \Leftrightarrow \sup\{|x_i|\} = 0 \Leftrightarrow x_i = 0 \ \forall i \Leftrightarrow x = 0$

(III) $\|\alpha . x\| = \sup\{|\alpha x_i|\} = |\alpha| . \sup\{|x_i|\} = |\alpha| . \|x\|$

(IV) $\|x+y\|_\infty = \sup\{(x_i+y_i)\} \leq \sup\{|x_i|+|y_i|\} \leq \sup\{|x_i|\} + \sup\{|y_i|\}$
$= \|x\|_\infty + \|y\|_\infty$

Ödev: $\mathbb{R}^n$'de aşağıdaki ifadelerin sağlandığını gösteriniz.

a) $2\|x\|^2 + 2\|y\|^2 = \|x+y\|^2 + \|x-y\|^2$

b) $\|x+y\| . \|x-y\| \leq \|x\|^2 + \|y\|^2$

6) a) $(\mathbb{R}^n, \|.\|)$ bir normlu uzay olmak üzere, $d(x,y) = \|x-y\|$ metriğinin;

- $d(ax, ay) = |a| . d(x,y)$ .... $(*)$
- $d(x+a, y+a) = d(x,y)$ .... $(**)$

özelliklerini sağladığını gösteriniz.

b) Her metrik uzayın bir normlu uzay olmadığını gösteriniz.

c) $(*)$ ve $(**)$ özelliklerini sağlayan metrik uzayların bir normlu uzay olduğunu gösteriniz.

a) $d(ax,ay) = \|ax-ay\| = \|a(x,y)\| = |a|.d(x,y)$

$d(x+a,y+a) = \|x+a-y-a\| = \|x-y\| = d(x,y)$

b) $d: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$, $d(x,y) = \begin{cases} 0 , & x=y \\ 1 , & x\neq y \end{cases}$ bir metriktir. (ayrık metrik)

$x \neq y$, $a \neq 1$ (*)'dan , eğer d'ye karşı bir metrik olsaydı,

$$\underbrace{d(ax,ay)}_{1} = (a).d(x,y)$$
$$\neq |a|.1$$

c) d metriği (*) ve (**) özelliklerini sağlasın.

$\|x\| := d(x,0)$ bir normdur.

(I) ve (II) açıktır.

(III) $\|ax\| = d(ax,0) = d(ax,a\cdot 0) \overset{(*)}{=} |a|.d(x,0) = |a|.\|x\|$

(IV) $\|x+y\| = d(x+y,0) \leq d(x+y,y) + d(y,0)$ (üçgen eşitsizliği)

$\overset{(**)}{\leq} d(x,0) + d(y,0)$

$(\mathbb{R}^n, d)$, $(\mathbb{R}^n, \|.\|)$

$S \subset \mathbb{R}^n$ alt küme ($S \to$ subset)

$x_0 \in S$ için $\exists r > 0$: $B(x_0,r) \subset S$ koşulu sağlanıyor ise x_0 iç nokta (interior)

$\text{Int}S = S^\circ \longrightarrow$ iç noktalar kümesi

Eğer $S = S^\circ$ ise S açık

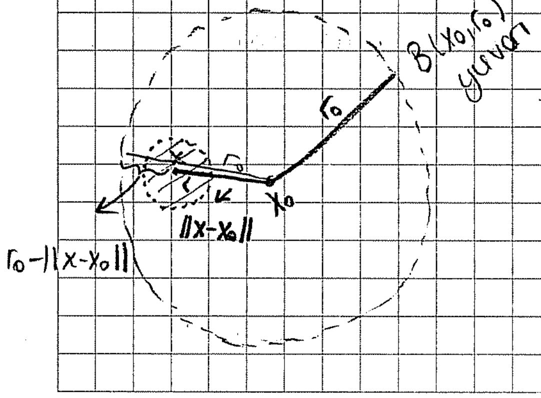
$S^{\circ c} = S^c$ açık ise S kapalı

$x_0 \in \mathbb{R}^n$ olmak üzere $\forall r > 0$ için $B(x_0,r) \cap S \neq \emptyset$ ve $B(x_0,r) \cap S^c \neq \emptyset$ (boundary)

$\Rightarrow x_0$ S'nin sınır noktası denir. $\partial S = \{$Sınır noktalar kümesi$\}$

Örnek: $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$ normlu uzayında tanımlanan açık yuvar açık kümedir. Gösteriniz.

denmesinin sebebi her noktasının iç yuvar olması



Tek elemanlı kümeler kapalı.

$x \in B(x_0, r_0)$ herhangi bir elemanı olarak üzere $\exists r > 0$ vardır öyle ki $B(x,r) \subset B(x_0, r_0)$

$$\boxed{x \in \partial S \Leftrightarrow \forall r>0 \text{ için } B(x,r) \cap S \neq \emptyset,\ B(x,r) \cap S^c \neq \emptyset}$$

$\Downarrow$ Sınır nokta olma kuralı.

$0 \leq \|x - x_0\| < r_0$

$\exists r : r < r_0 - \|x - x_0\|$ alalım.

İddia: $B(x,r) \subset B(x_0, r_0)$

$y \in B(x,r)$, $\|x-y\| < r$

Eğer $\|x_0 - y\| < r_0$ ise $y \in B(x_0, r_0)$

$$\|y - x_0\| = \|y - x + x - x_0\|$$
$$= \|y - x\| + \|x - x_0\|$$
$$< r + r_0 - r < r_0$$
$$\Rightarrow y \in B(x_0, r_0)$$

Örn: $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ normlu uzay / tam, sıralı cisim)

$S = \{x\}$, $x \in \mathbb{R}$ $\quad S^\circ \overset{?}{=} S$

$x \in S$ için $\exists r > 0 ;\ B(x,r) = (x-r, x+r) \not\subset \{1\} = S$

$x \in S$ için $\forall r > 0$ alınırsa $B(x,r) \cap S = \{x\} \neq \emptyset$

$B(x,r) \cap S^c = B(x,r) \setminus \{x\} \neq 0$

$\Rightarrow$ x S'nin sınır noktasıdır (∂S)

$\Rightarrow \partial S = \{x\}$

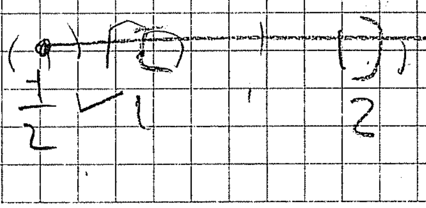
$S^c = \mathbb{R} \setminus \{x\} = (-\infty, x) \cup (x, \infty) \rightarrow$ açık

$\Rightarrow S$ kapalı.

Ödev 1)

$S = [1,2]$ aralığında $\partial S = \{1,2\}$ olduğunu ispatlayınız. Neden $\frac{1}{2}$ sınır noktası değildir.

↓ Tümleyeni ile kesişimi $= \emptyset$



✓

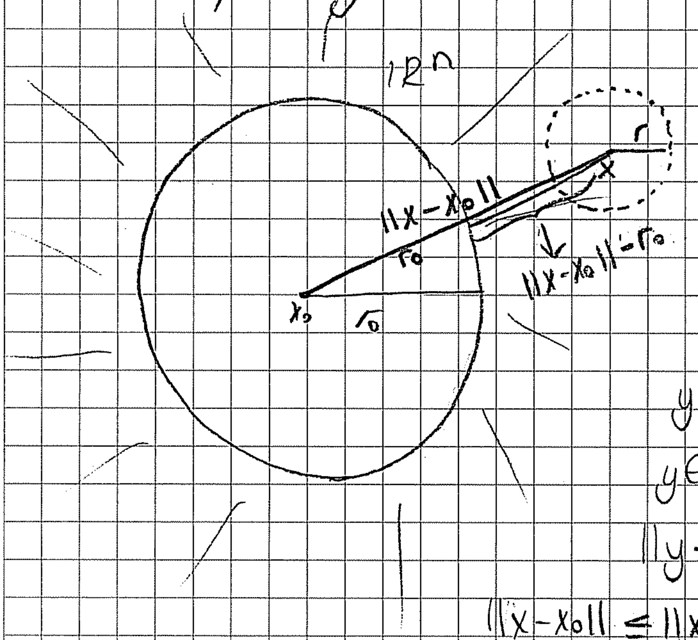
Tümleyen ise $\geq$ olur.

$\emptyset, \mathbb{R}^n$ açık kümedir.

$\mathbb{R}^{n^c} = \emptyset \Rightarrow \mathbb{R}^n$ kapalı

$\emptyset^c = \mathbb{R}^n \Rightarrow \emptyset$ kapalı. Normlu uzaylarda sadece $\emptyset$ ve $\mathbb{R}^n$ hem açık hemde kapalı kümedir.

Örn: $B[x_0, r_0] = \{ x \in \mathbb{R}^n : \|x - x_0\| \leq r \}$ kapalı yuvarı kapalı kümedir. İspatlayınız.



İddia: $B[x_0, r_0]^c$ açıktır.

$x \in B[x_0, r_0]^c$ olmak üzere

$\exists r > 0 : \overset{y\in}{B}(x, r) \subset B[x_0, r_0]^c$

$\exists r < \|x - x_0\| - r_0$ alalım.

$y \in B(x, r) \Rightarrow \|x - y\| < r$

$y \in B[x_0, r_0]^c$ olduğunu göstermeliyiz.

$\|y - x_0\| > r_0$?

$\|x - x_0\| \leq \|x - y\| + \|y - x_0\|$

$r + r_0 - r < \|x - x_0\| - \|x - y\| \leq \|y - x_0\|$

$\Rightarrow r_0 < \|y - x_0\|$

$\Rightarrow y \in B[x_0, r_0]^c$

Teorem: a) Açık kümelerin birleşimi açıktır.

İspat: θ_i açık kümeler $\subset \mathbb{R}^n$ $i \in I$ indis kümesi olsun.

İddia: $\bigcup_{i \in I} \theta_i$ açıktır.

$x \in \bigcup_{i \in I} \theta_i$ herhangi bir eleman olsun. $\exists i_0 \in I : x \in \theta_{i_0}$

θ_{i_0} açık küme olduğundan;

$\mathring{\theta}_{i_0} = \theta_{i_0}$ (her nokta iç nokta) yani $x \in \theta_{i_0}$ iç noktadır.

$\exists r > 0 : B(x, r) \subset \theta_{i_0}$

$\Rightarrow B(x, r) \subset \theta_{i_0} \subset \bigcup_{i \in I} \theta_i$

$\Rightarrow \bigcup_{i \in I} \theta_i$ açıktır.

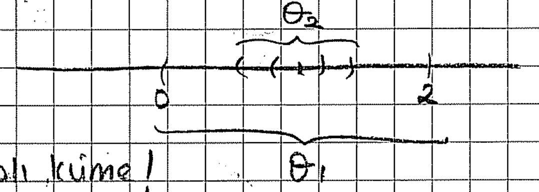
GIPTA

b) Acık kümelerin sonlu kesisimi acıktır.

Sonsuz kesisim isin karşıt örnek;

$O_n = (1-\frac{1}{n}, 1+\frac{1}{n}) = B(1, \frac{1}{n}) \subset \mathbb{R}$

$\bigcap_{n=1}^{\infty} O_n =$



$= \{1\}$

kapalı küme!

İspat= $O_1, \ldots, O_k \subset \mathbb{R}^n$ acık kümeleri olsun. $\bigcap_{i=1}^{k} O_i$ acıktır.

$x \in \bigcap_{i=1}^{k} O_i$ herhangi bir eleman alınsın.

$\Rightarrow \forall i = 1, \ldots, k$ icin $x \in O_i$

$\Rightarrow O_i$'ler acık oldugundan $\qquad O$ open/acık $\quad C$ closed/kapalı.

$\exists r_1 : B(x, r_1) \subset O_1$

$\exists r_2 : B(x, r_2) \subset O_2$

$\vdots$

$\exists r_k : B(x, r_k) \subset O_k$

$\Rightarrow \exists r = \min\{r_1, \ldots, r_k\}$

$B(x, r) \subset B(x, r_k) \subset O_i \quad \forall i = 1, \ldots, k$

$\Rightarrow B(x, r) \subset \bigcap_{i=1}^{k} O_i$

c) Kapalı kümelerin kesisimi kapalıdır.

K_i kapalı küme $\subset \mathbb{R}^n$
$i \in I$ index

$(\bigcap_{i \in I} K_i)^c = \bigcup_{i \in I} K_i^c$ a'dan acık. $\Rightarrow \bigcap_{i \in I} K_i$ kapalı

d) Kapalı kümelerin sonlu birlesimi kapalıdır.

$\mathbb{R} \supset O_n = [-n, n] = B(0, n)$ $\Rightarrow$ sonsuz birlesime karşıt örnek.

$\bigcup_{i=1}^{\infty} O_n = \mathbb{R}$

∇ Bir nokta hem iç nokta hem sınır nokta olamaz! Elif

$K_1, \dots, K_n$ kapalı küme

$(\bigcup_{i=1}^{n} K_i)^c = \bigcap_{i=1}^{n} K_i^c$ acık b'den

$\Rightarrow \bigcup_{i=1}^{n} K_i$ kapalı.

Örn: $A = \{ x \in \mathbb{R} : \exists n \in \mathbb{N} : \frac{1}{2n+1} < x < \frac{1}{2n} \}$ kümesi acık mıdır? kapalı mıdır?

$$= \bigcup_{n=1}^{\infty} \underbrace{\left(\frac{1}{2n+1}, \frac{1}{2n} \right)}_{\text{acık küme}}$$

$$\partial A = \left\{ \frac{1}{n+1} : n \geq 1 \right\} \cup \{0\}$$

Sayılabilir sonsuz birlesim, a'dan acık.

—o—

$A = [0, 1)$

$A^\circ = A$?

$A^\circ = (0,1) \neq A$ olduğundan A acık değil.

$A^c = (-\infty, 0) \cup [1, \infty)$

$A^{c\circ} = (-\infty, 0) \cup (1, \infty) \neq A^c \Rightarrow A^c$ acık değil.

$\Rightarrow A$ kapalı değil

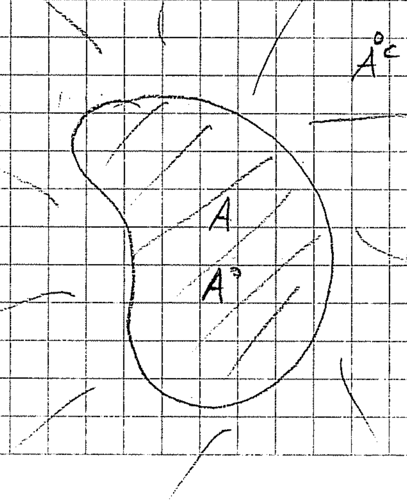
$0 \in A$, $\exists r : B(0,r) = (-r, r) \subset A$ koşulunu sağlayan r olmadığından 0 iç nokta değildir.

$\partial A = \{0, 1\}$

01/03/2017

$\text{Int} A = A^\circ$

$\text{Ext} A = A^{c\circ}$, exterier (dış nokta)

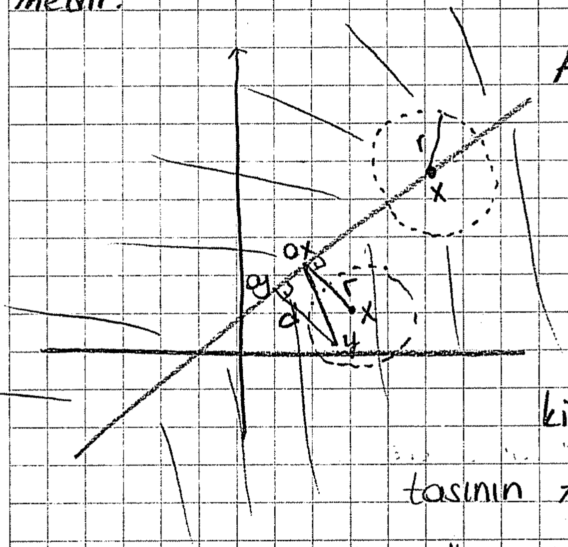


A° acık kümedir?

$x \in A^\circ$ olmak üzere x A'nın iç noktası olduğundan $\exists r>0$ öyle ki $B(x,r) \subset A^\circ \subset A$ olduğundan A° acık küme, $\overset{\circ}{A^c}$ acık küme.

Sonuç: $A^\circ \cup \partial A \cup \overset{\circ}{A^c} = \mathbb{R}^n$

$\partial A = \mathbb{R}^n \setminus \{A^\circ \cup \overset{\circ}{A^c}\} = (A^\circ \cup \overset{\circ}{A^c})^c$ olduğundan ∂A kapalı kümedir.



$x \in A$ için $\exists r>0 : B(x,r) \not\subset A$

$A^\circ = \emptyset$

$\overset{\circ}{A^c} = ?$

$\overset{\circ}{A^c} = \mathbb{R}^2 \setminus A = A^c$

Herhangi $x \in \mathbb{R}^2 \setminus A$ için $\exists r>0$ öyle ki $B(x,r) \subset \mathbb{R}^2 \setminus A$ d uzunluğu x noktasının A'ya olan uzaklığı o.ü. bir tane $r>0$ vardır öyle ki $0<r<d$ $B(x,r) \subset \mathbb{R}^2 \setminus A$?

$y \in B(x,r) \Rightarrow y \in \mathbb{R}^2 \setminus A = A^c$ y ile A arasındaki uzaklık > 0. uğraştıktan sonra $y \in \mathbb{R}^2 \setminus A$ olduğunu kolaylıkla görebiliriz.

$$\mathbb{R}^2 = \overset{\circ}{A^c} \cup A^\circ \cup \partial A$$
$$= A^c \cup \emptyset \cup \partial A = A^c \cup \partial A = A^c \cup A$$
$$\Rightarrow A = \partial A$$

$$0 < d' \le \|y - ax\|$$
$$\le \|y - x\| + \|x - ax\|$$
$$< r + d.$$

Teorem: $A \subseteq \mathbb{R}^n$ altkümesi o.ü. A kapalı olması için gerek ve yeter şart $\partial A \subset A$.

İspat: ($\Longrightarrow$) A kapalı ise A^c acık $\Rightarrow \overset{\circ}{A^c} = A^c$

$\mathbb{R}^n = A^\circ \cup \partial A \cup \overset{\circ}{A^c} = \underbrace{A^\circ \cup \partial A} \cup A^c \rightarrow$ acık küme kendisine eşit

$\Rightarrow A^\circ \cup \partial A = A$

$\Rightarrow \partial A \subset A$

$(\Leftarrow:)$ $\partial A \subset A$ ise,

İddia: $A^{\circ c} = A^c$

$A^{\circ} \subset A$

$\partial A \subset A$ $\Rightarrow A^{\circ} \cup \partial A \subset A$

$\mathbb{R}^n = A^{\circ} \cup \partial A \cup \textcircled{A^{\circ c}}$

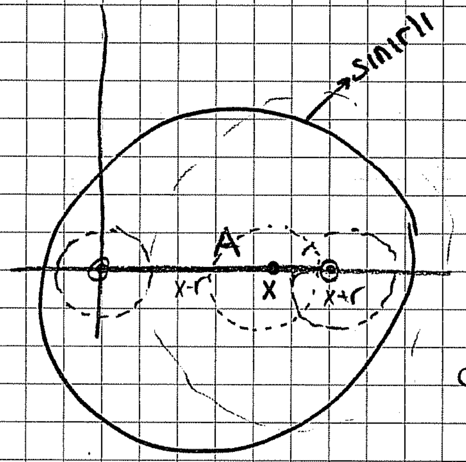
$\mathbb{R}^n \setminus A = A^c \subset A^{\circ c}$

$\Rightarrow A^c = A^{\circ c}$

$\Rightarrow A^c$ Açık

$\Rightarrow A$ kapalı.

<u>**Örnek:**</u> $A = \{(x,0) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x < 1\}$



$x \in A$ için $\not\exists r > 0$ $B(x,r) \subset A$

$\Rightarrow A^{\circ} = \emptyset \neq A$

A açık değil

$x \in (0,1)$ noktası için $\forall r > 0$ olduğunda $B(x,r) \cap A \neq \emptyset$ $B(x,r) \cap A^c \neq \emptyset$

$\Rightarrow x \in \partial A$

$\rightarrow$ $x = 0$ ve $x = 1$ için $\forall r > 0$ olduğunda $B(0,r) \cap A \neq \emptyset$ $A^c \neq \emptyset$

$B(1,r) \cap A \neq \emptyset$ $\cap A^c \neq \emptyset$

$\Rightarrow \partial A = \{(x,0) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1 \not\subset A\}$

(A kapalı $\Leftrightarrow \partial A \subset A$)

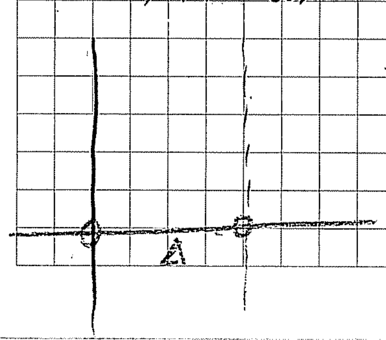
$\Rightarrow A$ kapalı değil.

$\mathbb{R}^2 = A^{\circ} \cup \partial A \cup A^{\circ c}$

$= \emptyset \cup \partial A \cup A^{\circ c}$

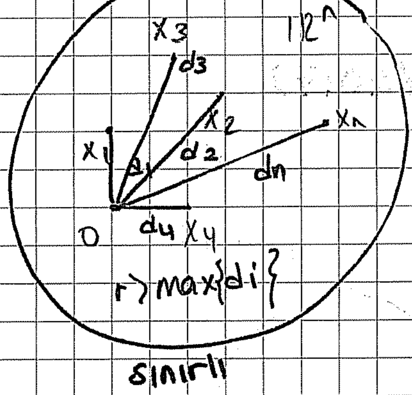
$\Rightarrow A^{\circ c} = Ext A = \mathbb{R}^2 \setminus \partial A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x > 1) \vee (x < 0) \cup (0 \leq x < 1 \wedge y \neq 0)\}$

$=$



Sınıfın tümleyeninin iç noktası dış noktadır!

Örn! $A=\{x_1,\dots,x_n\} \subset \mathbb{R}^n$



$A_1 = \{x_1\} \to$ kapalı

$A = \{x_1\} \cup \{x_2\} \cup \dots \cup \{x_n\} \to$ kapalı

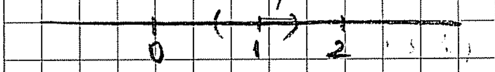
kümelerin sonlu birleşimi kapalı olduğundan A kapalı.

$A^\circ = \emptyset$

$A = \partial A$

$A^c = \mathbb{R}^n \setminus A$

Örn: $\mathbb{N} \subset (\mathbb{R}, |\cdot|)$, sınırlı değil

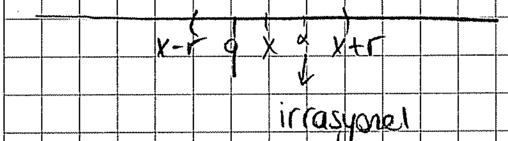


$\mathbb{N}^\circ = \emptyset \neq \mathbb{N}$ açık değil.

$\partial\mathbb{N} = \mathbb{N}$ kapalı.

$\mathbb{Q} \subset (\mathbb{R}, |.|) \to x \in \mathbb{Q}$, $\exists r$ alınsın sınırlı değil

$B(x,r) = (x-r, x+r)$



$\not\subset \mathbb{Q}$ $\mathbb{Q}^\circ = \emptyset$

$\partial\mathbb{Q} = \mathbb{R}$

$x \in \mathbb{R}$: $\forall r > 0$ için $B(x,r) \cap \mathbb{Q} = \emptyset$ $B(x,r) \cap \mathbb{Q}^c \neq \emptyset$

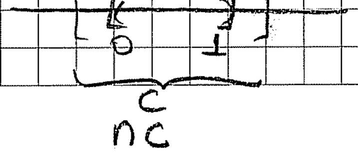
$\mathbb{Q}$ açık veya kapalı değildir.

Tanım: $A \subset \mathbb{R}^n$ alt kümesi o.ü bir tane $B(x,r)$ yuvarı var ve $B(x,r) \supset A$ ise A kümesine sınırlı küme denir. (→ sonlu)

Tanım: $A \subset \mathbb{R}^n$ alt kümesi o.ü A'yı kapsayan C kapalı kümelerinin kesişimine A'nın kapanışı adı verilir ve $\overline{A} = \bigcap_{\substack{C \text{ kapalı} \\ \text{ve } A \subset C}} C$

$(0,1) \subset \mathbb{R}$, $\overline{A} = [0,1]$

A kapalı $\Longleftrightarrow A = \overline{A}$



$\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$

Tanım: $A \subset \mathbb{R}^n$ olmak üzere $\overline{A} = \mathbb{R}^n$ ise A kümesine yoğun küme denir. (dense)

Örn: $\emptyset$ $\mathbb{R}$'de yoğundur.

UYGULAMA (03/03/2017)

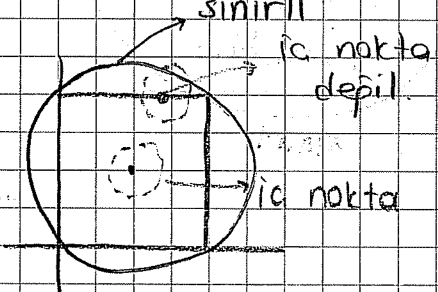
1) $\mathbb{R}$'de çalışıyorsak açık yuvar dediğimiz aralık olacak.

$\mathbb{R}^2$'de ( ), ◇, [ ]

$B(x_0,r) = \{x, \|x-x_0\| < r\}$

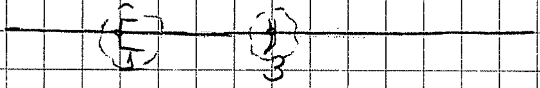
İç nokta, $x_0 \in A$ iç nokta

$\exists r>0,\ B(x_0,r) \subseteq A$

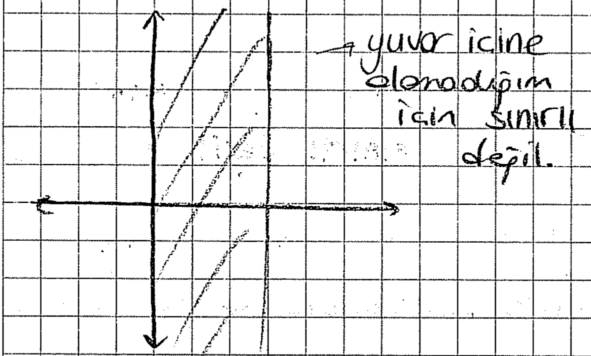


$A^\circ = \{x : x \text{ iç nokta}\}$, Sınır nokta iç nokta olamaz!

$A^\circ = A \iff A$ açıktır.



$A^\circ = (1,3) \neq A$ (1 dahil olmadı)
Bu yüzden açık değil.



Tümleyeni açıksa kapalıdır!

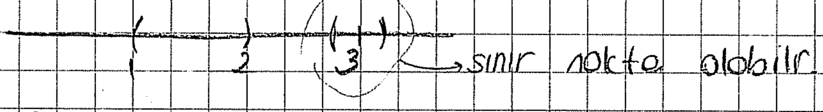
A kapalıdır $\iff \partial A \subseteq A$
$\iff \overline{A} = A$

Sınır Nokta olma Durumu:

$x \in \partial A \iff \forall r>0,\ B(x,r) \cap A \neq \emptyset$

$B(x,r) \cap (\mathbb{R}^n - A) \neq \emptyset$

A'dan da nokta içerecek, A^c'den de.



Sorular

1) $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{R}$ sınırlı olmadığını gösteriniz. $\mathbb{N}^\circ$, $\partial\mathbb{N}$, $\mathbb{N}$ açık mıdır? $\mathbb{N}$ kapalı mıdır?

↗ Alt 0 fakat üstten sınırsız.

Tersine $\mathbb{N}$ sınırlı olsun. Sınırlı olduğu için $\sup \mathbb{N} = m$ vardır. m eküs olduğundan $m-1$, $\mathbb{N}$ için bir üst sınır değildir. O halde $m-1 < n$ o.ş $n \in \mathbb{N}$ vardır. Buradan $m < n+1$ $(n \in \mathbb{N})$ vardır $\to \leftarrow$ ($m = \sup \mathbb{N}$ olması ile çelişir. Çünkü sup'tan daha büyük bir sayı olamaz).

$\therefore$ $\mathbb{N}$ sınırlı değildir.

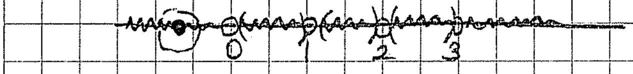
Hangi yuvarı seçersen seç, $\mathbb{N}$'nin elemanı olmayacak.

$n \in \mathbb{N}$ alalım. $\forall r>0$ için $B(n,r) \not\subseteq \mathbb{N}$. O halde $\mathbb{N}^{\circ} = \emptyset$

$\partial \mathbb{N} = ?$

$$\partial \mathbb{N} = \mathbb{R} - \left((\mathbb{R}-\mathbb{N})^{\circ} \cup \underbrace{\mathbb{N}^{\circ}}_{\emptyset} \right) = \mathbb{R} - (\mathbb{R}-\mathbb{N} \cup \emptyset)$$
$$= \mathbb{N} \,//$$

$(\mathbb{R}-\mathbb{N})^{\circ} = (\mathbb{R}-\mathbb{N})$



→ Tümleyeni açık kümelerin birleşimi bu yüzden açık.

Ya da;

→ hem kendisini hem tümleyenini içeriyor. Dolayısıyla seçtiğin her nokta sınır nokta olacak. Kendisi olacak yani

$x \in \partial \mathbb{N}$;

$n \in \mathbb{N}$, $\forall r>0$, $B(n,r) \cap \mathbb{N} = \{n\}$

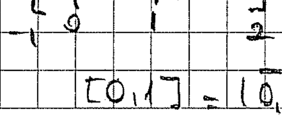
$B(n,r) \cap (\mathbb{R}-\mathbb{N}) \neq \emptyset$

$\mathbb{N}^{\circ} = \emptyset \neq \mathbb{N}$ olduğu için $\mathbb{N}$ açık değildir.

$\partial \mathbb{N} = \mathbb{N} \subseteq \mathbb{N} \Rightarrow \mathbb{N}$ kapalıdır.

2) [redacted] $A \subseteq \mathbb{R}^n$ $\quad x \in \overline{A} \Leftrightarrow \forall r>0 \quad B(x,r) \cap A \neq \emptyset$

($A \subseteq B \Rightarrow \overline{A} \subseteq \overline{B}$: $A \subseteq B \subseteq \overline{B}$ olduğundan $\overline{B}$, A'yı kapsayan kapalı bir kümedir. Fakat $\overline{A}$, A'yı kapsayan en küçük kapalı küme olduğundan $\overline{A} \subseteq \overline{B}$)



→ kapanış değil

$[0,1] = \overline{(0,1)}$ → kapanış.

$\boxed{A \cap B = \emptyset \Rightarrow A \subseteq B^c = \mathbb{R}^n - B.}$

$(\Rightarrow:)$ $x \in \bar{A}$ olduğunu varsayalım. Tersine $\exists r > 0$ olsun. $B(x,r) \cap A = \emptyset$

$\Rightarrow \exists r > 0,\ A \subseteq \mathbb{R}^n - B(x,r) \Rightarrow \bar{A} \subseteq \overline{(\mathbb{R}^n - \underbrace{B(x,r)}_{\text{Açık yuvar.}})} = \mathbb{R}^n - B(x,r)$

Açık kümelerin farkı açıktır.

$\mathbb{R}^n - B(x,r)$ kapalı olduğundan kapanışı kendisine eşittir.

$x \in \bar{A}$ olduğundan $x \in \mathbb{R}^n - B(x,r) \rightarrow \leftarrow$ ($x \in B(x,r)$ ile çelişir)

$(\Leftarrow:)$ "$\forall r > 0$ için $B(x,r) \cap A \neq \emptyset$" olsun.

Amaç: $x \in \bar{A}$ olsun. $x \in \mathbb{R}^n - \underset{\sim}{\bar{A}}$ ve $\mathbb{R}^n - \bar{A}$ açık kümedir ($\mathbb{R}^n - \bar{A} = (\mathbb{R} - A)^{\circ}$)

her kümenin kapanışı kapalı fakat tümleyeni açık

O halde, x, $\mathbb{R}^n - A$ nın iç noktasıdır ve böylece $\exists r > 0$

$B(x,r) \subseteq \mathbb{R}^n - \bar{A}$. Varsayımdan, $\underline{\underline{B(x,r) \cap A \neq \emptyset}}$'dir.

$\Downarrow$

$\underline{\underline{B(x,r) \cap \bar{A} = \emptyset}}$

$A \subseteq \bar{A} \Rightarrow B(x,r) \cap A \subseteq B(x,r) \cap \bar{A}$

Bundan dolayı çelişki

3) a) $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 ;\ 1 < x^2 + y^2 \leq 4\}$ ✓

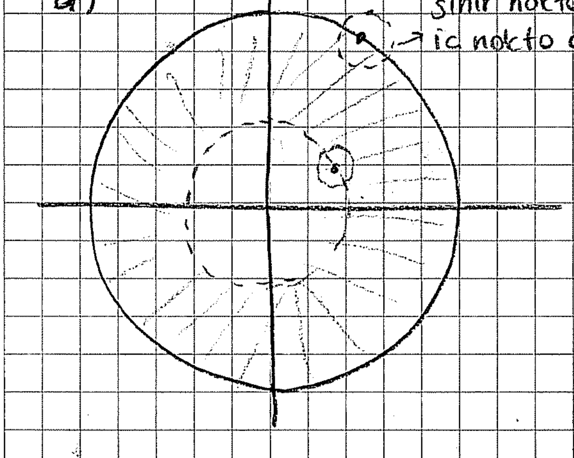
b) $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 ;\ 1 \leq x < 5\}$

c) $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 ;\ x = 1,\ 0 < y < 2\}$

Verilen kümeler; Açık mıdır? Kapalı mıdır?

$A^{\circ} = ?$, $\partial A = ?$, $\bar{A} = ?$, A sınırlı mıdır?

a)



((0,0) merkezli 2 r çember)

$A \subseteq B((0,0),2)$ old. A sınırlı

$A^{\circ} = \{(x,y) ;\ 1 < x^2 + y^2 < 4\}$

$A \neq A^{\circ}$ olduğundan açık değildir!

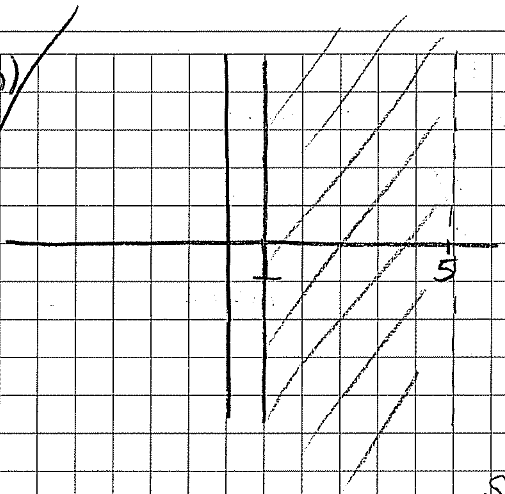
$\partial A = \{(x,y) ;\ x^2 + y^2 = 1\} \cup \{(x,y) ;\ x^2 + y^2 = 4\}$

$\partial A \not\subseteq A$ olduğundan kapalı değildir. (Sınır noktalarını kapsamadığı için)

$\forall r > 0,\ B(x,r) \cap A \neq \emptyset \Rightarrow$ Kapanış tanımı

$\bar{A} = \{(x,y) \in \mathbb{R} ;\ 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\}$

($\bar{A} \neq A$ olduğundan A kapalı değildir) b)



Sınırlı değildir. (Yuvar içine alınamıyor.)

$A^\circ = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 ; 1 < x < 5 \}$

→ Çünkü sınır nokta iç nokta olamaz.

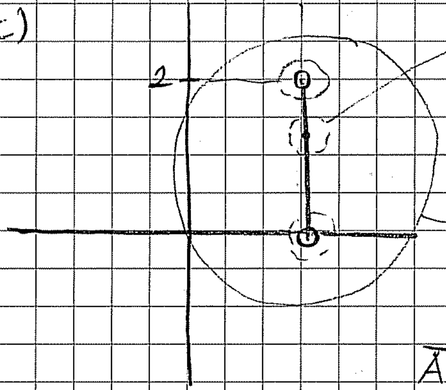
$A^\circ \neq A$ old. için açık değildir.

$\partial A = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 , x=1 \} \cup \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \; x=5 \}$

Sınırını içermediği için A kapalı değil.
$(\partial A \not\subseteq A)$

$\overline{A} = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 ; 1 \leq x \leq 5 \}$ (sınır noktalar dahil edilecek)

c)



→ Yuvar bulamıyorsun. Bu durumda $A^\circ = \emptyset$
(tamamen kümenin içine girmiyor)

İçi kendisinden farklı $(A^\circ \neq A)$ açık değil.

→ $A \subseteq B((0,0),3)$ olduğundan A sınırlıdır.

$\overline{A} = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 ; \; x=1 , \; 0 \leq y \leq 2 \}$

$\overline{A} \neq A$ → Kapanışı kendisine eşit değil.
Yani kapalı değil.

$\partial A = \overline{A}$, $\boxed{\partial A = \overline{A} - A^\circ}$

4) $\overline{A} = A^\circ \cup \partial A$ olduğunu gösteriniz.

$\partial A = \mathbb{R}^n - (A^\circ \cup (\mathbb{R}^n - A^\circ))$

$(\subseteq ;)$. Amaç: $\overline{A} \subseteq A^\circ \cup \partial A$

$x \in \overline{A}$ ve tersine $x \notin A^\circ \cup \partial A$ olduğunu varsayalım.

$x \notin A^\circ \cup \partial A \Rightarrow x \notin A^\circ$ ve $x \notin \partial A = \mathbb{R}^n - (A^\circ \cup (\mathbb{R}^n - A))$

O halde $x \in A^\circ \cup (\mathbb{R}^n - A)^\circ \xrightarrow{x \notin A^\circ} x \in (\mathbb{R}^n - A)^\circ$

$\Rightarrow \exists r > 0 , B(x,r) \subseteq \mathbb{R}^n - A$

$\Rightarrow \exists r > 0 , B(x,r) \cap A = \emptyset \rightarrow\leftarrow$
$(x \in \overline{A}$ ile çelişir.$)$

$\boxed{x \in \overline{A} \Leftrightarrow \forall r > 0 , \; B(x,r) \cap A \neq \emptyset}$

$(\supset:)\ A^{\circ} \cup \partial A \subseteq \bar{A}$

$A^{\circ} \subseteq A \subseteq \bar{A} \Rightarrow A^{\circ} \subseteq \bar{A}$

? $\partial A \subseteq \bar{A}$ ✓ Kapanışın tanımı $\Rightarrow x \in \bar{A}$

$x \in \partial A \Rightarrow (\forall r > 0$ için $B(x,r) \cap A \neq \emptyset$

$B(x,r) \cap \mathbb{R}^n \neq \emptyset$

$A \subseteq \mathbb{R}^n$ 07/03/2017

$$\bar{A} = \bigcap_{\substack{A \subset C \\ \text{kapalı}}} C$$

$A \subset \bar{A}$ kapalı bir küme

$A^{\circ c} \Rightarrow$ Dış Nokta.

[$\bar{A} = \mathbb{R}^n$ yoğun küme

$\bar{Q} = \mathbb{R}$]

<u>Teorem:</u> $\bar{A} = A^{\circ} \cup \partial A$

[$x \in \bar{A} \Leftrightarrow \forall r > 0$ için $B(x,r) \cap A \neq \emptyset$]

İspat: $(\Rightarrow:)\ \bar{A} \subset A^{\circ} \cup \partial A$

$\left.\begin{array}{l} \mathbb{R}^n = A^{\circ} \cup \partial A \cup A^{\circ c} \\ A^{\circ c} \text{ açık küme} \end{array}\right\} \Rightarrow A^{\circ} \cup \partial A$ kapalı küme. Ayrıca $A \subset A^{\circ} \cup \partial A$

O halde kapanış tanımından $\bar{A} \subset A^{\circ} \cup \partial A$.

$(\Leftarrow:)\ \bar{A} \supset A^{\circ} \cup \partial A$

C kapalı bir küme ve $A \subset C$ için $C \supset A^{\circ} \cup \partial A$ göstermeliyim.

$\left.\begin{array}{l} C \supset A \supset A^{\circ} \text{ ✓} \\ C \supset \partial A \ ? \end{array}\right\} \Rightarrow C \supset A^{\circ} \cup \partial A \Rightarrow \bar{A} \supset A^{\circ} \cup \partial A$

$C \supset A \Rightarrow C^{\circ} \subset A^{\circ} \Rightarrow C^{c} = C^{\circ c} \subset A^{\circ c}$

$\Rightarrow C^{c} \subset A^{\circ c}$ (dış noktaların içi)

$\Rightarrow C^{\circ} \subset (A^{\circ} \cup \partial A)^{c}$

$\Rightarrow C \supset A^{\circ} \cup \partial A$

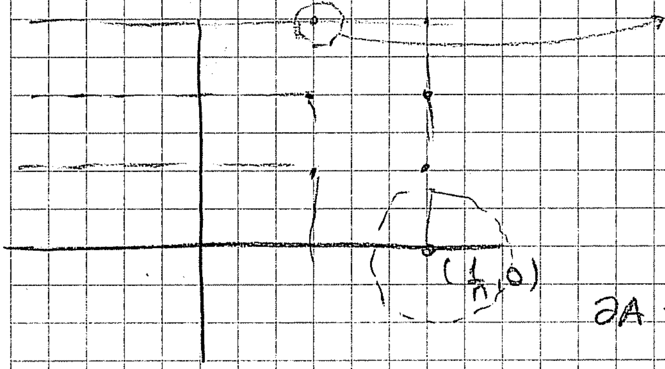
$\Rightarrow \bar{A} \supset A^{\circ} \cup \partial A$

Teorem: A kapalı olması icin $\Leftrightarrow \bar{A}=A$ 17 Mart

" " " " $\Leftrightarrow \bar{A}=A$ 21 Nisan

Tanım: $x\in\bar{A}$ olması icin gerek ve yeter kosul her $r>0$ icin $B(x,r)\cap A\neq\emptyset$. $(\bar{A}=A^{\circ}\cup\partial A)$

Ör: $A=\left\{\left(\frac{1}{n},\frac{1}{m}\right)\subset\mathbb{R}^2 : n,m\in\mathbb{N}\right\}$



$A^{\circ}=\emptyset\neq A$ acık değil.

$x\in A$ olalım. $\forall r>0$ $B(x,r)\cap A=\{x\}\neq\emptyset$
$\cap C^c\neq\emptyset$

$\Rightarrow x\in\partial A$

$\partial A=A\cup\left\{\left(\frac{1}{n},0\right):n\in\mathbb{Z}\right\}$

$\cup\left\{\left(0,\frac{1}{m}\right):m\in\mathbb{Z}\right\}\cup\{(0,0)\}$

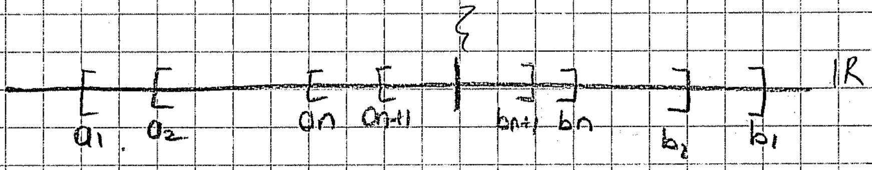
$A^{\circ}\cup\partial A=\bar{A}\neq A$

$\Rightarrow$ A kapalı değil

İÇ İÇE ARALIK ÖZELLİĞİ (Nested Interval)

Her $n\in\mathbb{N}$ icin $I_n\subset\mathbb{R}$ kapalı aralıklar ve $I_n\supset I_{n+1}$ kosulu sağlanıyor ise $\bigcap_n I_n\neq\emptyset$,

$I_n=[a_n,b_n]$



$\forall n$ icin $a_n\leq b_n\leq b_1$

$\{a_n:n\in\mathbb{N}\}\subset\mathbb{R}$ üstten b_1 ile sınırlı. Eküs özelliğinden $\sup\{a_n:n\in\mathbb{N}\}=\xi$ vardır.

İddia: $\xi\leq b_n$ $\forall n$.

$(\forall n$ icin $\xi\in[a_n,b_n]=I_n\Rightarrow\xi\in\bigcap_n I_n)$

$\forall n\in\mathbb{N}$ icin $\xi\leq b_n$ esitsizliğinin doğru olmadığını kabul edelim. $\exists m\in\mathbb{N}$: $b_m<\xi$

$\Rightarrow b_m$ $\{a_n:n\in\mathbb{N}\}$ kümesinin üst sınırı değildir.

$\Rightarrow \exists q \in \mathbb{N}$ vardır öyle ki $b_m \leq a_q < \xi$

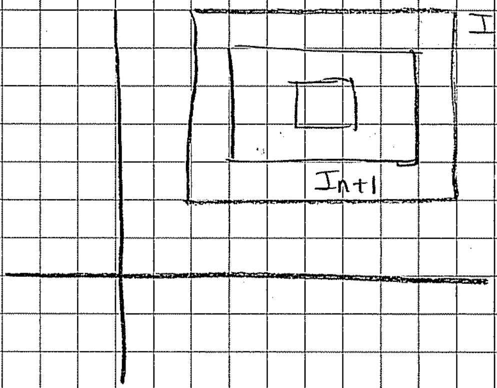
$r = \max\{m, q\}$

$b_r \leq b_m \leq a_q \leq a_r \qquad [a_r, b_r] \neq \emptyset$ ↯

Her $n \in \mathbb{N}$ için $I_n \subset \mathbb{R}^k$ kapalı kümeleri için

$I_n \supset I_{n+1} \supset \cdots \supset \cdots$ koşulu sağlanıyor ise $\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n \neq \emptyset$

Özel Durum: $I_n \subset \mathbb{R}^2$



$I_n = [a_n, b_n] \times [a_n', b_n']$

$\mathbb{R} \supset [a_n, b_n] \supset [a_{n+1}, b_{n+1}]$

$\mathbb{R} \supset [a_n', b_n'] \supset [a_{n+1}', b'_{n+1}]$

$\xi \in \bigcap_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n]$

$\mu \in \bigcap_{n=1}^{\infty} [a_n', b_n']$

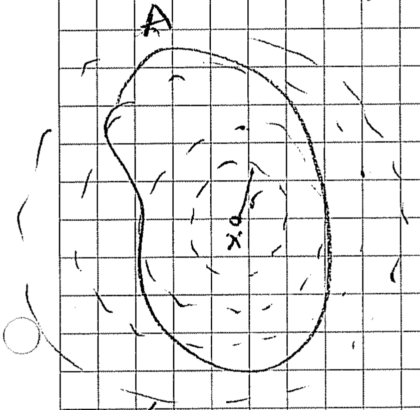
$\Rightarrow (\xi, \mu) \in \bigcap_{n=1}^{\infty} I_n$

Tanım: $A \subset \mathbb{R}^n$ bir alt küme ve $x \in \mathbb{R}^n$ olsun. Her $r>0$ için $B(x,r)\setminus\{x\} \cap A \neq \emptyset$ ise x elemanına A kümesinin yığılma (limit noktası) denir (accumulation / cluster / limit point)

$x \in A^\circ \Rightarrow \exists r>0 : B(x,r) \subset A$

$\Rightarrow B(x,r)\setminus\{x\} \cap A \neq \emptyset$

$\Rightarrow x$ limit noktasıdır.



$A' = \{ A$ kümesinin limit noktalarının kümesi $\}$

r ne kadar büyük olursan ol A ile kesişimi boştan farklı.

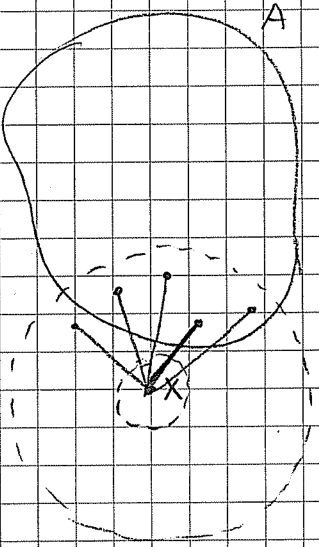
Sonuç: $x \in A'$ ise x'in her r yarıçaplı delinmiş komşuluğunda A'dan sonsuz tane eleman vardır.

İspat: $r>0$ fix alalım.

$\underbrace{B(x,r)\setminus\{x\}}_{\text{delinmiş komşuluk}} \cap A = \{x_1,\dots,x_n\}$

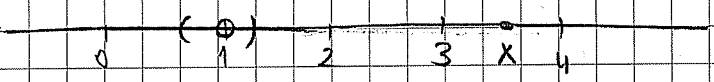
$s = \min_{1\le i\le n} \|x-x_i\|$ olsun.

$0<r'<s$ için $B(x,r')\setminus\{x\} \cap A = \emptyset \Rightarrow x \notin A'$ ↯



?

Ör: $\mathbb{N}$, $\mathbb{N}^\circ = \emptyset$ $\partial\mathbb{N} = \mathbb{N} = \overline{\mathbb{N}}$ kapalı



$x \in \mathbb{N}$ $\forall r>0$ $B(x,r)\setminus\{x\} \cap \mathbb{N} = \emptyset$

$r<1 \Rightarrow \emptyset$

→

$x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{N}$ $n < x \leq n+1$

$\exists n \in \mathbb{N}$ $[\![x]\!] < x < [\![x]\!] + 1$

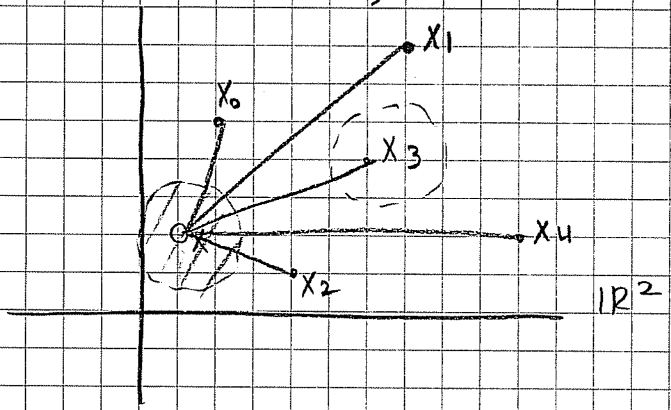
$r < \max(x - [\![x]\!], [\![x]\!] + 1 - x)$ seçilirse

$B(x,r) \setminus \{x\} \cap \mathbb{N} = \emptyset$

$\Rightarrow x \notin \mathbb{N}'$

$\Rightarrow N' = \emptyset$

Ör: $A = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\} \subseteq \mathbb{R}^2$



$r < \delta = \min\limits_{1 \leq i \leq n} \|x - x_i\|$

$\exists r < \delta$ vardır öyle ki

$B(x,r) \setminus \{x\} \cap A = \emptyset$ olduğundan

$x \notin A'$, $A' = \emptyset$

- Her reel sayı $\emptyset$ kümesinin limit noktasıdır.
- $(a,b]$ $A' = [a,b]$
- (a,b) $A' = [a,b]$

Teorem: $A \subseteq \mathbb{R}^n$ kapalı olması için gerek ve yeter koşul $A' \subseteq A$ olmasıdır.

$$\left[\ \bar{A} = A^\circ \cup \partial A = A \cup A'\ \right]$$

İspot: limit noktası

08/03/2017

$(\Rightarrow:)$ $x \in A'$ ve $x \notin A$ kabul edelim. $x \notin A \Rightarrow x \in A^c$ ayrıca $\bar{A} = A$ olduğundan $x \in A^c = A^{\circ c}$

$\Rightarrow \exists r > 0 : B(x,r) \subset A^c$

$\Rightarrow \exists r > 0 : B(x,r) \cap A = \emptyset$

$\Rightarrow x \notin A'$ ↯

$\Rightarrow x \in A' \Rightarrow x \in A.$

($\Leftarrow$:) $A' \subseteq A \Rightarrow A^c$ açık

$x \in A^c$ alalım (Eğer $x \in A^{c\circ}$ gösterilir ise $A^c = A^{c\circ}$)

Böylece $x \notin A'$

$\exists r>0$: $B(x,r) \setminus \{x\} \cap A \overset{\phi}{=}$

$\Rightarrow B(x,r) \setminus \{x\} \subset A^c$ ayrıca $x \in A^c$

$\Rightarrow B(x,r) \subset A^c$

$\Rightarrow$ x elemanı A^c kümesinin iç noktasıdır.

$\Rightarrow A^{c\circ} = A^c$ açık

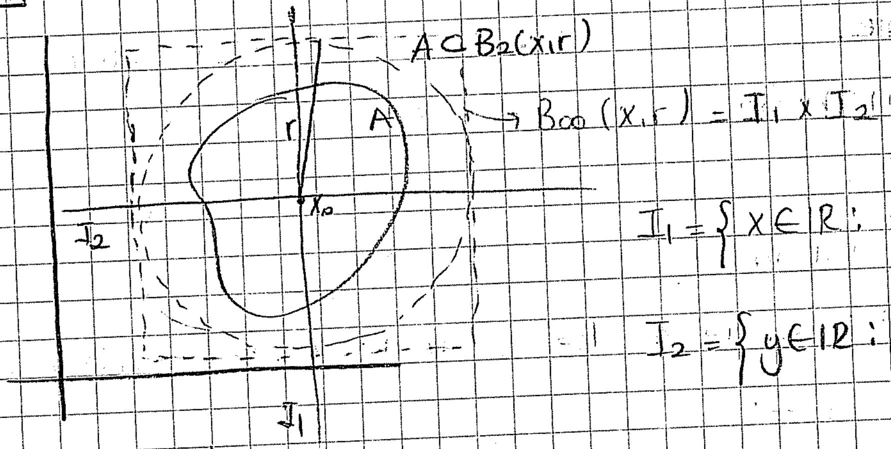
$\Rightarrow$ A kapalı.

Ödev: $\overline{A} = A \cup A'$ $(= A^\circ \cup \partial A)$

BOLZANO - WEIERSTRASS TEOREMİ:

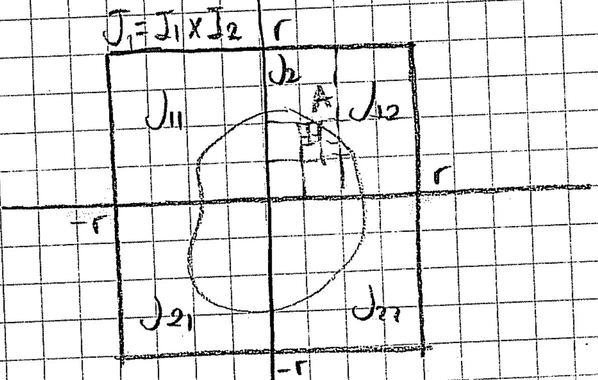
$A \subset \mathbb{R}^n$ sonsuz elemanlı sınırlı bir alt küme ise en az bir tane yığılma noktası vardır.

İspat: $n=2$, $\mathbb{R}^2$



$I_1 = \{x \in \mathbb{R} : -r \leq x \leq r\}$

$I_2 = \{y \in \mathbb{R} : -r \leq y \leq r\}$



J_1'i 4 eşit parçaya böldükten sonra bu parçalardan en az biri sonsuz tane A'nın elemanını içermeli.

4 parçada sonlu tane eleman icerse A sonlu olmalıdır. ↯

J_2 sonsuz tane eleman icersin. J_2'yi 4 esit parçaya bölünürse en az bir tanesi sonsuz tane eleman içermeli, J_3 olsun.

$J_1 \supset J_2 \supset J_3 \supset \dots$

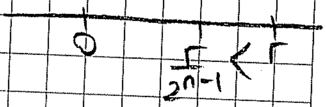
J_i'ler kapalı aralıklar olmak üzere yukarı koşulu sağlıyor ve sonsuz tane elemanı varsa;

$\xi \in \bigcap_{n=1}^{\infty} J_n \neq \emptyset$

__İddia:__ $\xi \in A'$

$\forall r' > 0 : B(\xi, r') \setminus \{\xi\} \cap A \neq \emptyset$

$\xi \in \bigcap_{n=1}^{\infty} J_n \Rightarrow \xi \in J_n \ \forall n$. $\forall r' > 0$ için $\exists n$ vardır öyle ki $\frac{r}{2^{n-1}} < r'$



$\Rightarrow B(\xi, r') \setminus \{\xi\} \supset J_n$

$\Rightarrow B(\xi, r') \setminus \{\xi\} \cap A \supset J_n \cap A \neq \emptyset$

$\Rightarrow \xi \in A'$

Kompakt Küme:

$A \subset \mathbb{R}^n$ alt küme

$I \rightarrow$ indis kümesi olsun.

($(I, \leq) \longrightarrow$ sıralama ve i_1 ve $i_2 \in I$ $\exists i_3 : i_3 \geq i_1$ ve $i_3 \geq i_2$)

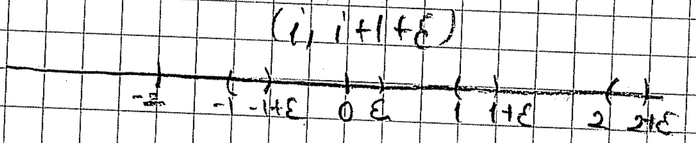
$(O_i)_{i \in I}$, $\mathbb{R}^n \supseteq O_i$'lerin hepsi açık kümeler olsun. Eğer $A \subset \bigcup_{i \in I} O_i$ ise (O_i) ailesine A'nın açık örtüsü adı verilir.

$I_0 \subset I$ alt indisi olmak üzere $A \subset \bigcup_{i \in I_0} O_i$ ise $(O_i)_{i \in I_0}$ alt açık örtü adı verilir.

__ÖR:__ $\mathbb{R}$

Fix $\varepsilon > 0$ için,

$\mathbb{R} \subset \bigcup_{i \in \mathbb{Z}} (i, i+1+\varepsilon)$



$\{(i, i+1+\varepsilon)\}_{i\in\mathbb{Z}}$ ailesi $\mathbb{R}$'nin açık örtüsüdür.

$\{(-i, i)\}_{i=1}^{\infty}$ " " "

ÖR: $A=(0,1)$ $\{O_i\} = \{(-1,1)\}$ (Kompakt değil.)

$\{O_n\}_{n=2}^{\infty} = \left\{\left(\frac{1}{n}, \frac{2}{n}\right)\right\}_{n=2}^{\infty} \longrightarrow$ A'yı kapsayan sonlu alt örtüsü YOKTUR!

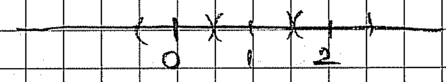
$A=\{x_0, \dots, x_n\}$ $x_i \in \mathbb{R}$ $i=0,\dots,n$ $\Rightarrow$ Kompakt

$\forall r: A \subset \bigcup_{i=0}^{n} B(x_i r)$

Tanım: $A \subset \mathbb{R}^n$ alt kümesi o.ü A'nın her açık örtüsünün bir sonlu alt örtüsü var ve A'yı kapsıyor ise A'ya kompakt küme denir. (Tıkız)

ÖR: $\mathbb{N} = \{0, \dots, \infty\}$

$r=\frac{1}{2}$ olsun. $n\in\mathbb{N}$ $\{B(n, \frac{1}{2})\}_{n=0}^{\infty}$ açık örtü



$\mathbb{N} \subset \bigcup_{n=0}^{\infty} B(n, \frac{1}{2})$

I_0 sonlu $\mathbb{N} \not\subset \bigcup_{n\in I_0} B(n, \frac{1}{2}) \Rightarrow \mathbb{N}$ kompakt değil.

Teorem: A kompakt $\Rightarrow$ sınırlı ve kapalıdır.

$(\Leftarrow)$
Heine-Borel, $\mathbb{R}^n, \mathbb{C}^n$, V $\dim V < +\infty$

İspat: Sınırlılık: $x\in A$ fix olsun.

$\{B(x, n)\}_{n=1}^{\infty}$, $\{B(x_i n)\}_{n=1}^{\infty}$ aile A'nın açık örtüsüdür.

$A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} B(x, n)$

$y\in A \Rightarrow \exists n' : y\in B(x, n')$

$\|y-x\| = r > 0$, $1\in\mathbb{R}$

$\exists n'\in\mathbb{N} : n' . 1 > r = \|y-x\|$

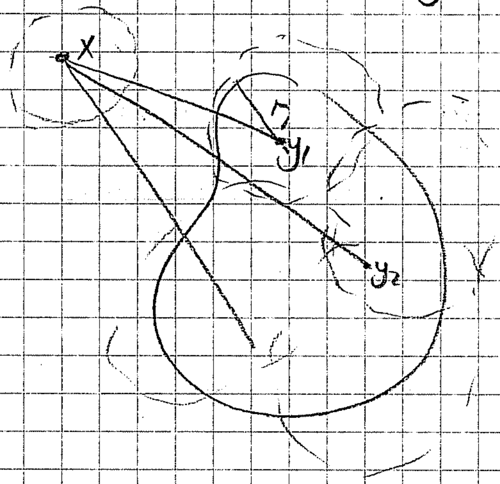
$\left(B(x, n') = \{y\in\mathbb{R}^n : \|x-y\| < n'\}\right) \Rightarrow y \in B(x, n')$

Kapalılık: A^c açıktır.

$(x \in A^c, \exists r > 0 : B(x,r) \cap A = \emptyset)$. $y \in A$ alınırsa $\|x-y\| = r_y$

A kompakt ise $\bigcup_{y \in A} B(y, r_y) \supset A$.

$\exists y_1, \dots, y_n \in A$ vardır öyle ki $A \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} B(y_i, r_{y_i})$



$\min \|x-y\| > \min r_{y_i}$

UYGULAMA (10.03.2017)

1) $A = \{x \in \mathbb{R} : x \in [0,1], x \in \mathbb{Q}\}$

$A^\circ, \overline{A}, \partial A, (\mathbb{R}^n - A)^\circ, A' = ?$

$x \in A^\circ \Rightarrow \exists r > 0, B(x,r) \subseteq A$

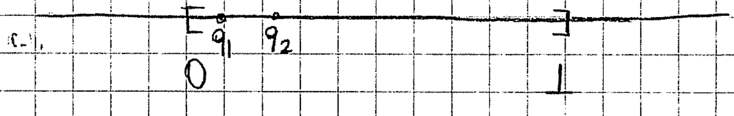
$x \in \overline{A} \Rightarrow \forall \varepsilon > 0, B(x,\varepsilon) \cap A \neq \emptyset$

$A^\circ \subseteq A$ → her zaman.

A açık $\Leftrightarrow A^\circ = A$.

↓

ε'lu tanımları.



→ Reel sayılarda olduğu için yuvar olduğun zaman irrasyonel sayı da içerir.

$\forall x \in A$ için ve $\forall r > 0$ için $B(x,r) \not\subseteq A$

$$\overset{\shortparallel}{(x-r, x+r)} \not\subseteq A$$

$A^\circ = \emptyset$

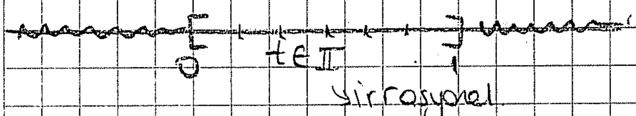
$q \in Q$ $q \in [0,1]$, $q \in \overline{A}$ (?), Çünkü $\forall \varepsilon > 0$ için $q \in B(q,\varepsilon) \cap A \neq \emptyset$

$t \in Q$, $t \in [0,1]$, $t \in \overline{A}$ çünkü $\forall \varepsilon > 0$ için $B(t,\varepsilon) \cap A \neq \emptyset$

$x\in\partial A$, $\forall\varepsilon>0$ için $B(x,\varepsilon)\cap A\neq\emptyset$
$B(x,\varepsilon)\cap\mathbb{R}^n-A\neq\emptyset$ } Hem içeriden hem dışarıdan nokta içerecek.

$\partial A=[0,1]$

$\mathbb{R}^n-A=(-\infty,0)\cup(1,\infty)\cup\{t\in\mathbb{I},\ t\in[0,1]\}$

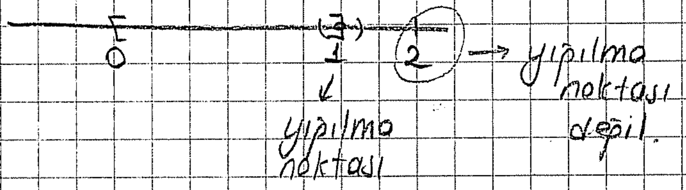


$\forall t\in\mathbb{I}$, $t\in[0,1]$, $t\notin(\mathbb{R}^n-A^\circ)^\circ$

$(\mathbb{R}^n-A)^\circ=(-\infty,0)\cup(1,\infty)$

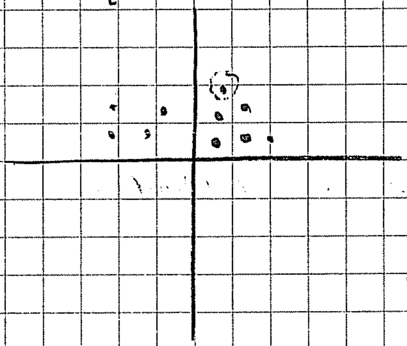
$\underline{A'}$

$\forall r>0,\ (B(x,r)-\{x\})\cap A\neq\emptyset$



$A'=[0,1]$

b) $A=\{(p,q)\in\mathbb{R}^2,\ p,q\in\mathbb{Q}\}$ $A^\circ, \partial A, A', \overline{A}$



$A^\circ=\emptyset$

$\overline{A}=\mathbb{R}^2$

$\forall r>0,\ B(x,r)\cap A\neq\emptyset\rightarrow$ Kapanış

$\forall(p,q)\in A$ ise $(p,q)\in\overline{A}$ çünkü

$(p,q)\in A\cap B((p,q),r)\neq\emptyset$, $\forall r>0$

(a,b) ($a\in\mathbb{I}$, $b\in\mathbb{I}$ ya da a ve b'den en az biri irrasyonel olsun.) $\Rightarrow$ $(a,b)\in\overline{A}$

$\overline{A}=\mathbb{R}^2$ ($\overline{A}\neq A$ old A kapalı değil)

$\partial A=\mathbb{R}^2=A'$

2) $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$ için $(A \cup B)' = A' \cup B'$ old. gösteriniz.

$(\subseteq:)$ $x \in (A \cup B)'$ **Amaç:** $x \in A'$ ya da $x \in B'$

$\forall \varepsilon > 0$ için $B(x,\varepsilon) - \{x\} \cap A \neq \emptyset$

veya $\forall \varepsilon > 0$ için $B(x,\varepsilon) - \{x\} \cap B \neq \emptyset$

$\varepsilon > 0$ alalım. $x \in (A \cup B)'$ olduğu için,

$$(B(x,\varepsilon) - \{x\}) \cap (A \cup B) \neq \emptyset$$

$$[(B(x,\varepsilon) - \{x\}) \cap A] \cup [B(x,\varepsilon) - \{x\} \cap B] \neq \emptyset$$

$\Rightarrow B(x,\varepsilon) - \{x\} \cap A \neq \emptyset$ veya $B(x,\varepsilon) - \{x\} \cap B = \emptyset$.

$(\supseteq:)$ $x \in A' \cup B'$

Amaç: $x \in (A \cup B)'$ yani $\forall \varepsilon > 0$, $(B(x,\varepsilon) - \{x\}) \cap (A \cup B) \overset{?}{\neq} \emptyset$)

$\varepsilon > 0$ alalım. $x \in A'$ veya $x \in B'$ olduğu için,

$(B(x,\varepsilon) - \{x\}) \cap A \neq \emptyset$ veya $(B(x,\varepsilon) - \{x\}) \cap B \neq \emptyset$

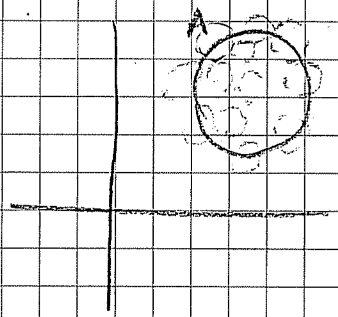
$\Rightarrow (B(x,\varepsilon) - \{x\}) \cap (A \cup B) \neq \emptyset$.

3) Verilen kümelerin kompaktlığını inceleyiniz.

a) $A = \{x \in \mathbb{R}^2, \|x\| < 1\}$

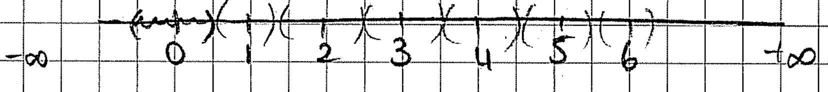
b) $A = \mathbb{N}$.

Açık örtü tanımı: $A \subseteq \bigcup_{i \in I} O_i$, O_i açık



$\Rightarrow A \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} O_i$ ise kompakttır.

b)

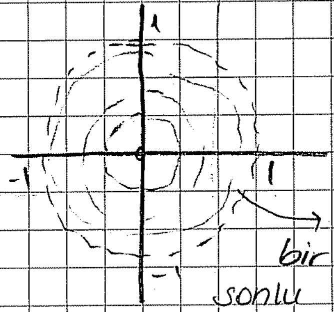


$\mathbb{N} \subseteq \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \left(n - \frac{1}{2}, n + \frac{1}{2}\right)$ $\Rightarrow$ sonlu alt örtüsü yoktur. Bu yüzden kompakt değildir.

$\left\{ O_n = \left(n - \frac{1}{2}, n + \frac{1}{2}\right) : n \in \mathbb{N} \right\}$ $\mathbb{N}$'nin bir örtüsüdür ve bu örtünün sonlu bir alt örtüsü yoktur.

$\therefore$ $\mathbb{N}$ kompakt değildir.

a) $||x|| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2} < 1 = x_1^2 + x_2^2 < 1$



$O_n = \{ x \in \mathbb{R}^2 ; ||x|| < 1 - \frac{1}{n} \}$

$A \subseteq \bigcup_{n \in \mathbb{N}} O_n$

Sonlu tae cember kullansa yine de acıkta bir yer kalacak ∞'a kadar gidersen dur. Örtü sonlu örtü değildir.

$\{ O_n : n \in \mathbb{N} \}$ örtüsünün sonlu alt örtüsü yoktur. O halde A kompakt değildir!

? 4) $A \subseteq \mathbb{R}^n$ kompakt ve $x_0 \in \mathbb{R}^n$, $x_0 \notin A$ ise $A \cup \{x_0\}$'ın kompakt olduğunu gösteriniz.

$\mathcal{O} = \{ O_i : i \in I \}$ $A \cup \{x_0\}$'ın bir acık örtüsü olsun.

$A \subseteq A \cup \{x_0\} \subseteq \bigcup_{i \in I} O_i$

$\mathcal{O}$, A icin acık bir örtüdür A kompakt olduğundan $A \subseteq \bigcup_{i=1}^{N} O_i$

Ayrıca $x \in A \cup \{x_0\} \subseteq \bigcup_{i \in I} O_i$ old. $\exists i_0$, $x \in O_{i_0}$

$A \cup \{x_0\} \subseteq (\bigcup_{i=1}^{N} O_i) \cup O_{i_0}$ olduğundan $A \cup \{x_0\}$ kompakttır.

5) $C, F \subseteq \mathbb{R}^n$ kompakt ise $C \cup F$'nin kompakt olduğunu gösteriniz.

C ve F kompakt olsun. $C \cup F \subseteq \bigcup_{i \in I} O_i$ olsun. (O_i acık)

$C \subseteq C \cup F \subseteq \bigcup_{i \in I} O_i$ old. $\{ O_i ; i \in I \}$ C'nin acık örtüsüdür.

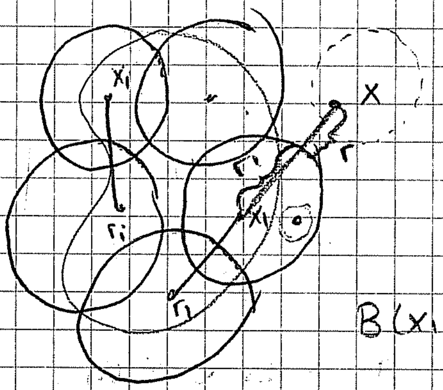
C kompakt olduğu icin $C \subseteq \bigcup_{k=1}^{n} O_{i_k}$. Benzer şekilde, $F \subseteq \bigcup_{m=1}^{n} O_{i_m}$.

$\{ O_{i_m} : m = 1, \dots, n \} \cup \{ O_{i_k} : k = 1, \dots, n \}$ $C \cup F$'nin bir örtüsüdür.

14/03/2017

kompakt $\Rightarrow$ sınırlı ve kapalıdır.

Kapalılık $= \overset{\circ}{A^c} = A^c$



$A \subset B(x_i, r_i)$

$s = \min\limits_{1 \le i \le n} \{\|x - x_i\|\} \quad \forall i = 1, \dots, n$

$r < \left| s - \max\limits_{1 \le i \le n} \{r_i\} \right|$

$B(x,r) \subset A^c \Rightarrow x \in \overset{\circ}{A^c}$

$\Rightarrow A^c \subset \overset{\circ}{A^c}$

$\Rightarrow A^c = \overset{\circ}{A^c} \Rightarrow A^c$ Açık

$\Rightarrow A$ kapalı

$B(x,r) \cap A = \emptyset$

$z \in B(x,r) \cap A$ olsun.

$\Rightarrow z \in B(x,r) \wedge z \in A$

$\Rightarrow \|z - x\| < r \Rightarrow \|z - x\| < \left| s - \max\limits_{1 \le i \le n} \{r_i\} \right|$, Kabul edelim ki $s > \max\{r_i\}$ olsun.

$\Rightarrow z \notin B(x, r_i) \quad \forall i = 1, \dots, n$

$\Rightarrow z \notin A$ ↯

$z \in B(x,r)$ ve $B(x,r) \cap B(x_i, r_i) = \emptyset$

$\Rightarrow z \notin B(x_i, r_i), \forall i$

$\Rightarrow z \notin A$

Kabul edelim ki $s < \max\limits_{1 \le i \le n} \{r_i\}$, $\exists$ bir tane j için $x \in B(x_j, r_j)$

$\forall i = \{1, \dots, n\} \setminus \{j\}$, $z \notin B(x_i, r_i)$

Eğer $z \in A$ ve $z \in B(x_j, r_j) \Rightarrow z \in A^\circ$ veya $z \in \partial A$

$\Rightarrow B(x,r) \subset A^\circ$ veya $B(x,r) \cap A \neq \emptyset$

$r < \max\{r_i\} - s$ ↯

Heine - Borel Teoremi: $\mathbb{R}^2$

$\mathbb{R}^n$ $(\mathbb{C}^n)$ uzayında;

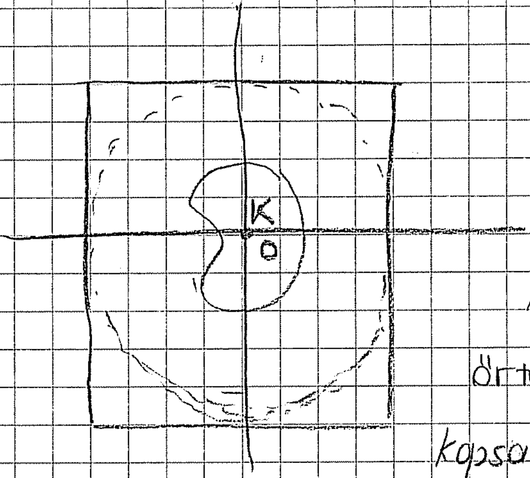
K kompakt $\Leftrightarrow$ kapalı ve sınırlı olmasıdır.

İspat: $(\Rightarrow:)$ ✓

$(\Leftarrow:)$ $\{G_\alpha\}_{\alpha\in A}$ K'nın açık örtüsü olsun.

"G_α açık kümeler ve $K \subset \bigcup_\alpha G_\alpha$ ve $K \subset \bigcup_{i=1}^{n} G_{\alpha_i}$"

K kapalı ve sınırlı, K sınırlı olduğundan $K \subset B(0,R)$



$I = I_1 \times I_2$

$= \{x\in\mathbb{R} : |x|<R\} \times \{y\in\mathbb{R} : |y|<R\}$

K kompakt olmasın. $\{G_\alpha\}$ açık örtüsü sonlu tane elemanı ile K'yi kapsamasın. $\left(\cancel{K \subseteq \bigcup_{i=1}^{m} G_{\alpha_i}} \right)$

I'yı 4 eşit parçaya böldüğümüzde 1 parçadan en az biri sonlu tane. G_α ile kapsanmaz. Kapsanmayan parça J_1 olsun. J_1'i 4 parçaya bölelim. En az bir parça sonlu tane G_α ile kapsanamaz.

$\vdots$ J_2 olsun.

Tümevarımla J_n'ler oluşturulur.

$I \supset J_1 \supset J_2 \supset \ldots \supset J_n$; J_n'ler kapalı ve tüm J_n'ler sonlu tane G_α ile kapsanmaz. İç içe aralık özelliğinden $\bigcap_{n=1}^{\infty} J_n \neq \emptyset$ $\exists x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} J_n \Rightarrow x\in K'$ ve K

kapalı ise $\Rightarrow x\in K$

$\exists\, \varepsilon>0$; $B(x,\varepsilon)\setminus\{x\} \cap K \neq \emptyset$ $\Rightarrow B(x,\varepsilon)\cap K \neq \emptyset$

$\Rightarrow J_n \subset B(x,\varepsilon) \subset G_{\alpha_0}$ ↯

Teorem: $K \subset \mathbb{R}^n$ alt kümesi olsun. Aşağıdaki koşullar birbirine denktir.

(i) K kompakt

(ii) K kapalı ve sınırlı

(iii) K'nın her sonsuz elemanlı alt kümesinin yığılma noktası vardır ve $\in K^{-}$'dır.

(K'nın her sonsuz elemanlı alt kümesi K'da yığılma noktasına sahiptir.)

(i) $\Leftrightarrow$ (ii) ve (ii) $\Leftrightarrow$ (iii)

İspat: (i) $\Leftrightarrow$ (ii) Heine-Borel Teoremi

(ii) $\Rightarrow$ (iii) $A \subset K$ sonsuz elemanlı alt küme olsun,

K sınırlı $\Rightarrow$ A'da sınırlıdır.

$\Rightarrow$ Bolzano Weierstrass teoreminden A'nın yığılma noktası vardır.

$x \in \overline{A} \subset \overline{K} = K$

$\Rightarrow x \in K$.

(iii $\Rightarrow$ ii) Sınırlılık: K sınırlı olmasın.

$\forall n \in \mathbb{N}$ için $\exists x_n \in K : \|x_n\| > n$

$A = \{x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\} \subset K$. O halde $\exists y \in K$ öyle ki $y \in A'$

$n > 1 + \|y\|$ olsun.

$\|x_n - y\| \geq \|x_n\| - \|y\| > n - \|y\| > 1$

$\forall r > 0$ için $B(y,r) \setminus \{y\} \cap A \neq \emptyset$

$r < 1$ $B(y,r) \setminus \{y\} \cap A = \emptyset$ ↯

Kapalılık: $x \in K'$ $(\Rightarrow x \in K)$

$x_1 \in B(x,1) \setminus \{x\} \cap K \neq \emptyset$

$x_2 \in B(x,\frac{1}{2}) \setminus \{x\} \cap K \neq \emptyset$

$\vdots$

$x_n \in B(x,\frac{1}{n}) \setminus \{x\} \cap K \neq \emptyset$

$\vdots$

$A = \{x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\} \subset K.$

$\Rightarrow \exists y \in A'$ ve $y \in K.$

$x = y$?

$y \neq x$ olsun.

$0 < \|y - x\| \leq \|y - x_n\| + \|x_n - x\|$

$\leq \|y - x_n\| + \frac{1}{n}$

$\frac{\|y-x\|}{2}$, $\|x_n - x\| < \frac{1}{n}$

Arsimet $\frac{\|y-x\|}{2} > 0$ ve $1 \in \mathbb{R}.$

$\exists n_0$: $n_0 \frac{\|y-x\|}{2} > 1$

$\Rightarrow \frac{\|y-x\|}{2} > \frac{1}{n_0} > \frac{1}{n}$ $n > n_0.$

$n > n_0$ o.ü. $0 < \|y - x\| \leq \|y - x_n\| + \frac{\|y-x\|}{2}$

$\Rightarrow 0 < \frac{\|y-x\|}{2} \leq \|y - x_n\|$

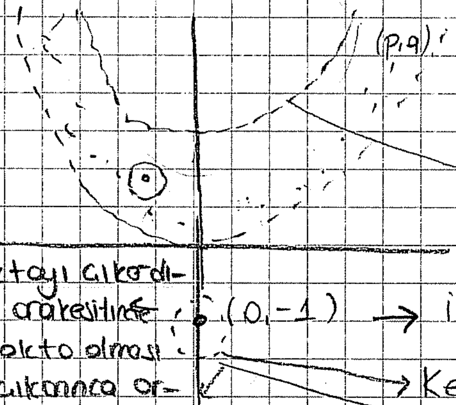
$\Rightarrow y \notin A'$ ↯

$\Rightarrow y = x.$

UYGULAMA (15/03/2017)

1) $A = \{ (x,y) \in \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} : -1 \leq x^2 - y < 0 \} \cup \{(0,-1)\}$

$A^0, \overline{A}, \partial A, A'$, A kapalı? açık? kompakt?



$-1 = x^2 - y \Rightarrow y = x^2 + 1$

$x^2 - y < 0 \Rightarrow y = x^2$

→ Tüm $\mathbb{R}$ olmadığı için kesik kesik.

Bu noktayı çıkardığımızda arakesitinde hala nokta olması lazım çıkarınca ortak nokta kalmıyor. Bu yüzden A' değil.

$(0,-1)$ → iç nokta olamaz.

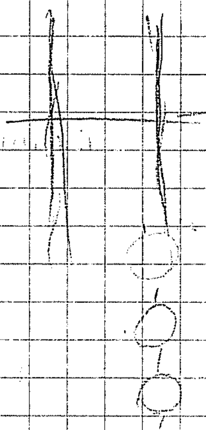
→ Kendisini içeriyor bu yüzden kapanışta.

" " ve dışarıdan nokta içeriyor bu yüzden sınır nokta.

"$A^0 \subseteq A$" , "$x \in A^0 \Rightarrow \exists r > 0 , B(x,r) \subseteq A$"

$(0,-1) \notin A^0$

$A^0 = \emptyset$.



"$x \in \overline{A} \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 , B(x,\varepsilon) \cap A \neq \emptyset$" , $A \subseteq \overline{A}$

$\overline{A} = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \leq x^2 - y \leq 0 \} \cup \{(0,-1)\}$

"$x \in \partial A \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 , B(x,\varepsilon) \cap A \neq \emptyset$ "
$B(x,\varepsilon) \cap A^c \neq \emptyset$

$\partial A = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \leq x^2 - y \leq 0 \} \cup \{(0,-1)\} = \overline{A}$

"$x \in A' \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 , B(x,\varepsilon) - \{x\} \cap A \neq \emptyset$"

$A' = \overline{A} - \{(0,-1)\}$ → Yığılmış şekilde bir sınır eleman olacak.

$\overline{A} \neq A$ old. A kapalı değildir.

$A^0 \neq A$ old. A açık değildir.

"Kapalı ve sınırlı ise kompakttır!" ⇒ A kapalı olmadığı için kompakt değildir. (Heine Borel teoreminden.)

2) $A \subseteq \mathbb{R}$ sınırlı , $A \neq \emptyset$ ve $x = \sup A$ ise $x \in \partial A$ olduğunu gösteriniz.

Amaç: $x \in \partial A$. Yani, $\forall \varepsilon > 0$, $B(x,\varepsilon) \cap A \neq \emptyset$ ve $B(x,\varepsilon) \cap A^c \neq \emptyset$ (?)

$\varepsilon > 0$ alalım. $x - \varepsilon$ bir üst sınır değildir. $\exists a \in A$, $x - \varepsilon < a$.

$\rightarrow$ Yığılma noktalı olara bak.

IR'de çalışıyorsam aralıktır. $B(x,\varepsilon)=(x-\varepsilon,x+\varepsilon)$

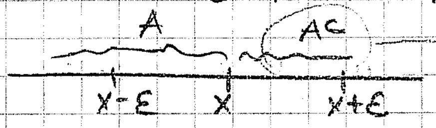
$\exists a\in A, \quad x-\varepsilon<\underset{\downarrow}{a<x}<x+\varepsilon$

x bir üst sınırdır

$a\in(x-\varepsilon,x+\varepsilon)=B(x,\varepsilon)$

$\Downarrow$

$B(x,\varepsilon)\cap A\neq\emptyset$



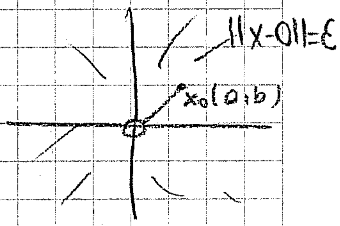
$\Rightarrow$ Aynı zamanda yuvanın elemanı.

$(x,x+\varepsilon)=B(x,\varepsilon)\cap A^c\neq\emptyset$

3) $\mathbb{R}^2-\{(0,0)\}$'ın $\mathbb{R}^2$'de açık olduğunu gösteriniz.

Amaç: $(\mathbb{R}^2-\{(0,0)\})^\circ=\mathbb{R}^2-\{(0,0)\}$

"Tümleyeninin kapalı olduğunu göstermek daha kolay. $\{(0,0)\}$ tek nokta kümesi A^c old. için tek nokta her zaman kapalı. Tümleyeni kapalı olduğu için kendisi açık olur."



$\subseteq$: açıktır. $(A^\circ\subseteq A)$

$\supseteq$: $\mathbb{R}^2-\{(0,0)\}\subseteq(\mathbb{R}^2-\{(0,0)\})^\circ$ (?)

$x=(a,b)\in\mathbb{R}^2-\{(0,0)\}$ (? $\exists\varepsilon>0$, $B(x,\varepsilon)\subseteq\mathbb{R}^2-\{(0,0)\}$

$\varepsilon=\|x\|=\|x-0\|$ seçersek,

$B(x,\varepsilon)\subseteq\mathbb{R}^2-\{(0,0)\}$ ve böylece $x\in\mathbb{R}^2-\{(0,0)\}$

ÖDEV: $A\subseteq\mathbb{R}$ açık. $B\subseteq\mathbb{R}^2$

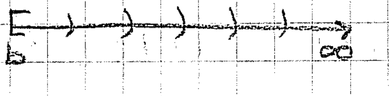
$B=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x\in A\}$ açık olduğunu gösteriniz.

$z=(x,y)$, $B(z,\underset{?}{\varepsilon})\subseteq B$

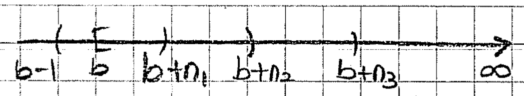
4) $A=[b,\infty)$ kompakt mıdır? (Örtü tanımını kullanınız.)

"Sınırlı olmadığı için Heine-Borel'den kompakt değildir."

$$A\subseteq\bigcup_{n=1}^{\infty}\underbrace{(b-1,b+n)}_{\text{On}}$$ ((



$\{(b-1,b+n):n\in\mathbb{N}\}$ A'nın bir örtüsüdür ve bu örtünün sonlu bir alt örtüsü yoktur. Eğer $\{(b-1,b+n):i=1,\ldots,n\}$ sonlu bir alt örtü olsaydı,



$\max\{n_1, \ldots, n_n\} = N$

$\bigcup_{i=1} (b-1, b+n_i) = (b-1, b+N)$

$A \not\subseteq (b-1, b+N)$

$\swarrow$

$b+N+1$

5) $A = \mathbb{Q} \cap [0,1] \subseteq \mathbb{R}$

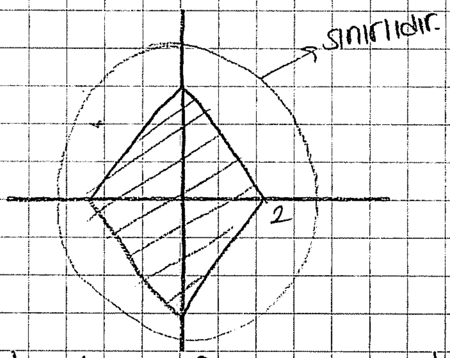
$B = \{ (x,y) \overset{\in \mathbb{R}^2}{:} |x|+|y| \leq 2 \}$ kümelerinin kompaktlığını inceleyiniz.

Sınırlıdır. Aralık içine alınabilir. A:


$A \subseteq B\left(\frac{1}{2}, 1\right) = \left(\frac{1}{2} - 1, \frac{1}{2} + 1\right).$

$\overline{A} = [0,1]$, $[0,1] \neq [0,1] \cap \mathbb{Q}$. $\overline{A} \neq A$ old. için A kapalı değildir.

$\therefore$ A kompakt değildir (Heine-Borel teoreminden)



B kümesi sınırlıdır. $B \subseteq B(0,3)$.

$\overline{A} = A \rightarrow A$ kapalı.

$\therefore$ Heine-Borel teoreminden kompakttır.

6) $A \subseteq \mathbb{R}^n$ sınırlı bir küme olmak üzere $\overline{A}$'nın kompakt olduğunu gösteriniz.

$\overline{A}$ kapalıdır.

$\boxed{\overline{A} \subseteq B(x, \varepsilon)}$

Amaç: $\overline{A}$ sınırlıdır(?)

A sınırlı old. $A \subseteq B\left(x, \frac{\varepsilon}{2}\right)$, $\exists \varepsilon > 0$, $x \in \mathbb{R}$

$\overline{A} \subseteq B(x, \varepsilon)$ (?)

$y \in \overline{A}$ $((y \in B(x,\varepsilon))(?), d(x,y) < \varepsilon$ (?))

$B\left(y, \frac{\varepsilon}{2}\right) \cap A \neq \emptyset$

$\Rightarrow \exists z \in B\left(y, \frac{\varepsilon}{2}\right)$, $z \in A$ $\Rightarrow d(y,z) < \frac{\varepsilon}{2}$, $z \in A$.

$d(y,z) < \frac{\varepsilon}{2}$, $d(x,z) < \frac{\varepsilon}{2} \longrightarrow \left(z \in A \subseteq B\left(x, \frac{\varepsilon}{2}\right)\right)$

$d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y) = d(x,z) + d(y,z) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$

$A = \left\{ \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N} \right\}$

$A^{\circ} = \emptyset$

$\overline{A} = A \cup \{0\}$

$A' = \{0\}$ → Limitten bak

$\partial A = \overline{A}$

I. Vize Sonrası :)

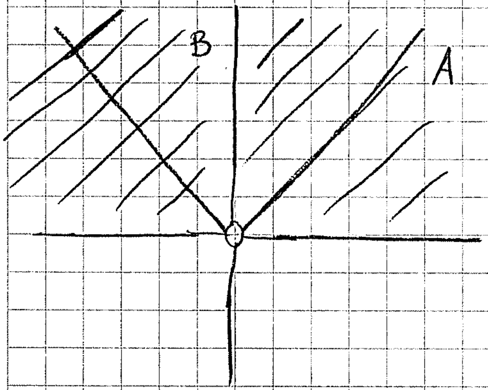
21 - Mart - 2017

Bağlantılı Kümeler;

Tanım; $S \subset \mathbb{R}^n$ alt kümesi o.ü A ve $B \subset \mathbb{R}^n$ açıkları olsun öyle ki,

$A \cap S \neq \emptyset$, $B \cap S \neq \emptyset$, $A \cap B \cap S = \emptyset$ ve $(A \cap S) \cup (B \cap S) = S$

koşulları sağlanıyor ise S'ye bağlantısız küme adı verilir. Bağlantısız olmayan kümeye bağlantılı küme denir.



$S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = |x| \text{ ve } x \neq 0\}$

$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0 \wedge y > 0\}$

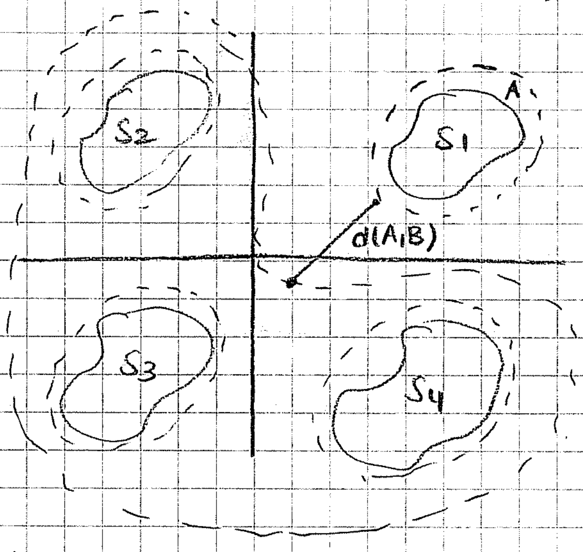
$B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x < 0 \wedge y > 0\}$

$A \cap S \neq \emptyset \quad B \cap S \neq \emptyset$

$S \cap A \cap B = \emptyset$

$(A \cap S) \cup (B \cap S) = S$

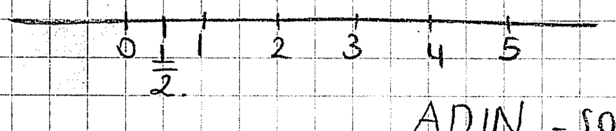
$\Rightarrow S$ bağlantısız.



$S = S_1 \cup S_2 \cup S_3 \cup S_4$

ÖR; $S = \mathbb{N} \subset \mathbb{R}$ $\Rightarrow$ bağlantısız.

$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$



$A \cap \mathbb{N} = \{0\} \neq \emptyset$

$A = (-\infty, \frac{1}{2})$

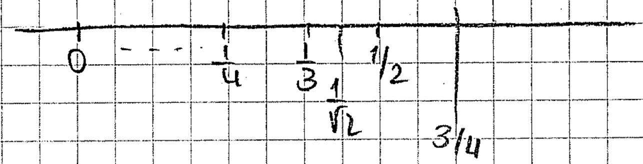
$B \cap \mathbb{N} = \{1, 2, \ldots\} \neq \emptyset$

$B = (\frac{1}{2}, \infty)$

$A \cap B \cap \mathbb{N} = \emptyset$

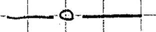
$(A \cap \mathbb{N}) \cup (B \cap \mathbb{N}) = \{0, 1, 2, \ldots\} = \mathbb{N}$

$S = \{ \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N} = \{ 1, 2, \ldots \} \}$ ⇒ bağlantısız.

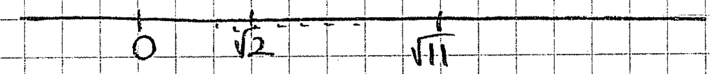


$A = (-2, \frac{1}{\sqrt{2}})$ $B = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \infty)$

$A = (0, \frac{3}{4})$ $B = (\frac{3}{4}, \infty)$



$S \in \Phi_+$ ⇒ Bağlantısız.



$A = (0, \sqrt{2})$, $B = (\sqrt{2}, \infty)$

$S = \Phi$ $(-\infty, \sqrt{2}), (\sqrt{2}, \infty)$

$S = [0,1]$ bağlantılı mıdır? (Bağlantısız olduğunu göstermek yeterli)

$\exists 0 < c < 1$ $A \cap S \neq \emptyset$

$B \cap S \neq \emptyset$

$A \cap B \cap S = \emptyset$

$(A \cap S) \cup (B \cap S) = S.$

$A = (-\infty, c]$ $\wedge$ $B = (c, \infty)$

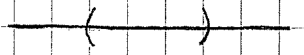
veya

$A = (-\infty, c)$ $\wedge$ $B = [c, \infty)$ en azından bir küme (A veya B) açık olamaz.

⇒ Bağlantılı.

IR'de bağlantılı alt küme S'nin aralık olması demek

$S \subset IR$ bağlantılı $\Leftrightarrow S^c$ bağlantısız

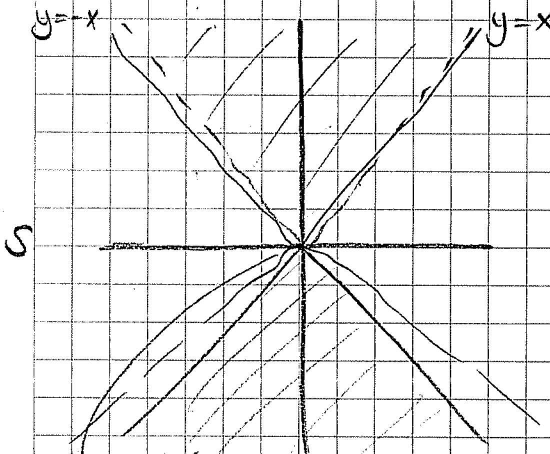


$S = [a,b]$

$S^c = (-\infty, a) \cup (b, \infty)$

$y > x$

$y > -x$



$S = \{(x,y) \in IR^2 : y > |x| \wedge y > 0\} \cup$

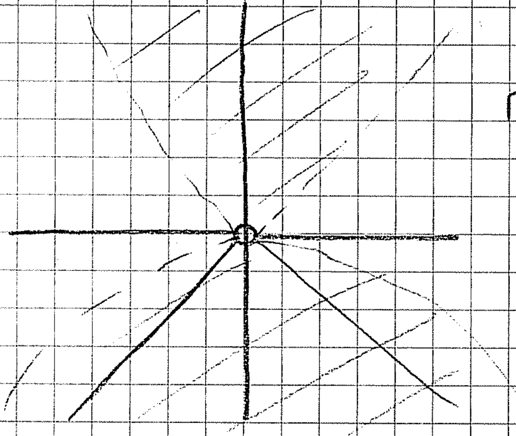
$\cup \{(x,y) \in IR^2 : y \leq |x| \wedge y \leq 0\}$

→ Bağlantılı $\quad y^+$

→ O'ı dahil ettik boş küme olayı ortadan kalktı.

$\{y \leq |x|\} \cap$

$\cap$ B: $\{(x,y) \in IR^2 : y < -\frac{1}{2}|x|\}$ açık kümesi.



Orijinin 1 nokta bağlantılı ya da bağlantısız olma durumu etkiliyor.

<u>Teorem:</u> $S \subset IR$ bağlantılı olması için gerek ve yeter şart S'nin aralık olmasıdır.

($\Rightarrow$:) S bağlantılı $\Rightarrow$ S'nin aralık olması lazım.

S aralık olmasın. $a < b$ ve $a, b \in S$ olsun. $\exists c \in (a,b) ; c \notin S$

$A = (-\infty, c)$ ve $B = (c, \infty)$ alalım.

$\exists a \in A \cap S \neq \emptyset$

$\exists b \in B \cap S \neq \emptyset$

$A \cap B = \emptyset \Rightarrow A \cap B \cap S = \emptyset$

$(A \cap S) \cup (B \cap S) = (A \cup B) \cap S$

$= (IR \setminus \{c\}) \cap S = S.$

$\Rightarrow$ S bağlantısız. ↯

($\Leftarrow$) S aralık $\Rightarrow$ bağlantılıdır.

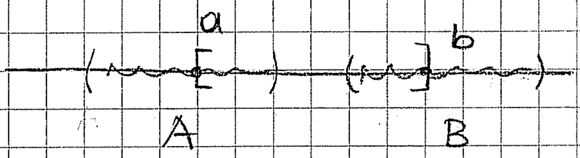
bağlantısız $\Rightarrow$ aralık değil.

$\exists A, B : A \cap S \neq \emptyset$

$B \cap S \neq \emptyset$

$A \cap B \cap S = \emptyset$

$(A \cap S) \cup (B \cap S) = S.$



$a<b$ olsun. (kabul edelim.)

$[a,b] \subset S$ olsun.

$[a,b] \cap A \leq b$ $\Rightarrow$ $\sup([a,b] \cap A)$ var ve $([a,b] \cap A) = c$ olsun.

$\Rightarrow c \in S$

?

Eğer $c \in B$ ise B açık olduğundan c iç noktadır.

$\exists r \in \mathbb{R}_+ : (c-r, c+r) \subset B.$

$c-r<c$ $\longrightarrow$ $c-r$ A için üst sınır.

$\Rightarrow \sup(A \cap [a,b]) \neq c$ ↯

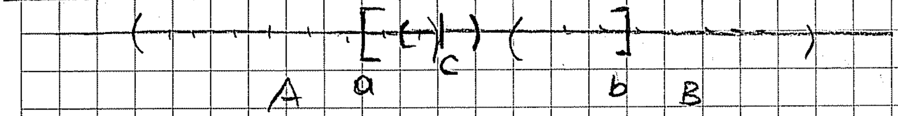
$\exists a' \in A : c-r < a' < c.$

$a' \in [c-r, c] \cap A \neq \emptyset$

$[c-r, c] \subset S.$

$\Rightarrow A \cap B \cap S \neq \emptyset$ ↯ S bağlantısız.

$\Rightarrow c \notin B, \Rightarrow c \in A.$



$A \cap [a,b] \leq B$

$A \cap [a,b] \leq c-\overset{c}{r} \in B$ $(c-r, c) \subset [a,b]$

$\exists a' \in A$

$a' \in (c-r, c) \subset B.$

$a' \in A \cap B \cap C \neq \emptyset$

$c \in A \Rightarrow \exists r' : (c-r', c+r') \subset A$

$\Rightarrow c \in A \cap [a,b)$

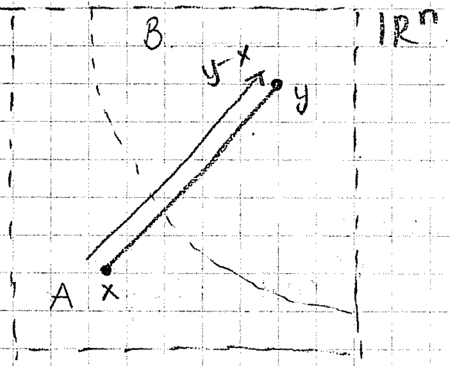
$\Rightarrow r' < b-c.$

$\Rightarrow c+r' < b$ ⟶ sup demistik. Yeni eküs.

$\Rightarrow c+r' < c$ ↯ $c \notin A$

22/03/2017

$\mathbb{R}^n$ bağlantılı kümedir? Gösteriniz.



$\mathbb{R}^n$ bağlantısız olsun. A ve B acık.

$A \cap B = \emptyset$

$A \cup B = \mathbb{R}^n$

$S = \{ x+t(y-x) \ , \ t \in [0,1] \}$

$A_1 = \{ t \in \mathbb{R} : x+t(y-x) \in A \}$

$A_2 = \{ t \in \mathbb{R} : x+t(y-x) \in B \}$

$A_1 \cup B_1 = [0,1]$

A_1 ve B_1 acık mıdır?

$t_0 \in A_1$ icin $\exists a_0 \in A : a_0 = x+t_0(y-x).$

A ve B acık dedik ⟵ A acık $\Rightarrow a_0$ ic noktadır.

$\Rightarrow \exists r>0 : B(a_0, r) \subset A$

$\|a-a_0\| < r$

$\|a-a_0\| = \|x+t(y-x) - (x+t_0(y-x))\|$

$= \|(y-x)(t-t_0)\| = |t-t_0| \|y-x\| < r$

$\Rightarrow |t-t_0| < \dfrac{r}{\|y-x\|}$

$\Rightarrow B\left(t_0, \dfrac{r}{\|y-x\|}\right) \subset A_1$

$\Rightarrow t_0$ ic nokta.

$\Rightarrow A_1$ acık.

$t_1 \in B_1$ icin $\exists b_1 \in B : b_1 = x + t_1(y-x)$

$\exists r > 0 : \|b - b_1\| < r$

$\|x + t(y-x) - x - t_1(y-x)\| < r$

$\Rightarrow |t - t_1| < \frac{r}{\|y-x\|}$

$\Rightarrow A_1$ ve B_1 acık kümeler

$0 \in A_1 \cap [0,1] \neq \emptyset \quad \Rightarrow A_1 \cup B_1 = [0,1]$

$1 \in B_1 \cap [0,1] \neq \emptyset \quad\quad A_1 \cap B_1 = \emptyset$

$\Rightarrow [0,1]$ bağlantısız ↯

$A \subset \mathbb{R}^n$ alt kümesi ve hem acık hemde kapalı olsun.

$A \neq \emptyset \;,\; A \neq \mathbb{R}^n$

A kapalı $\Rightarrow A^c$ acık

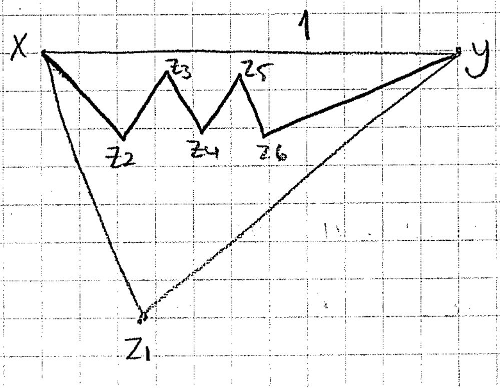
A acık

$A \cup A^c = \mathbb{R}^n$

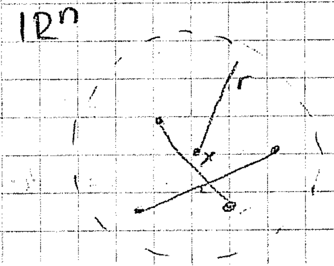
$A \cap A^c = \emptyset$

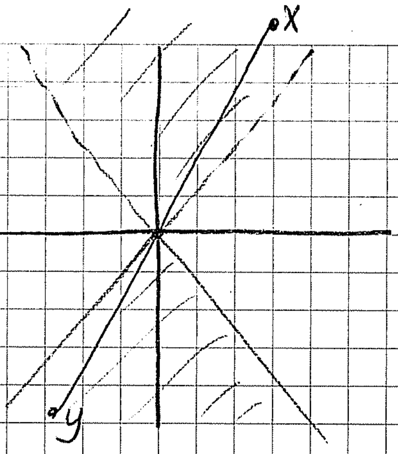
$\Rightarrow \mathbb{R}^n$ bağlantısız. ↯

Tanım: $S \subset \mathbb{R}^n$ olmak üzere $\forall x, y \in S$ noktalarını bağlayan ve S'nin icinde kalan bir tane yol varsa S'ye yol bağlantılıdır denir.

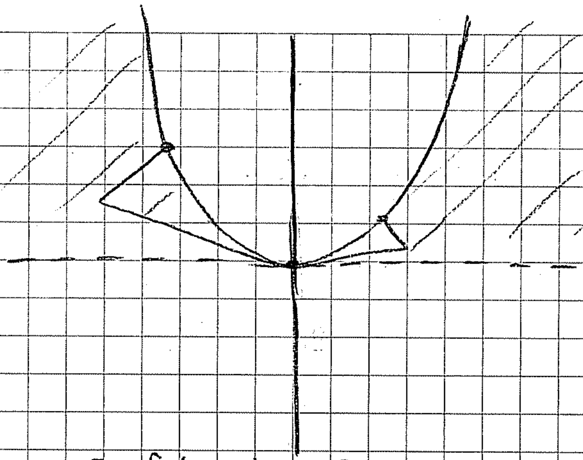


$z_i \in S$.





bağlantılı
yol bağlantılı



$S = \{(x,y) \in IR^2 : 0 < y \leq x^2\}$

bağlantılı, yol bağlantılı.

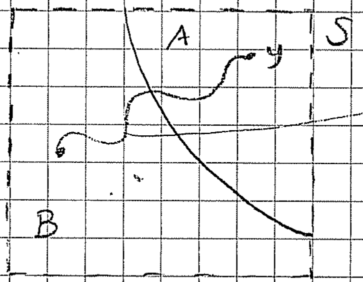
bağlantılı $\Leftarrow$ yol bağlantılı

$\Rightarrow$
(Eğer S kümesi açıksa)

Yol bağlantılılık $\Leftarrow$ Poligon bağlantılı

Bartle $\not\Rightarrow$

İspat: S yol bağlantılı ve bağlantısız olsun.



$\{r(t)\} = P$

$r: [0,1] \longrightarrow P$

$r(0) = x$

$r(1) = y.$

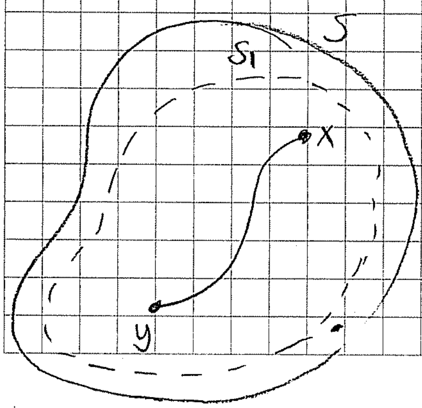
$A_1 = \{t \in IR : r(t) \in A\}$ ↯

$B_1 = \{t \in IR : r(t) \in B\}$

Teorem: $S \subset IR^n$ bağlantılı ve açık bir küme ise yol bağlantılıdır.

S yol bağlantılı olmasın. S_1 kümesi x ile bağlantılı olan tüm noktaların kümesi olsun.

$x \in S_1 \neq \emptyset$



Herhangi $y \in S_1$ alalım. $y \in S_1^\circ \Rightarrow S_1 \subset S_1^\circ$

$\Rightarrow S_1 = S_1^\circ \Rightarrow S_1$ acık.

$\exists r > 0 : \underbrace{B(y,r)}_{\text{Yol bağlantılı.}} \subset S.$

y ve x bağlı.

$z \in B(y,r)$

$z \longrightarrow y \longrightarrow x$

$\Rightarrow$ z ile x bağlı

$\Rightarrow B(y,r) \subset S_1$

$\Rightarrow$ y iç nokta S_1 için S_1 acık $\underset{\text{yol bağlantılı}}{\subset S}$

$S_1^c \subset S$ ve x ile bağlantılı olmayan elemanların kümesi

S_1^c acıktır.

$q \in S_1^c \subset S$, $\exists r > 0 : B(q,r) \subset S.$

$p \in B(q,r)$, p ile q bağlı

q ile x bağlı değil.

p ile x bağlantılı değil.

$\Rightarrow B(q,r) \subset S_1^c.$

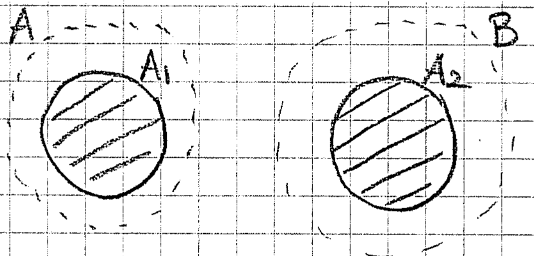
$S_1 \cap S_1^c = \emptyset$

$S_1 \cup S_1^c = S$

$\Rightarrow S$ bağlantısız ↯

UYGULAMA (24.03.2017)

$\sqrt{}$ 1) $S \subseteq \mathbb{R}^n$ bağlantısız



$S = A_1 \cup A_2$

A acık, B acık

$S \cap A = \emptyset$ $\quad (S\cap A)\cup(S\cap B) = S \Rightarrow S\cap(A\cup B) = S$

$S \cap B = \emptyset$ $\quad \Rightarrow S \subseteq (A \cap B)$

$S\cap A\cap B = \emptyset$ $\quad$ S bağlantısız değil $\Rightarrow$ S bağlantılı

$\sqrt{}$ 1) a- $U \subseteq \mathbb{R}^n$ bağlantılı ve $U \subseteq V \subseteq \overline{U}$ ise V bağlantılıdır Gösteriniz.

$\rightarrow$ V bağlantılı olmasın. (bağlantısız) Öyle A, B acık kümeleri vardır ki $V \subseteq A\cup B$, $V\cap A = \emptyset$, $V \cap B = \emptyset$, $V\cap A\cap B = \emptyset$

$U \subseteq V \subseteq A\cup B \Rightarrow \boxed{U \subseteq A\cup B}$

$U\subseteq V \Rightarrow U\cap A\cap B \subseteq \underbrace{V\cap A\cap B}_{\emptyset} \Rightarrow \boxed{U\cap A\cap B = \emptyset}$

$(U\cap A) \neq \emptyset$?

$U\cap V \neq \emptyset \Rightarrow \exists x\in A,\ x\in V$

A acık olduğundan $\exists \varepsilon > 0,\ B(x,\varepsilon) \subseteq A$

Ayrıca $x \in V \subseteq \overline{U}$ olduğundan $x \in \overline{U}$

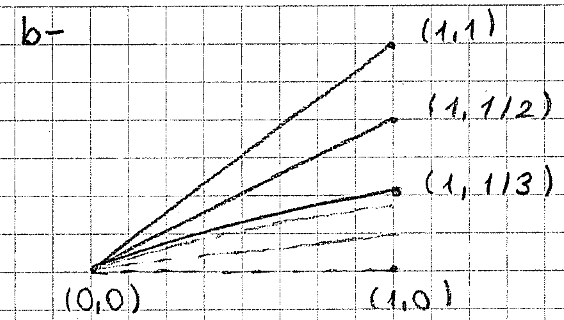
$x\in\overline{U} \Rightarrow B(x,\varepsilon)\cap U \neq \emptyset$

$\underbrace{B(x,\varepsilon)\cap U}_{\neq\emptyset} \subseteq A\cap U \Rightarrow \boxed{A\cap U \neq \emptyset}$

Benzer şekilde $\boxed{B\cap U \neq \emptyset}$

O halde U bağlantılı değildir. ↯

b-



$Y = \{ (0,0)$'dan $\left(1, \frac{1}{n}\right)$'e doğru parçaları $\} \cup \{(1,0)\}$ kümesinin bağlantılı olduğunu gösteriniz.

$U \subseteq Y \subseteq \overline{U}$

↓

bağlantılı

$U = Y \setminus \{(1,0)\}$ kümesi poligonal bağlantılıdır. ve böylece bağlantılıdır.

$U \subseteq Y$, $\overline{U} = U \cup U' = U \cup [0,1]$

$(\forall \varepsilon > 0 \quad B(x,\varepsilon) \setminus \{x\} \cap A \neq \emptyset \Rightarrow x \in A')$

$U \subseteq Y \subseteq \overline{U}$ ve U bağlantılı olduğundan (a)'dan Y bağlantılıdır.

* U bağlantılı ise $\overline{U}$ bağlantılıdır. $U \subseteq \overline{U} \subseteq \overline{U}$

! Bir küme bağlantılıysa kapanışı da bağlantılıdır.

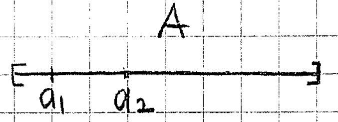
2-) Verilen kümelerin bağlantılı olup olmadığını inceleyiniz.

$A = \{ x \in [0,1] , x \in \mathbb{Q} \}$

$B = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : xy \geq 1 \text{ ve } x > 1 \} \cup \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : xy \leq 1 \text{ ve } x \leq 1 \}$

$C = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x < 1 \} \cup \{ (x,0) : 1 < x < 2 \}$

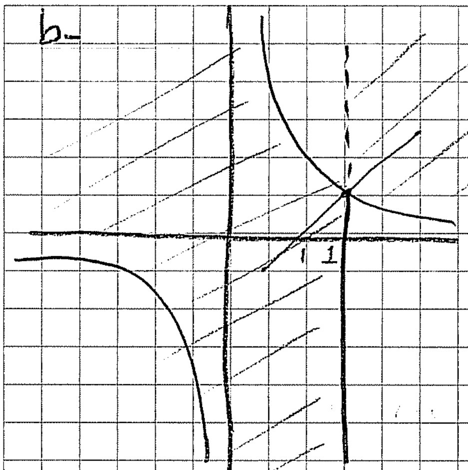
a -



→ yol bağlantılı değildir.

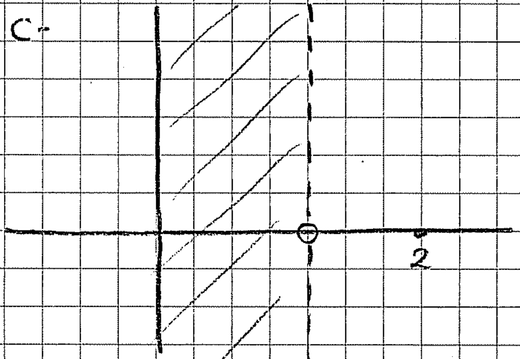
Çünkü arada irrasyoneller var.

b-



$(1,1) \in B$ olduğundan yol bağlantılıdır.

c-

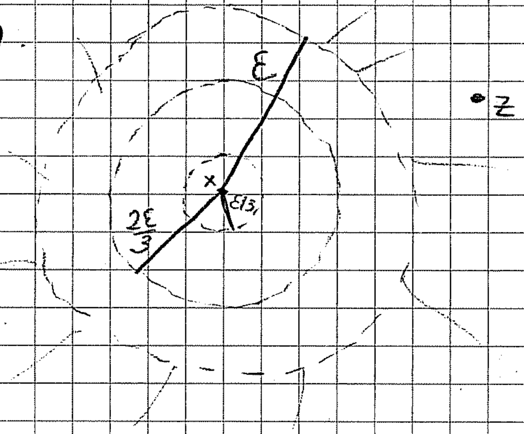


Yol bağlantılı değildir.

3) $C \subseteq \mathbb{R}^n$ bağlantılı ve $|c| > 1$ olsun. C'nin her elemanının bir yığılma noktası olduğunu gösteriniz.

($\forall x \in C \Rightarrow x \in C'$ olduğunu göstermeliyim.)

Tersine $\exists x \in C$ için $x \notin C'$ olsun.



$(\forall \varepsilon > 0, B(x,\varepsilon) \cap A \neq \emptyset \Rightarrow x \in A')$

$\exists \varepsilon > 0, B(x,\varepsilon) \setminus \{x\} \cap C \neq \emptyset$

$A = \{y \in \mathbb{R}^n : \|x-y\| > \varepsilon/3\} = B(x,\varepsilon/3)$

$B = \{y \in \mathbb{R}^n : \|x-y\| > 2\varepsilon/3\}$

$C \subseteq A \cup B$ (A ve B açıktır)

$x \in C \cap A \neq \emptyset$

$|c| > 1$ olduğu için $\exists z \neq x$, $z \in C$

$z \in C \cap B \neq \emptyset$

$C \cap A \cap B \neq \emptyset$ ⟶ Bu durum C'nin bağlantılı olması ile çelişir.

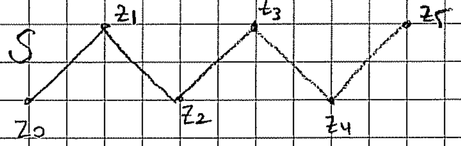
O halde $\forall x \in C \Rightarrow x \in C'$ olmalıdır.

Ayrık metrikte iç noktalar limit noktaları olmak zorunda değil

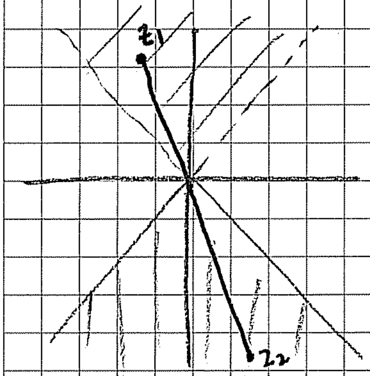
28/03/2017
Salı

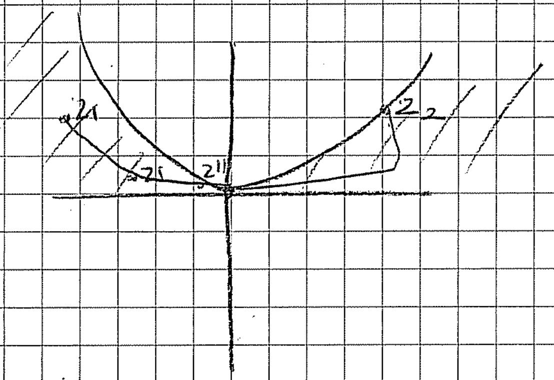
Yol bağlantılı $\Rightarrow$ bağlantılılık
$\not\Leftarrow$
açık

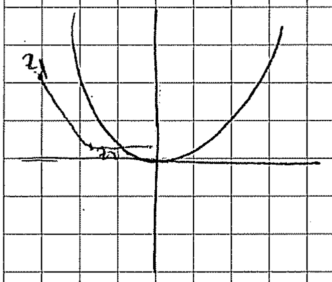
Poligon Bağlantılılık.



$z_i \in A$ S poligon eğrisi $\subset A$
$\Rightarrow$ A'ya poligon bağlantılı denir.







$\Rightarrow$ z_1'den 0'a sonlu tane doğrudan oluşan poligon eğrisi yoktur

Bağlantılılık
$\Uparrow$ $\Downarrow$ (Açık)
Yol bağlantılı
$\Uparrow$ $\not\Downarrow$ (?) Ödev!
Poligon bağlantılılık

DİZİLER:

Dizi: $f: IN \to IR^n$

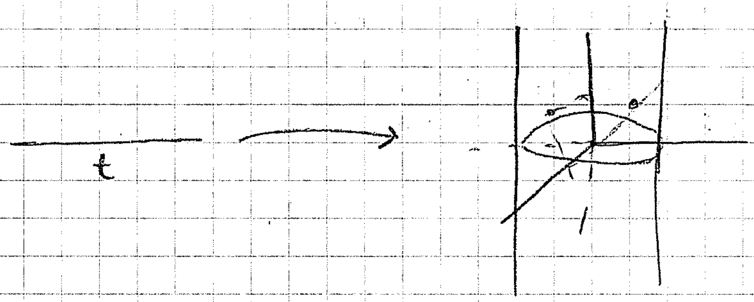
Tanım kümesi doğal sayılar olan fonksiyona dizi denir ve $(a_n) = (f(n))$ seklinde gösterilir.

$f: IN \longrightarrow IR^3$

$n \longmapsto f(n) = \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n^2}, \sin n \right)$

$f: IN \longrightarrow IR^3$

$n \longmapsto (\cos n, \sin n, n)$



$\cos^2 n + \sin^2 n = 1$

$2 = n$

$a_1 = (\cos 1, \sin 1, 1)$

$a_{100} = (\cos 100, \sin 100, 100)$

$a_\pi = \cancel{(\cos\pi, \sin\pi, \pi)}$

$= \cancel{(-1, 0, \pi)}$

$\pi \notin IN$

Tanım: (a_n) dizisinin yakınsak olması için $\Leftrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a_n = L$

$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists N \in IN : \forall n > N \Rightarrow \|a_n - L\| < \varepsilon \quad (d(a_n, L) < \varepsilon)$

Ör: $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$ olduğunu ispatlayınız.

$\varepsilon > 0$ alalım. $\exists N = [|\frac{1}{\varepsilon}|] + 1$ seçelim öyle ki $\forall n > 0$ için

$|a_n - 0| < \varepsilon \Rightarrow \frac{1}{n} < \varepsilon \Rightarrow n > \frac{1}{\varepsilon}.$

Ör: $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n},\frac{1}{n}\right)=(0,0)$

$a_n=\left(\frac{1}{n},\frac{1}{n}\right)$

$f:\mathbb{N}\longrightarrow\mathbb{R}^2$

Verilen $\varepsilon>0$ icin $\exists N=\left[\left|\frac{\sqrt{2}}{\varepsilon}\right|\right]+1$ secelim.

$\forall n>N \Rightarrow \|a_n-(0,0)\|_2<\varepsilon$

$\Rightarrow \left\|\frac{1}{n}-0,\frac{1}{n}-0\right\|_2$

$\Rightarrow \sqrt{\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^2}}=\sqrt{\frac{2}{n^2}}=\frac{\sqrt{2}}{n}<\varepsilon$

$\Rightarrow n<\frac{\sqrt{2}}{\varepsilon}$

$\infty \Rightarrow \left\|\left(\frac{1}{n},\frac{1}{n}\right)\right\|_\infty<\varepsilon$

$\max\left\{\left|\frac{1}{n}\right|,\left|\frac{1}{n}\right|\right\}<\varepsilon$

$\Rightarrow \frac{1}{n}<\varepsilon \Rightarrow n<\frac{1}{\varepsilon}$

$N=\left[\left|\frac{1}{\varepsilon}\right|\right]+1$

Teorem: (a_n) dizisinin limiti varsa tektir.

$f:\mathbb{N}\longrightarrow\mathbb{R}^k$

$n\longmapsto(a_n)$

Limit tek olmasın! $\lim_{n\to\infty}a_n=L$ ve $\lim_{n\to\infty}a_n=M$ olsun.

$\forall\varepsilon>0,\ \exists N_1\in\mathbb{N}:\ \forall n>N_1\Rightarrow\|a_n-L\|<\varepsilon$

$\forall\varepsilon>0,\ \exists N_2\in\mathbb{N}:\ \forall n>N_2\Rightarrow\|a_n-M\|<\varepsilon.$

$\varepsilon=\frac{\|L-M\|}{4}>0$ alınırsa $\exists N_1$ $\|a_n-L\|<\varepsilon$

$\exists N_2$ $\|a_n-M\|<\varepsilon.$

$N=\max\{N_1,N_2\}$ olsun.

$0 \leq \| L-M \| = \| L - a_n + a_n - M \|$

$\leq \|a_n - L\| + \|a_n - M\| < 2\varepsilon.$

$0 \leq \|L-M\| < \frac{\|L-M\|}{2}$

Teorem: $(a_n)_{n=1}^{\infty}$

$a_n = (a_n^1, a_n^2, \dots, a_n^k)$

$(a_n) \subseteq \mathbb{R}^k$ dizisinin yakınsak olması icin gerek ve yeter kosul her bilesenin yakınsak olmasıdır.

$! \left[\lim_{n\to\infty} a_n = L = (L^1, L^2, \dots, L^k) \iff \lim_{n\to\infty} a_n^i = L^i \quad \forall i, k = 1, \dots, n \right]$

İspat: $(\Longrightarrow:)$ $a_n \to L \Rightarrow$ her bilesen yakınsaktır.

$\forall \varepsilon > 0, \ \exists N \in \mathbb{N} : \forall n > N \Rightarrow \|a_n - L\|_2 < \varepsilon.$

$\|(a_n^1, a_n^2, \dots, a_n^k) - (L^1, L^2, \dots, L^k)\|_2$

$= \|(a_n^1 - L^1, \dots, a_n^k - L^k\|_2$

$= \sqrt{\sum_{i=1}^{k} |a_n^i - L^i|^2} < \varepsilon.$

$\forall i = 1, \dots, k$ icin $|a_n^i - L^i| \leq \|a_n - L\| < \varepsilon.$

$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n^i = L^i \quad \forall i = 1, \dots, k$

$(\Longleftarrow:)$ $a_n^1 \longrightarrow L^1$

$a_n^2 \longrightarrow L^2$

$\vdots$

$a_n^k \longrightarrow L^k$

Verilen $\varepsilon > 0$ icin

$\exists N_1 : \forall n > N_1 \Rightarrow |a_n^1 - L^1| < \varepsilon / \sqrt{k} \to \varepsilon$

$\exists N_k : \forall n > N_k \Rightarrow |a_n^k - L^k < \varepsilon / \sqrt{k} \to \varepsilon$

Verilen $\varepsilon > 0$ icin $\exists N = \max\{N_i\}$ öyle ki

$\forall n > N \Rightarrow \|a_n - L\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{k} |a_n^i - L^i|^2} < \sqrt{\sum_{i=1}^{k} \frac{\varepsilon^2}{k}} = \varepsilon.$

$\exists N = \max\{N_i\}$

$\|a_n - L\|_\infty = \max\{|a_n^i - L^i|\} < \varepsilon.$

$\|a_n - L\|_1 = \sum_{i=1}^{k} |a_n^i - L_i| < \sum_{i=1}^{k} \frac{\varepsilon}{k} = \varepsilon \Rightarrow \exists N = \max\{N_i\}$

<u>**Ör:**</u> $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n}, \frac{n}{n-1}, \frac{\sin n}{n} \right)$

$= (0, 1, 0)$

$$\begin{array}{ccccc} -\frac{1}{n} & \leq & \frac{\sin n}{n} & \leq & \frac{1}{n} \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & & 0 & & 0 \end{array}$$

$\lim a_n = L \Rightarrow \lim |a_n| = |L|$

$\not\Leftarrow \ (-1)^n$

$\lim a_n = 0 \Leftrightarrow \lim |a_n| = 0.$

<u>Alt Dizi:</u> $(a_{k_n})_{n=1}^{\infty}$ $(k_n) \subset n$ bir alt dizisi ise $(x_{k_n}) \subset (x_n)$ $(1, 2, 3, 4, \dots)$ dizisinin alt dizisidir.

$(a_{2n-1}) \subset (a_n)$

$(a_{7n+2}) \subset (a_n)$

Teorem: Eğer (a_n) yakınsak ise tüm alt dizileri yakınsaktır.

$\lim a_n = L \Rightarrow$ alt diziler yakınsak

$\not\Leftarrow \ (-1)^n.$

$(a_n)_{n=1}^{\infty} = (-1)^n$

$a_{2n} = 1$

$a_{2n+1} = -1$

$a_{3n} = (-1, 1, -1, 1, \dots)$

$\{a_{2n}\} \cup \{a_{2n+1}\} = \{a_n\}$

$(a_{3n}) \cup (a_{3n+1}) \cup (a_{3n+1}) = (a_n)$

$L \Rightarrow \lim a_n = L.$

29/03/2017

Lemma: Eğer (a_n) dizisi yakınsak ise her alt dizisi yakınsaktır.

$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}$ öyle ki $\forall n > N \Rightarrow \|a_n - L\| < \varepsilon$.

$(a_{k_n}) \subset (a_n)$

$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall k_n > n > N$

$\|a_{k_n} - L\| < \varepsilon$.

Tanım: (a_n) Cauchy olması için $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}$:

$\|a_m - a_n\| < \varepsilon \quad \forall n, m > N$.

Lemma: Yakınsak $\Rightarrow$ Cauchy

$\lim_{n \to \infty} a_n = L$, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N \in \mathbb{N}$ $\|a_n - L\| < \varepsilon/2$ $\forall n > \mathbb{N}$

Verilen $\varepsilon > 0$, $\exists N' = N$ seçilsin öyle ki

$$\forall n, m > \mathbb{N}' \Rightarrow \|a_n - a_m\| = \|a_n - L + L - a_m\|$$
$$\leq \|a_n - L\| + \|a_m - L\|$$
$$< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

$\Rightarrow$ Cauchy.

Sonuç: $\mathbb{R}^n$ veya $\mathbb{C}^n$ de her Cauchy dizisi yakınsaktır.

$\mathbb{R}^n$ veya $\mathbb{C}^n$'de Yakınsak $\Leftrightarrow$ Cauchy (2009 Mat. Dünyası)

Lemma: Cauchy $\Rightarrow$ Sınırlıdır.

$(a_n) \subset \mathbb{R}^n \quad \exists m, M : m \leq \|a_n\| \leq M$

Yakınsak $\Rightarrow$ sınırlıdır; $\forall \varepsilon > 0, \exists N : \|a_n - L\| < \varepsilon \ \forall n > N$

$\big|\|a_n\| - \|L\|\big| \leq \|a_n - L\| < \varepsilon$.

$\forall n > N$, $\big|\|a_n\| - \|L\|\big| \leq \|a_n - L\| < \varepsilon$

$\|L\| - \varepsilon < \|a_n\| < \|L\| + \varepsilon$.

$M = \max\{\|a_1\|, \|a_2\|, \ldots, \|a_N\|, \|L\| + \varepsilon, |\|L\| - \varepsilon|\}$

$\forall n \in \mathbb{N}$ için $0 \leq \|a_n\| < M$

$\Rightarrow$ sınırlı

$\|a_n\| = \|a_n - L + L\|$

$\leq \|a_n - L\| + \|L\|$

Cauchy ⇒ sınırlıdır ! (Ödev)

$\Rightarrow \|a_n\| - \|L\| \leq \|a_n - L\|$

$\|L\| = \|L - a_n + a_n\|$

$\leq \|L - a_n\| + \|a_n\|$

$= \|a_n - L\| + \|a_n\|$

$\Rightarrow \|L\| - \|a_n\| \leq \|a_n - L\|$

$\Rightarrow \big| \|L\| - \|a_n\| \big| \leq \|a_n - L\|$

—o—

Yakınsak $\Rightarrow$ Cauchy $\Rightarrow$ Sınırlı

$\overset{\Leftarrow}{(\mathbb{R}^n)}$ $\quad$ $\overset{\not\Leftarrow}{(-1)^n}$

en az

Teorem: (B.W) $\mathbb{R}^n$'de sınırlı dizinin bir tane yakınsak alt dizisi vardır.

İspat: ($\mathbb{R}^n$'de sınırlı, sonsuz elemanlı alt kümenin en az bir yığılma noktası vardır.)

$A = \{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ sonsuz elemanlı ve sınırlı $\Rightarrow \exists c \in A'$ vardır.

—o—

$((-1)^n)_{n=1}^{\infty} = \{-1, 1, -1, 1, \dots\}$

$a_{2n} = 1 \longrightarrow 1$

$a_{2n+1} = -1 \longrightarrow -1$

$f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$

$n \longmapsto f(n) = a_n = \{a_1, a_2, \dots\}$

$R(f) = \{-1, 1\}$

—o—

A'nın sonlu görüntüsü var ise

$\exists a_p$ için $\exists (k_n)$ $a_{k_n} = a_p$

$(a_{k_n}) = (a_p)$ sabit dizi

$\longrightarrow a_p.$

$\forall n \in \mathbb{N}$ için

$\left(B\left(c, \frac{1}{n}\right) \setminus \{c\} \right) \cap A \neq \emptyset$

$a_{k_1} \in A : \left(B(c, 1) \setminus \{c\} \cap A \neq \emptyset \right)$

$a_{k_2} \in A : \left(B\left(c, \frac{1}{2}\right) \setminus \{c\} \cap A \neq \emptyset \right)$

$\vdots$

$a_{k_n} \in \left(B\left(c, \frac{1}{n}\right) \setminus \{c\} \right) \cap A \neq \emptyset$

$a_{k_n} \in B\left(c, \frac{1}{n}\right) \wedge \underline{a_{k_n} \in A}$

$\| a_{k_n} - c \| < \frac{1}{n}$

~~$a_n = (n, \ln n) \subset \mathbb{R}^2$~~

~~$n < n+1 \Rightarrow a_n \leq a_{n+1}$~~

$a_n \geq a_{n+1}$

$\mathbb{R}^2$ de sıralama yok !

$$\boxed{\mathbb{R},\ \text{sınırlı} + \text{monoton} \Rightarrow \text{yakınsaktır.}}$$

Cauchy $\Rightarrow$ sınırlı $\overset{B.W}{\Longrightarrow}$ bir tane $a_{k_n} \to L$

$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N : \forall n, m > N$ | $\forall \varepsilon > 0\ \exists N' : k_n > N'$

$\| a_n - a_m \| < \varepsilon$ | $\| a_{k_n} - L \| < \varepsilon$.

$\Downarrow$

$\| a_n - L \| < \varepsilon$.

Verilen $\varepsilon > 0$, $\exists N = \max\{N', N''\}$ öyle ki

$$\forall n > N \quad \| a_n - L \| = \| a_n - a_{k_n} + a_{k_n} - L \|$$
$$\leq \| a_n - a_{k_n} \| + \| a_{k_n} - L \|$$
$$< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \ //$$

ÖR: (a_nb_n) dizisi yakınsak ve $1 \le b_n \le 2$ $\forall n \in \mathbb{N}$ koşulu sağlanıyor ise (a_n) dizisinin bir tane yakınsak alt dizisi vardır.

(a_nb_n) yakınsak ⇒ sınırlı

$\exists m, M$; $\forall n$ $\quad m \le a_nb_n \le M$

$$\frac{1}{2} \le \frac{1}{b_n} \le 1 \Leftarrow 1 \le b_n \le 2$$

$$\Rightarrow \frac{m}{2} \le \frac{m}{b_n} \le a_n \le \frac{M}{b_n} \le M$$

$\Rightarrow (a_n)$ sınırlı $\Rightarrow$ B.W.

"$x \in \overline{A} \iff \forall r > 0$ için $B(x,r) \cap A \neq \emptyset$"

Teorem: $A \subset \mathbb{R}^n$ alt kümesi olsun.

$$x \in \overline{A} \iff \exists (a_n) \subset A : \lim_{n\to\infty} a_n = a$$

İspat: $(\Leftarrow:)$ $\lim a_n = a \Rightarrow a \in A' \subset \overline{A} \Rightarrow a \in \overline{A}$

$\forall \varepsilon > 0, \ \exists N \ \ \|a_n - a\| < \varepsilon$

$$\left.\begin{array}{l} a_n \in B(a,\varepsilon) \setminus \{a\} \\ a_n \in A \end{array}\right\} \Rightarrow a_n \in B(a,\varepsilon)\setminus\{a\} \cap A \neq \emptyset \quad \forall n > N.$$

* Limit noktaları birer yığılma noktasıydı.

$(\Rightarrow:)$ $a \in \overline{A} \Rightarrow \forall \varepsilon > 0$ için $B(a,\varepsilon) \cap A \neq \emptyset$

$\varepsilon = \frac{1}{n}$ $\quad \forall n \in \mathbb{N}$

$$B\left(a, \frac{1}{n}\right) \cap A \neq \emptyset \quad \forall n$$

$$\{a_n\}$$

$$\|a_n - a\| < \frac{1}{n}$$

$$\Rightarrow \lim a_n = a.$$

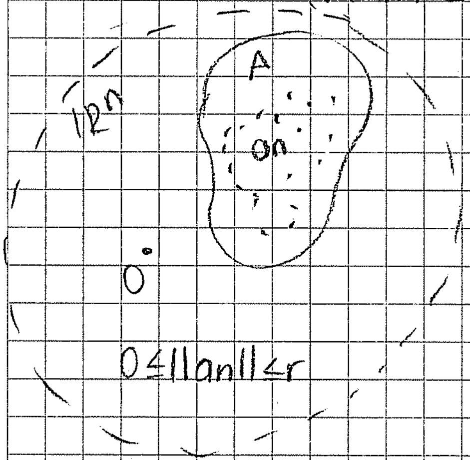
(Yığılma noktaları kapanışın elemanı)

Teorem: $A \subset \mathbb{R}^n$ kompakt $\Leftrightarrow$ her $(a_n) \subset A$ dizisinin A içinde yakınsayan bir alt dizisi vardır

$(\forall (a_n) \subset A,\ (a_{k_n}) \longrightarrow a \in A)$

İspat: $(\Rightarrow:)$ A kompakt $\Rightarrow$ sınırlı

$\forall (a_n) \subset A$ dizisi $\Rightarrow$ sınırlı



$\Rightarrow \exists (a_{k_n}) \underset{B.W}{\longrightarrow} a$

$\Rightarrow a \in \overline{A} = A$

kompakt $\Rightarrow$ kapalı

$(\Leftarrow:)$ İddia: A kapalı ve sınırlıdır

A kapalı: $(\Leftrightarrow \exists (x_n) \longrightarrow x \in A)$

$a \in \overline{A}$, $\exists (a_n) \subset A \longrightarrow a$ için

$a_{k_n} \longrightarrow b \in A$

$\Rightarrow a = b \in A$

$\Rightarrow \overline{A} \subset A$

$\Rightarrow A$ kapalı

A sınırlı: A sınırlı olmasın

$\exists (x_n) \subset A$ yazarım öyle ki $\|x_n\| \longrightarrow \infty$

(x_{k_n}) alt dizisi içinde $\|x_{k_n}\| \longrightarrow \infty$ + kabulden (x_{k_n}) yakınsak. ↯

(Hem yakınsak olup hem ∞'a patlayamaz.

UYGULAMA (31/03/2017)

① $a_1=\sqrt{2}$ $a_{n+1}=\sqrt{2\sqrt{a_n}}$ <? (a_n) dizisinin yakınsak olduğunu gösteriniz ve limitini bulunuz.

→ (a_n) üstten sınırlıdır: $\forall n,\ a_n \leq 4$

$n=1$, $a_1=\sqrt{2}\leq 4$

$n=k$, $a_k \leq 4$ olduğunu varsayalım.

$n=k+1$, $a_{k+1}=\sqrt{\sqrt{2}+\sqrt{a_k}}_{\leq 4} \leq 2 < 4$

a_n dizisi 4 ile üstten sınırlıdır.

(a_n) artandır:

$n=1$, $a=\sqrt{2}<\sqrt{2+2^{1/4}}=a_2$

$n=k$, $a_k \leq a_{k+1}$ olsun.

$n=k+1$ için $a_{k+1}\leq a_{k+2}$ (?)

$a_{k+1}=\sqrt{2+\sqrt{a_k}} \leq \sqrt{2+\sqrt{a_{k+1}}}=a_{k+2}$

$\therefore$ (a_n) artan ve üstten sınırlı olduğu için yakınsaktır.

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = L$ olsun.

$a_{n+1}=\sqrt{2+\sqrt{a_n}}$

$\lim\limits_{n\to\infty} a_{n+1}=\sqrt{2+\sqrt{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}}$

$L=\sqrt{2+\sqrt{L}} \Rightarrow L=?$

▽ Bir dizi herhangi bir noktaya yakınsıyor ise içerisinden seçtiğin her alt dizi de aynı noktaya yakınsar.

② $(x_n)=(-1)^n\left(\cos(\sin n)-\frac{2\cos n}{n}+\frac{\sin n}{n}\right)$ dizisinin yakınsak bir alt dizisi olduğunu gösteriniz.

$|x_n| \leq ?$

$\boxed{\mathbb{R}\text{'de } \|x\|=|x|}$

$$|x_n| = \left|\cos(\sin n)-\frac{2\cos n}{n}+\frac{\sin n}{n}\right|$$

$$\leq \left|\cos(\sin n)\right|+\left|\frac{2\cos n}{n}\right|+\left|\frac{\sin n}{n}\right|$$

$$\leq 1+2|\cos n|+|\sin n|$$

$$\leq 1+2+1=4$$

$\Rightarrow \forall n$ için $|x_n|<4$.

(Xn) sınırlı olduğundan B.W özelliğinden (Xn)'in yakınsak bir alt dizisi vardır.

* Mutlağı sınırlı ise kendisi de sınırlıdır.

③ $x_1 = 1$, $x_{n+1} = \frac{1}{3+x_n}$ (Xn)'in Cauchy dizisi olduğunu gösteriniz.

(Yakınsak ⇒ Cauchy)

$$|x_{n+1}-x_n| = \left|\frac{1}{3+x_n} - \frac{1}{3+x_{n-1}}\right| = \left|\frac{x_{n-1}+x_n}{(3+x_n)(3+x_{n-1})}\right| \leq \frac{x_{n-1}-x_n}{9}$$

$$|x_{n+1}-x_n| \leq \left|\frac{x_n-x_{n-1}}{9}\right| \leq \frac{|x_{n-2}-x_{n-1}|}{9^2} \leq \dots \leq \frac{|x_2-x_1|}{9^{n-1}}$$

$$|x_{n+k}-x_n| = |x_{n+k}-x_{n+k-1}+x_{n+k-1}-x_{n+k-2}+x_{n+k-2} \dots -x_n|$$

$$\leq |x_{n+k}-x_{n+k-1}| + |x_{n+k-1}-x_{n+k-2}| + \dots + |x_{n+2}-x_n|$$

$$< \frac{|x_2-x_1|}{9^{n+k-2}} + \frac{|x_2-x_1|}{9^{n+k-3}} + \dots + \frac{|x_2-x_1|}{9^{n-1}}$$

$$< \frac{|x_2-x_1|}{9^{n-1}} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{9^k} = \frac{|x_2-x_1|}{9^{n-1}} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{9}}$$

$$= \frac{|x_2-x_1|}{9^{n-2}.8} \leq \frac{|x_2-x_1|}{9^{N-2}.8} < \varepsilon.$$

$$N > \ln\left(\frac{|x_2-x_1|}{8\varepsilon} \cdot \frac{1}{\ln 9}\right) + 2.$$

④ $x_n = \frac{\sqrt{n^2+1}}{n!}$ o.ü. $x_n \longrightarrow 0$ olduğunu gösteriniz.

$(x_n \longrightarrow x) \iff \forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}\ \ n \geq N\ \ \|x_n - x\| < \varepsilon.$

$\varepsilon > 0$ aldım. $\left|\frac{\sqrt{n^2+1}}{n!} - 0\right| = \frac{\sqrt{n^2+1}}{n!} < \frac{\sqrt{n^2+n^2}}{n!}$

$$= \frac{\sqrt{2}.n}{n!} = \frac{\sqrt{2}}{(n-1)!} < \frac{\sqrt{2}}{n-1} < \frac{\sqrt{2}}{N-1} < \varepsilon.$$

Ödev: $(x_n, y_n) = \left(\frac{1}{n}, \frac{n}{n+1}\right) \longrightarrow (0,1)$ olduğunu göster.

$$\left\|\left(\frac{1}{n}, \frac{n}{n+1}\right) - (0,1)\right\| = \dots$$

∇ Limit noktalarını içeren küme kapalı kümedir.

⑤ $(x_n) \subseteq \mathbb{R}^n$, $x_n \to x$ ise $A = \{x_n, n=1,2,\dots\} \cup \{x\}$ kümesinin kapalı olduğunu gösteriniz.

→ <u>Amaç:</u> $\forall (y_n) \subseteq A$, $y_n \to y$ için $y \in A$?

$y_n \subseteq A$, $y_n \to y$ olsun.

$\exists (y_{n_k}) \subseteq (y_n)$ ve $(y_{n_k}) \subseteq (x_n)$

(y_n), (x_n)'in bir alt dizisi olmayabilir. Yani (x_n)'in terimleri artan bir sırayla seçilmemiş olabilir. (x_n)'in bir alt dizisini elde etmek için, (y_n)'de artan sırayı bozan terimleri atıp, $(y_{n_k}) \subseteq (y_n)$ dizisini elde ederiz.

$y_n \to y \Rightarrow y_{n_k} \to y$

$x_n \to x \Rightarrow y_{n_k} \to x$

Limit tek olduğu için $x=y$ ve böylece $y \in A$.

⑥ (x_n) artan, üstten sınırlı ve $x_n \to x$ olsun.

$S = \{x_n : n=1,2,\dots\}$ ise $x = \sup S$ olduğunu gösteriniz.

→ (x_n) üstten sınırlı olduğu için $\sup S \in \mathbb{R}$ vardır. $\sup S = a$ diyelim.

<u>Amaç:</u> $x = a$ yani $x_n \to a$

$\varepsilon > 0$ alalım. $a - \varepsilon$ bir üst sınır olamaz. $\exists n_0 \in \mathbb{N}$, $a - \varepsilon < x_{n_0}$.
$(\exists s \in S, a - \varepsilon < s)$

$N = n_0$ seçelim.

$$a - \varepsilon < x_{n_0} \underset{\substack{\downarrow \\ x_n \text{ artan} \\ \text{ve } n \geq n_0}}{<} x_n < a < a + \varepsilon$$

⑦ $A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 ;\ x^4+y^4=1\}$ kümesinin kompakt olduğunu gösteriniz.

→ A kapalı? A sınırlı?

Sınırlılık: $\forall (x,y)\in A \quad \|(x,y)\|\leq\sqrt{M}$, $\sqrt{x^2+y^2}\leq\sqrt{M}$

$x^2+y^2\leq M$?

A sınırlı: $(x,y)\in A \quad x^4+y^4=1$

$$x^4\leq 1 \Rightarrow x^2\leq 1$$

$$y^4\leq 1 \Rightarrow y^2\leq 1$$

$$x^2+y^2\leq 2$$

$$\|(x,y)\|\leq\sqrt{2}\ //$$

A kapalıdır: $(x_n,y_n)\subseteq A$ ve $(x_n,y_n)\longrightarrow(x,y)$ olsun. $(x,y)\in A$? $(x^4+y^4=1)$?

$$\left.\begin{matrix} x_n\rightarrow x \\ y_n\rightarrow y\end{matrix}\right\} \Rightarrow \begin{matrix} x_n^4\rightarrow x^4 \\ y_n^4\rightarrow y^4\end{matrix}$$

$$\Rightarrow \underbrace{x_n^4+y_n^4}_{\in A}\longrightarrow x^4+y^4$$

$x_n^4+y_n^4=1$ → $\forall n \ x_n^4+y_n^4=1$

$(x_n^4+y_n^4)=(1,1,\dots,1,\dots)$ olduğundan $x^4+y^4=1$ olmalıdır.

* Yakınsak dizinin her alt dizisi yakınsaktır.

* Kapanış tüm limit noktalarını içerir.

* İki dizi yakınsak ise toplamları yakınsak ama ıraksak için gecerli değil.

04/04/2017

ÖR: $A \subset \mathbb{R}$ kompakt ve $B \subseteq \mathbb{R}$ kapalı ise $A+B$ kapalıdır. Gösteriniz. $A+B$ kompakttır. Gösteriniz.

$$\rightarrow \left[\begin{array}{l} A=\overline{A} \Leftrightarrow \forall x \in A \ , \ \exists (x_n) \subset A : x_n \to x \\ A \text{ kompakt} \Leftrightarrow \forall x \in A \ , \ \exists (x_n) \subset A : x_{n_k} \to x \end{array} \right]$$

Kapalıdır: $x \in \overline{A+B} \Rightarrow x \in A+B$

$$\overline{A+B} \subset A+B$$

$$\exists (x_n) \subset A+B : x_n \longrightarrow x$$

$\forall n$ için $x_n = a_n + b_n$, $\exists a_n \in A$, $\exists b_n \in B$

$(a_n) \subset A$, $(b_n) \subset B$

A kompakt $\Rightarrow (a_n) \subset A$

$\exists a \in A : a_{n_k} \longrightarrow a$

$x_n \to x \Rightarrow x_{n_k} \longrightarrow x$

$x_{n_k} = a_{n_k} + b_{n_k}$

$b_{n_k} = x_{n_k} - a_{n_k} \in B$

$(b_{n_k}) \subset B$ ve B kapalı

$\exists b \in B : b_{n_k} \to b$.

Ayrıca $b_{n_k} = x_{n_k} - a_{n_k} \longrightarrow x - a$

Limit var ise tektir $\Rightarrow x - a = b$

$\Rightarrow x = a + b \in A+B$.

Ödev: $A \subseteq \mathbb{R}$ ve $B \subseteq \mathbb{R}$ kompakt ise;

$A \times B = \{ (a,b) : a \in A \wedge b \in B \}$

kompakttır(?)

ÖR: $\left. \begin{array}{l} B=[0,\infty) \\ A=[0,1] \end{array} \right\} A+B=[0,\infty)$

* Kapalı fakat sınırlı değil. Heine-Borel'den kompakt değil.

ÖR: A kapalı ve B kapalı $\Rightarrow A+B$ kapalı mıdır?

$\left. \begin{array}{l} A=\{ -n : n \in \mathbb{N} \} \\ B=\{ \frac{1}{n}+n : n \in \mathbb{N} \} \end{array} \right\} A+B=\{ \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N} \}$

$A+B^{0} = \emptyset$

$\partial(A+B) = (A+B) \cup \{0\}$

kapalı değil.

* Her dizinin altdizisi vardır.

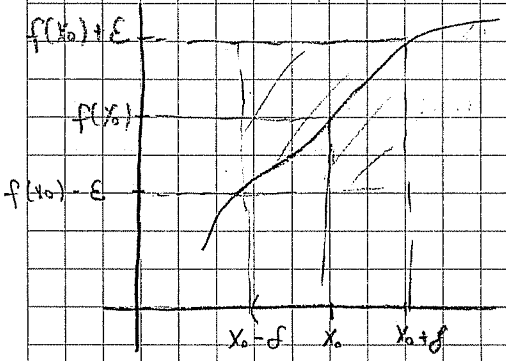
$f : \overset{= X_1}{(\mathbb{R}, |.|)} \longrightarrow (\mathbb{R}, |.|) = X_2$ süreklidir Eğer U açık $\in X_2$

altkümesinin $f^{-1}(U) \subset X_1$ açık olmasıdır.

$f^{-1}(0,1) = (a,b)$

$\forall \varepsilon > 0, \ \exists \delta > 0 : \ |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(0)| < \varepsilon$

$(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \Rightarrow (f(x_0) - \varepsilon, f(x_0) + \varepsilon)$.



$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ (çok değişkenli, reel değerli fonk.)

(x_0, y_0) süreklidir $\Leftrightarrow \lim_{(x,y) \to (x_0,y_0)} f(x,y) = f(x_0, y_0)$

$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \ \exists \delta > 0 : \ \|(x,y) - (x_0,y_0)\|_2 < \delta \Rightarrow |f(x,y) - f(x_0,y_0)| < \varepsilon$

$|x - x_0| < \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} < \delta$

$|y - y_0|$

$\Downarrow$

$\max\{|x - x_0|, |y - y_0|\} < \delta$

(tek değişkenli, vektör değerli fonk.)

$r : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3$

$t \longmapsto r(t) = (f_1(t), f_2(t), f_3(t))$

t_0 sürekli $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \ \exists \delta > 0 : \ |t - t_0| < \delta \Rightarrow \|r(t) - r(t_0)\| < \varepsilon$

$= \|f_1(t), f_2(t), f_3(t) - (f_1(t_0), f_2(t_0), f_3(t_0))\|$

$= \sqrt{|f_1(t) - f_1(t_0)|^2 + |f_2(t) - f_2(t_0)|^2 + |f_3(t) - f_3(t_0)|^2} < \varepsilon$

$i = 1, 2, 3 \quad |f_i(t) - f_i(t_0)| < \varepsilon$

$F: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ (Çok değişkenli, vektör alanı)

$(x,y,z) \longmapsto F(x,y,z) = (f_1(x,y,z), f_2(x,y,z), f_3(x,y,z))$

(x_0,y_0,z_0) süreklidir $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0:$

$$\|(x,y,z)-(x_0,y_0,z_0)\| < \delta \Rightarrow \|f(x,y,z) - F(x_0,y_0,z_0)\| < \varepsilon$$

$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

f fonksiyonu x_0 noktasında diff'bilir $\Leftrightarrow f'(x_0)$ var olmasıdır.

$$f'(x_0) \simeq \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)-f'(x_0)h}{h} \simeq 0$$

$f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$

$$\lim_{(h,k) \to (0,0)} \frac{f(x_0+h, y_0+k) - f(x_0,y_0) - f_x(x_0,y_0)h - f_y(x_0,y_0)k}{\sqrt{h^2+k^2}} = 0$$

$\Leftrightarrow$ f fonk (x_0,y_0) noktasında diff'bilirdir.

Teorem: - f, f_x ve f_y (x_0,y_0) noktasında sürekli $\Leftrightarrow$ diff'bilir

- $f_{xy} = f_{yx}$ (x_0,y_0) noktasında $\Rightarrow$ diff'bilir

($f, f_x, f_y, f_{xx}, f_{xy}, f_{yx}, f_{yy}$ sürekli)

diff'bilir $\Rightarrow$ kısmi türevleri var $\Rightarrow$ sürekli

ÖR: $z=|x|+|y|$ $(0,0)$ diff'bilir?

$$f_x(0,0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(0+h,0)-f(0,0)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{|h|}{h} \Rightarrow \text{limit yok!}$$

$f_x(0,0)$ yok $\Rightarrow$ diff'bilir değildir.

ÖR:

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

$$\underset{\underset{0}{\downarrow}}{0} \leq \left| \frac{x^3}{x^2+y^2} - 0 \right| \leq |x| \underbrace{\left| \frac{x^2}{x^2+y^2} \right|}_{\leq 1} \leq \underset{\underset{0}{\downarrow}}{|x|} \Rightarrow \lim_{(x,y) \to (0,0)} \frac{x^3}{x^2+y^2} = 0.$$

$$f_x(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{h^3}{h^2} - 0}{h} = 1$$

$$f_y(0,0) = \lim_{k\to 0} \frac{f(0,k) - f(0,0)}{k} = 0$$

$$= \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{f(h,k) - f(0,0) - f_x(0,0)h - f_y(0,0)k}{\sqrt{h^2+k^2}}$$

$$= \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{\frac{h^3}{h^2+k^2} - 0 - h}{\sqrt{h^2+k^2}}$$

$k=mh$ doğrusu boyunca

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\frac{h^3}{h^2+m^2k^2} - h}{|h|\sqrt{1+m^2}}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\left(\frac{1}{1+m^2} - 1\right)}{\sqrt{1+m^2}} \cdot \frac{h}{|h|}$$, YOK (Diff'bilir değil!)

05/04/2017

Tanım: $n, m \geq 1$, $n, m \in \mathbb{N}$

$f: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ bir fonk o.ü $\vec{p_0} \in \mathbb{R}^n$ olsun. Her $(x_n) \subset \mathbb{R}^n$ dizisi o.ü eğer $p_n \longrightarrow p_0$ iken $f(p_n) \longrightarrow f(p_0)$ yaklaşıyor ise f fonksiyonuna p_0 noktasında dizisel süreklidir denir.

$$\left[\ \forall (p_n) \subseteq \mathbb{R}^n \text{ dizisi için } \lim_{n\to\infty} p_n = p_0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} f(p_n) = f(p_0)\ \right]$$

ÖR: $f(x,y) = x^2y$ fonk için $(1,2)$ noktasında dizisel sürekli midir?

$f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$

$p_0 = (1,2) = (x_0, y_0)$

$\forall\ p_n = (x_n, y_n) \longrightarrow (1,2)$

$\Updownarrow$

$x_n \to 1$ ve $y_n \to 2$

$$\left.\begin{aligned} &\lim_{n\to\infty} x_n = 1 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} x_n^2 = \lim_{n\to\infty} x_n . x_n = 1 \\ &\lim_{n\to\infty} y_n = 2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} x_n^2 y_n = \lim_{n\to\infty} x_n^2 \lim_{n\to\infty} y_n = 2$$

→

$\lim_{n\to\infty} f(x_n, y_n) = \lim_{n\to\infty} x_n^2 y_n = 2 = f(1,2) = 2$

$\Rightarrow$ f fonk. (1,2) noktasında dizisel süreklidir.

Teorem: $f: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ bir fonk. olsun.

f p_0 noktasında süreklidir $\Leftrightarrow$ f p_0 noktasında dizisel süreklidir.

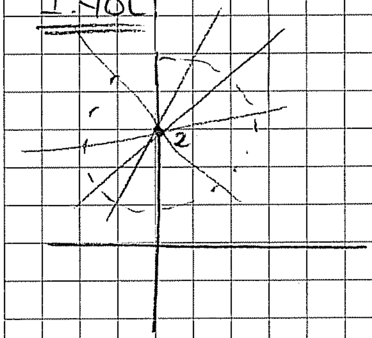
Teorem: $f: (X, \rho_1) \longrightarrow (Y, \rho_2)$ fonk. olsun.

metrik uzay

süreklidir $\Leftrightarrow$ dizisel süreklilik.

ÖR! $\lim_{(x,y)\to(0,2)} \frac{x^2}{x^2+(y-2)^2}$ olmadığını dizi kullanarak gösteriniz.

I. YOL



$y = mx + 2$

$\lim_{x\to 0} \frac{x^2}{x^2 + m^2x^2} = \frac{1}{1+m^2}$, limit yok.

II. YOL $p_n = (x_n, y_n) \longrightarrow (0,2)$ $f(p_n) \longrightarrow L$

$q_n = (x_n, y_n) \longrightarrow (0,2)$ $f(q_n) \longrightarrow M$

$L \neq M$

$p_n = (x_n, y_n) = \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n} + 2\right) \longrightarrow (0,2)$

$q_n = (x_n, y_n) = \left(\frac{1}{n}, \frac{2}{n} + 2\right) \longrightarrow (0,2)$.

$f(p_n) = \frac{x_n^2}{x_n^2 + (y_n - 2)} = \frac{\frac{1}{n^2}}{\frac{2}{n^2}} = \frac{1}{2} \longrightarrow \frac{1}{2}$

$f(q_n) = \frac{\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n^2} + \frac{4}{n^2}} = \frac{1}{5} \longrightarrow \frac{1}{5}$

$\frac{1}{2} \neq \frac{1}{5} \Rightarrow$ Limit YOK!

ÖR: $f(x,y) = \arctan(\cosh(x+y))$

$\cosh : \mathbb{R} \longrightarrow [1,\infty)$

$\arctan : \mathbb{R} \longrightarrow \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

$p_n = (x_n, y_n) \longrightarrow (0,0)$

$x_n + y_n \longrightarrow 0$

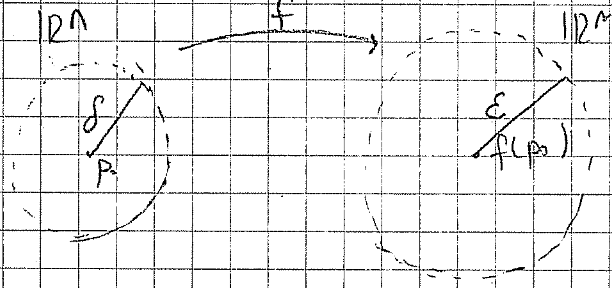
$\cosh(x_n+y_n) \longrightarrow \underset{\underset{1}{\|}}{\cosh 0}$

arctan 1 noktasında sürekli. Bu yüzden bileşke fonksiyon sürekli oldu.

sürekli ⇔ dizisel sürekli.

İspat: f fonk p_0 noktasında sürekli olsun.

$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \delta > 0 : \|p - p_0\| < \delta \Rightarrow \|f(p) - f(p_0)\| < \varepsilon.$



$p_n \longrightarrow p_0$ herhangi bir dizi olsun. Verilen $\varepsilon > 0$, $\exists \delta, \delta > 0$

$\exists N : \|p_n - p_0\| < \delta \quad \forall n \geq N$

$\overset{\text{süreklilikten}}{\Longrightarrow} \|f(p_n) - f(p_0)\| < \varepsilon \Rightarrow \lim f(p_n) = f(p_0)$

(⇐) f fonk p_0 noktasında dizisel sürekli olsun fakat sürekli olmasın! f, p_0 sürekli değil ise $\exists \varepsilon > 0$, $\forall \delta > 0$ $\exists p : \|p - p_0\| < \delta$ $\overset{(n)}{\text{ama}}$ $\|f(p) - f(p_0)\| \geq \varepsilon$. Verilen! $\varepsilon > 0$ var

$\forall \delta = \frac{1}{n} \quad \exists p_n : \|p_n - p_0\| < \frac{1}{n}$ ama $\|f(p_n) - f(p_0)\| \geq \varepsilon$.

(p_n) dizisi $\longrightarrow p_0$ yaklaşırken $\|f(np) - f(p_0)\| \geq \varepsilon$,

$\lim f(p_n) \neq f(p_0)$ ↯

Tanım: $f: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ fonk o.ü $\forall p_0 \in \mathbb{R}^n$ icin f fonk p_0 noktasında sürekli ise f fonk'a sürekli fonk adı verilir.

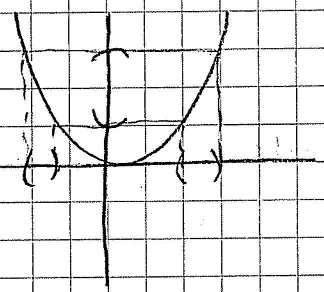
Teorem: f fonk $\mathbb{R}^n$'de sürekli olması icin gerek ve yeter sart $\forall \theta \subset \mathbb{R}^m$ acık kümesinin ters görüntüsü $f^{-1}(\theta) \subset \mathbb{R}^n$'d acıktır.

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$x \longmapsto x^2$

$f^{-1}(\theta) \Leftarrow \theta$ acık

acık küme



İspat: $(\Rightarrow:)$ f fonk: $\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ sürekli ve $\theta \subset \mathbb{R}^m$ acık küme olsun.

İddia: $f^{-1}(\theta)$ acıktır.

$x_0 \in f^{-1}(\theta)$ noktasının ic nokta olduğu gösterilmeli!

$x_0 \in f^{-1}(\theta) \Rightarrow f(x_0) \in \theta$. θ acık olduğundan $\exists \varepsilon > 0 : B(f(x_0), \varepsilon) \subset$

f fonk'u x_0 sürekli $\Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0:$

$\|x - x_0\| < \delta \Rightarrow \|f(x) - f(x_0)\| < \varepsilon$. Verilen $\varepsilon > 0$ icin $\exists \delta$ öyle ki

$x \in B(x_0, \delta) \Rightarrow f(x) \in f(B(x_0, \delta)) \subset B(f(x_0), \varepsilon) \subset \theta$

$f(B(x_0, \delta)) \subset B(f(x_0), \varepsilon) \subset \theta$

$\Rightarrow f^{-1}(f(B(x_0, \delta))) = B(x_0, \delta) \subset f^{-1}(B(f(x_0), \varepsilon))$

$\subset f^{-1}(\theta)$

$\Rightarrow x_0 \in f^{-1}(\theta)$ ic noktadır.

$\Rightarrow f^{-1}(\theta)$ acık

V bağlantılı ⇒ f altındaki görüntüsü de bağlantılıdır.

($\Leftarrow$:) $\forall O \subset \mathbb{R}^m$ açık kümesi için $f^{-1}(O) \subset \mathbb{R}^n$ açık olsun.

İddia: f fonk süreklidir. $x_0 \in \mathbb{R}^n$ noktası alınsın.

$f(x_0) \in \mathbb{R}^m$'dir ve $O = B(f(x_0), \varepsilon)$ düşünelim.

$x_0 \in f^{-1}(B(f(x_0), \varepsilon))$ kümesi açıktır. (Kabulden)

$\exists \delta : B(x_0, \delta) \subset f^{-1}(B(f(x_0), \varepsilon))$

$\left[\, A \subset B \Rightarrow f(A) \subset f(B) \,\right]$

$\Rightarrow f(B(x_0, \delta)) \subset B(f(x_0), \varepsilon)$. Verilen $\varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$:

$\|x - x_0\| < \delta \Rightarrow \|f(x) - f(x_0)\| < \varepsilon$

$\Rightarrow$ f fonk x_0 noktasında süreklidir.

ÖR) $A = \{ (x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 \mid x^2+y^2 > 1 \ \vee \ z^2+w^2 < 2 \}$

açık mıdır? kapalı mıdır?

$f : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}$ $\qquad\qquad$ $g : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}$

$(x,y,z,w) \longmapsto x^2+y^2$ $\qquad\qquad$ $(x,y,z,w) \longmapsto z^2+w^2$

sürekli fonk'lar

$A = \{ (x,y,z,w) : x^2+y^2 > 1 \} \cup \{ (x,y,z,w) : z^2+w^2 < 2 \}$

$$A = \underbrace{\underset{\text{açık}}{f^{-1}((1,\infty))}}_{\text{açık}} \cup \underbrace{\underset{\text{açık}}{g^{-1}((-\infty,2))}}_{\text{açık}} \Rightarrow A \text{ açık kümedir.}$$

* $\overline{A}$ kompakttır $\Leftrightarrow \forall (x_n) \subseteq \overline{A}, \exists (x_{n_k}) \subseteq (x_n) ; x_{n_k} \longrightarrow x$.

UYGULAMA (07.04.2017)

$\mathbb{R}^n$ Cauchy $\Leftrightarrow$ yakınsak

B-IN

$x \in \overset{\text{"}A\cup A'\text{"}}{\overline{A}} \Leftrightarrow \exists (x_n) \subseteq A ; x_n \to x$

A kapalı $\Leftrightarrow \forall (x_n) \subseteq A, x_n \to x \Rightarrow x \in A$

A kompakt $\Leftrightarrow \forall (x_n) \subseteq A, \exists (x_{n_k}) \subseteq (x_n) ; x_{n_k} \longrightarrow x$

① $(r_n) = (r_1, r_2, \dots)$, $[0,1]$ aralığındaki tüm rasyonel sayıların dizisi olsun. (r_n)'in yakınsak bir alt dizisi olduğunu gösteriniz.

$[0,1]$ kompakt ve $(r_n) \subseteq [0,1]$ olduğundan yakınsak bir alt dizisi vardır.

② $A \subseteq \mathbb{R}^n$, $\overline{A}$ kompakt ise A'ya rölatif kompakt denir."

"$\overbrace{A \text{ rölatif kompakttır}}^{\overline{A}\text{ kompakt}} \Leftrightarrow$ A'daki her dizinin yakınsak bir alt dizisi vardır." Gösteriniz.

($\Rightarrow$:) $\overline{A}$ kompakt olsun. $(x_n) \subseteq A \subseteq \overline{A}$ alalım. (x_n), $\overline{A}$'da bir dizidir. $\overline{A}$ kompakt olduğundan (x_n)'in yakınsak bir alt dizisi vardır.

($\Leftarrow$:) A'daki her dizinin yakınsak bir alt dizisi olsun.

<u>Amaç:</u> $(x_n) \subseteq \overline{A}$ o.ü; $\exists (x_{n_k}) \subseteq (x_n) ; x_{n_k} \to x$

$(x_n) \in \overline{A}$ alalım $\forall n \in \mathbb{N}$ için $\varepsilon = 1/n$ alırsak, $x_n \in \overline{A}$ old. için $B(x_n, 1/n) \cap A \neq \emptyset$

$y_n \in B\left(x_n, \frac{1}{n}\right) \cap A$ seçelim. $(y_n) \subseteq A$ bir dizidir. O halde varsayımdan $\exists (y_{n_k}) \subseteq (y_n) ; y_{n_k} \to y$

$y_{n_k} \in B(x_{n_k}, 1/n) \cap A$ seçilmişti. <u>İddia:</u> (x_{n_k}) yakınsaktır.

$x_{n_k} \longrightarrow y$ olduğunu gösterelim.

$1/n < \varepsilon/2$ seçilirse (Arşimet Prensibi)

$\|x_{n_k} - y\| \leq \| x_{n_k} - y_{n_k}\| + \|y_{n_k} - y\|$

→

$\|x_{n_k} - y_{n_k}\| < 1/n$

*Düzgün süreklide aynı delta, süreklilikte farklı delta

$\left(y_{n_k} \to y \; ; \; \forall \varepsilon > 0 \; , \; \exists N \in \mathbb{N} \; ; \; n \geq N \quad \|y_{n_k} - y\| < \frac{\varepsilon}{2} \right)$

$\delta \Rightarrow \frac{x_0^2}{\varepsilon} . 2$

D.S $\Rightarrow \varepsilon$ (sadece)

$$\|x_{n_k} - y\| \leq \|x_{n_k} - y_{n_k}\| + \|y_{n_k} - y\| < \frac{1}{n} + \frac{\varepsilon}{2} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon .$$

③ $f(x) = \frac{1}{x^2}$ fonk. $(0,\infty)$ aralığında sürekli olduğunu gösteriniz.

$x_0 \in (0,\infty)$. $\varepsilon > 0$, $|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ o.ş. $\delta = ?$

$$|f(x) - f(x_0)| = \left| \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x_0^2} \right| = \left| \frac{x_0^2 - x^2}{x^2 x_0^2} \right| = \underbrace{\left| \frac{x + x_0}{x^2 x_0^2} \right|}_{x\text{'ten kurtul}} . |x - x_0| < \ldots$$

$\delta < \frac{x_0}{2}$ seçelim. $|x - x_0| < \delta < \frac{x_0}{2} \Rightarrow \frac{x_0}{2} < x < \frac{3x_0}{2}$ x olarak

$|x + x_0| = |x| + |x_0|$

$= \frac{3x_0}{2} + x_0$

$\frac{x_0^4}{4} < x^2 x_0^2$

$\Rightarrow \frac{1}{x^2 x_0^2} < \frac{4}{x_0^4}$

$< \frac{5x_0}{2} . \frac{4}{x_0^4} . \delta = \varepsilon \Rightarrow \delta = \frac{x_0^3 . \varepsilon}{10}$

$$\delta = \min \left\{ \frac{x_0}{2} , \frac{x_0^3 \varepsilon}{10} \right\}$$

④ $\lim\limits_{(x,y) \to (0,0)} \frac{x^2 y^2}{x^2 + 2y^2}$ (varsa) bulunuz.

……. $y = 0$, $y = mx$ …. $L = 0$.

$\lim\limits_{p \to p_0} f(p) = L \iff \forall (p_n) \xrightarrow{\neq p_0} p_0 , \; \lim\limits_{n \to \infty} f(p_n) = L$.

$(p_n) = (x_n, y_n) \neq (0,0) \longrightarrow (0,0)$

Amaç: $\lim\limits_{n \to \infty} f(p_n) = \lim\limits_{n \to \infty} f(x_n, y_n) = 0$

$\lim\limits_{n \to \infty} \frac{x_n^2 y_n^2}{x_n^2 + 2y_n^2} = 0$

$x_n \to 0$, $y_n \to 0$.

$$\underset{\substack{\downarrow \\ 0}}{0} \leq \overset{\leq 1}{\boxed{\frac{x_n^2}{x_n^2 + 2y_n^2}}} y_n^2 \leq \underset{\substack{\downarrow \\ 0}}{y_n^2}$$

Sandwiç Teoremi'nden

$\lim\limits_{n \to \infty} f(x_n, y_n) = 0$.

* $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ sürekli $\Leftrightarrow$ $O \subseteq \mathbb{R}^m$ açık ise $f^{-1}(O)$ açıktır!

⑤ $F: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$F(x,y) = (x\sin y, x^2+y^2)$ fonksiyonu $(1,2)$'de sürekli olduğunu gösteriniz.

(x_n, y_n) alalım. $(x_n, y_n) \to (1,2)$ olsun.

$$F(x_n, y_n) \xrightarrow{?} F(1,2)$$

$$x_n \to 1 \quad , y_n \to 2$$

$$F(x_n, y_n) = (x_n \sin y_n , x_n^2 + y_n^2) \xrightarrow{?} (\sin 2, 5) \checkmark$$

$$\left.\begin{array}{l} x_n \to 1 \\ \sin y_n \to \sin 2 \end{array}\right\} \Rightarrow x_n \sin y_n \to \sin 2$$

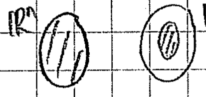
$$\left.\begin{array}{l} x_n \to 1 \\ y_n \to 2 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x_n^2 \to 1 \\ y_n^2 \to 4 \end{array}\right\} x_n^2 + y_n^2 \to 5$$

⑥ **a)** $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ süreklidir $\Leftrightarrow$ Her $F \subseteq \mathbb{R}^m$ kapalı kümesi için $f^{-1}(F) \subseteq \mathbb{R}^n$ kapalıdır.

b) $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ sürekli o.ü $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq f(x,y) \leq 1\}$ kapalı olduğunu gösteriniz.

c) $A = \{x \in \mathbb{R} : \sin x = 0.56\}$ kapalı mıdır?

a) ($\Rightarrow$:) f sürekli olsun (Yani $\forall O \subseteq \mathbb{R}^n$ için $f^{-1}(O) \subseteq \mathbb{R}^m$ açık olsun.)



$f(\mathbb{R}^n) \neq \mathbb{R}^m$

$f^{-1}(\mathbb{R}^m) = \mathbb{R}^n$

F kümesi kapalı olsun. $O = \mathbb{R}^n - F$ açıktır. Varsayımdan,

$f^{-1}(O) = f^{-1}(\mathbb{R}^m - F)$ açıktır.

$f^{-1}(\mathbb{R}^m - F) = \mathbb{R}^n - f^{-1}(F)$ açık $\Rightarrow f^{-1}(F)$ kapalıdır.

($\Leftarrow$:) $\forall F \subseteq \mathbb{R}^m$ kapalı için $f^{-1}(F) \subseteq \mathbb{R}^n$ kapalı olsun.

f sürekli? Yani $\forall O$ açık $\Rightarrow f^{-1}(O)$ açık?

$O \subseteq \mathbb{R}^m$ açık olsun. $F = \mathbb{R}^m - O$ kapalı. Varsayımdan

$f^{-1}(F) = f^{-1}(\mathbb{R}^m - O) = \mathbb{R}^n - f^{-1}(O)$ kapalıdır $\Rightarrow f^{-1}(O)$ açıktır.

b) $A = f^{-1}([0,1])$, $[0,1]$ kapalı, f sürekli old. (a)'dan A kapalıdır.

ç) $A \xrightarrow{f} \{0,56\}$

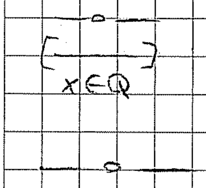
$f(x) = \sin x \qquad A = f^{-1}(\{0,56\})$

$\{0,56\}$ kapalı ve f sürekli olduğundan A kapalıdır

⑦ $f : [0,1] \to \mathbb{R}$

$f(x) = \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Q} \\ 0 & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$ her yerde süreksizdir. Gösteriniz.

(i) $x \in \mathbb{Q}$ için f süreksizdir.



$, \forall p_n, \; p_n \to x$

$f(p_n) \to f(x)$

$\exists p_n \to x$ fakat $f(p_n) \not\to f(x)$

$(p_n) = \sqrt{x}. \left(\sqrt{x} - \frac{1}{n}\right) \longrightarrow x$

$\forall n$ için $p_n \notin \mathbb{Q}$ olduğundan, $\forall n, f(p_n) = 0$.

$f(p_n) = (0) \not\longrightarrow f(x) = 1$.

(ii) $x \notin \mathbb{Q}$ için f süreksizdir.

$\exists p_n \longrightarrow x$ fakat $f(p_n) \longrightarrow f(x) = 0$

$(p_n) = \frac{[\![nx]\!]}{n}$ alalım.

$\underset{\substack{\downarrow \\ x}}{\frac{(n-1)x}{n}} \leq \frac{[\![nx]\!]}{n} \leq \underset{\substack{\downarrow \\ x}}{\frac{nx}{n}}$, S.T'den $(p_n) \to x$

$\forall n, \; p_n \in \mathbb{Q}$ olduğundan $f(p_n) = 1$

$f(p_n) = (1, 1, \ldots) \not\longrightarrow f(x) = 0$.

11/Nisan/Salı

Ör: $$f(x) = \begin{cases} x \quad , & x \in \mathbb{Q} \cap [0,1] \\ 1-x \quad , & x \in \cancel{\mathbb{Q}} \cap [0,1] \end{cases}$$

f fonk. sadece $x_0 = \frac{1}{2}$ 'de süreklidir. Gösteriniz.

f x_0'da sürekli $\Leftrightarrow$ f x_0'da $\underbrace{\text{dizisel süreklidir.}}_{\forall x_n \longrightarrow x_0 \Rightarrow f(x_n) \longrightarrow f(x_0)}$

f fonk'lu x_0 noktasında sürekli olsun.

$\forall (x_n) \subset \mathbb{Q} \longrightarrow x_0$

$x_n = f(x_n) \longrightarrow f(x_0) = x_0$

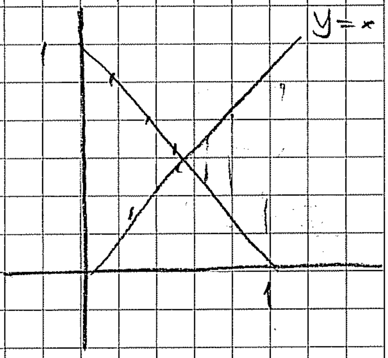
$\forall (x_n) \subset \phi \longrightarrow x_0$

$1 - x_n = f(x_n) \longrightarrow f(x_0) = 1 - x_0$

$x_0 = 1 - x_0$ olmalıdır

$2x_0 = 1$

$x_0 = \frac{1}{2}$ //



--- o ---

$f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ sürekli $\Leftrightarrow \forall U \in \mathbb{R}^m$ açık küme için $f^{-1}(U) \subset \mathbb{R}^m$ açık kümedir

$A = \{ (x,y,z,w) : x^2+y^2 > 1$ veya $z^2+w^2 < 2 \}$

$= \{ x^2+y^2 > 1 \} \cup \{ z^2+w^2 < 2 \}$

$f : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}$ $\qquad$ $g : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}$

$(x,y,z,w) \longrightarrow x^2+y^2$ $\qquad$ $(x,y,z,w) \longrightarrow z^2+w^2$

$(f^{-1}(1,\infty))$ $\qquad$ $(g^{-1}(-\infty,2))$

$\downarrow$ $\qquad$ $\downarrow$

açık $\quad \cup \quad$ açık

Açık kümelerin birleşimi açıktır!

Teorem 1: $f: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ sürekli bir fonk olsun. $A \subset \mathbb{R}^n$ alt kümesi kompakt ise $f(A) \subset \mathbb{R}^m$ kompakttır.

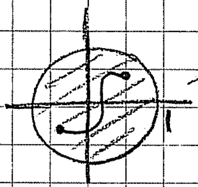
Teorem 2: $f: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ sürekli bir fonk olsun, $A \subset \mathbb{R}^n$ alt kümesi bağlantılı ise $f(A) \subset \mathbb{R}^m$ bağlantılıdır.

ÖR: $B = \{ z \in \mathbb{R} : z = x^2 \sin y \ , \ x^2 + y^2 \leq 1 \}$

kümesi kompakt mıdır? bağlantılı mıdır?

$f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$

$(x,y) \longmapsto z = x^2 \sin y$ sürekli



$\rightarrow f(A) = B \Rightarrow$ Teorem 1 ve 2 'den kompakt bağlantılı

kompakt
Heine - Borel
yol bağlantılı

yol bağlantılı $\Rightarrow$ bağlantılı
$\not\Leftarrow$
$\Leftarrow$ (acık ise)

(Teorem 1) ispat $\Rightarrow$ $f(A) \subset \mathbb{R}^m$ alt kümesi icin $(O_i)_{i \in I}$ acık örtüsünü alalım.

$A \subset f^{-1}(f(A))$, $f(A) \subset B$

$f^{-1}(f(A)) \subset f^{-1}(B)$

$f(A) \subset \bigcup_{i \in I} O_i$

$A \subset f^{-1}(f(A)) \subset f^{-1}\left(\bigcup_{i \in I} O_i\right) \subset \bigcup_{i \in I} f^{-1}(O_i)$

$\Rightarrow A \subset \bigcup_{i \in I} f^{-1}(O_i)$

O_i acık ve f sürekli $\Rightarrow f^{-1}(O_i)$ acık.

$(f^{-1}(O_i))_{i \in I}$ A' icin acık örtüdür.

A kompakt ise $\Rightarrow \exists \ i_1, \ldots, i_n : A \subset \bigcup_{k=1}^{n} f^{-1}(O_{i_k})$

$\Rightarrow f(A) \subset f\left(\bigcup_{k=1}^{n} f^{-1}(O_{i_k})\right) \subset \bigcup_{k=1}^{n} O_{i_k}$

$\Rightarrow f(A)$ kompakt.

II YOL; A kompakt $\Leftrightarrow \forall a \in A$ için $\exists (x_n) \subset A : x_{n_k} \longrightarrow a$

$(f(x_{n_k}))_{n=1}^{\infty} \subset f(A)$ $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = a$

$\Leftrightarrow$ f fonk sürekli, $\lim\limits_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = f(a)$

$\forall f(a) \in f(A)$ için $\exists (f(x_n)) \subset f(A) ; f(x_{n_k}) \longrightarrow f(a)$

$\Leftrightarrow f(A)$ kompakt.

(Teorem 2) ; İspot $\Rightarrow$

$f(A)$ bağlantılı olmasın. (bağlantısız olsun.)

$\exists$ ϑ_1 ve ϑ_2 açık kümeleri vardır öyle ki

$\vartheta_1 \cap \vartheta_2 = \emptyset$

$f(A) \cap \vartheta_1 \neq \emptyset$

$f(A) \cap \vartheta_2 \neq \emptyset$ ve $(f(A)\cap\vartheta_1) \cup (f(A)\cap\vartheta_2) = f(A)$

$f^{-1}(\vartheta_1)$ ve $f^{-1}(\vartheta_2)$ açıktır $\subset \mathbb{R}^n$, f sürekli

$f^{-1}(\vartheta_1) \subset f^{-1}(\vartheta_2) \subset f^{-1}(\vartheta_1 \cap \vartheta_2) = \emptyset$

$\Rightarrow f^{-1}(\vartheta_1) \cap f^{-1}(\vartheta_2) = \emptyset$

$A \cap f^{-1}(\vartheta_{\overset{1}{2}}) = f^{-1}(f(A) \cap \vartheta_{\overset{1}{2}}) \neq \emptyset$

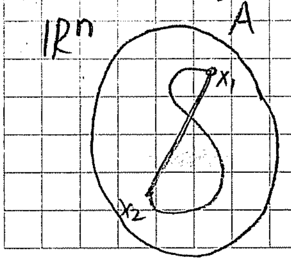
$A \cap f^{-1}(\vartheta_1) = f^{-1}(f(A \cap f^{-1}(\vartheta_1))) = f^{-1}(f(A) \cap \vartheta_1)$

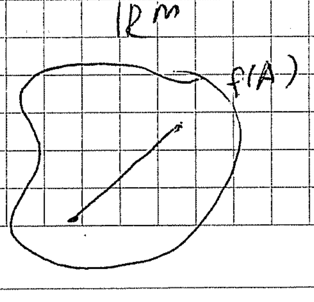
$(A \cap f^{-1}(\vartheta_1)) \cup (A \cap f^{-1}(\vartheta_2)) = A$

$\Rightarrow A$ bağlantısız, ↯

Ara Değer Teoremi; A bağlantılı $\subset \mathbb{R}$ alt kümesi ve $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sürekli bir fonk olsun. $\forall x \in (f(a), f(b))$, $(a, b \in A)$, $\exists! \, x \in (a,b) ; f(x) = c$.

Teorem; $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ sürekli bir fonk ve $A \subset \mathbb{R}^n$ alt kümesi yol bağlantılı olsun. $f(A) \subset \mathbb{R}^m$ yol bağlantılıdır.





Google summer of Code

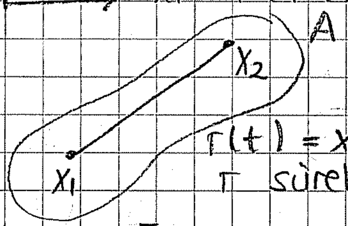
İspat: y_1 ve $y_2 \in f(A)$ o.ü $\exists x_1, x_2 \in A : f(x_1)=y_1 \quad f(x_2)=y_2$ olur.

A yol bağlantılı

$r : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^n$

$[0,1] \longmapsto \mathbb{R}^n$

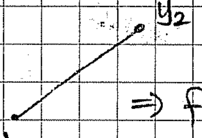
$t \longmapsto x_1 t + (1-t)x_2$



$r(t) = x_2 t + (1-t)x_1$

r sürekli

$$\begin{tikzcd} {[0,1]} \arrow[r, "r"] \arrow[dr, "for"'] & A \arrow[d, "f"] \\ & f(A) \end{tikzcd}$$



$\Rightarrow f(A)$ yol bağlantılıdır.

Ör: D kompakt $\subset \mathbb{R}^n$

$f : D \longrightarrow \mathbb{R}^m$ sürekli bir fonk. olmak üzere $y \in \mathbb{R}^m$ ve $(x_n) \subset \mathbb{R}^n$ dizisi için $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)=y$ olsun. Eğer f 1-1 ise $f(x)=y$ koşulunu sağlayan x için $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$ olur.

İspat: D kompakt $\subset \mathbb{R}^n$ ve $(x_n) \subset D$, $\exists x_{n_k} \longrightarrow x \in D$

f sürekli ise $f(x_{n_k}) \longrightarrow f(x)$

Ayrıca kabulden $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)=y \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} f(x_{n_k}) = y = f(x)$

$\exists x_{n_l} \longrightarrow x' \in D \rightarrow$ kompaktlıktan.

f sürekli ise $f(x_{n_l}) \longrightarrow f(x')$

$f(x_{n_l}) \longrightarrow y$

$f(x')$

$y = f(x) = f(x')$

f 1-1 $\Rightarrow x = x'$

ÖR: $F(x,y) = x+y^2$ olsun. $D \subset \mathbb{R}^2$ alt kümesi o.ü $0 \in F(D)$, $2 \in F(D)$ ama $1 \notin F(D)$ olsun. D bağlantısızdır. İspatlayınız.

$\rightarrow F: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$

$(x,y) \longmapsto x+y^2$

↯

↯ D bağlantılı olsun $\Rightarrow F(D) \subset \mathbb{R}$ bağlantılıdır.

$\Longleftrightarrow F(D)$ aralık. $\Rightarrow$ 1'i de içermeli. içermediğinden aralık değil ↯

$F(D) = (a,b) \supset (0,2) \setminus \{1\}$

$(a,b) \supset (0,1) \cup (1,2)$ ↯

12/04/2017

Sadece δ'ya bağlı olarak (ε'a)

← Düzgün Süreklilik:

Tanım: $f: D(f) \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ bir fonksiyon o.ü eğer

$\forall \varepsilon > 0$ için $\exists \delta = \delta(\varepsilon)$, $\forall p,q \in D$

$\|p-q\| < \delta \Rightarrow \|f(p)-f(q)\| < \varepsilon$.

(q süreklidir $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta - \delta(\varepsilon, q)$: $\|p-q\| < \varepsilon \Rightarrow$
$\Rightarrow \|f(p) - f(q)\| < \varepsilon$)

düzgün sürekli $\Rightarrow$ sürekli

$\nLeftarrow$

ÖR: $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$f(x) = x$, $\mathbb{R}$'de düzgün süreklidir. Verilen $\varepsilon > 0$, $\exists \delta = \varepsilon$ seçilsin.

$\forall x,y \in \mathbb{R}$, $|x-y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)|$

$= |x-y| < \varepsilon = \delta$

$\Rightarrow$ f fonksiyonu düzgün sürekli.

ÖR: $f(x)=\sin x$

Verilen $\varepsilon>0$, $\exists\delta=\varepsilon$ secilsin öyle ki $\forall x,y\in\mathbb{R}$

$|x-y|<\delta \Rightarrow |f(x)-f(y)|=|\sin x-\sin y|<\varepsilon$

[Teorem: $\forall x\in\mathbb{R}$ icin $|\sin x|<|x|$]

$$\left|\frac{\sin x-\sin y}{x-y}\right|=|\cos c|<1 \Rightarrow |\sin x-\sin y|<|x-y|<\delta=\varepsilon.$$

$[x,y]$ sürekli
(x,y) türevli $\Rightarrow$ ODT'den $\exists c\in(x,y)$: $\dfrac{\sin y-\sin x}{y-x}=f'(c)=\cos c$

ÖR: $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$

$$x\longmapsto f(x)=\frac{1}{1+x^2}$$

IR üzerinde düzgün süreklidir.

Verilen $\varepsilon>0$ icin $\delta=\varepsilon/2$ secilsin, $\forall x,y\in X$,

$|x-y|<\delta \Rightarrow |f(x)-f(y)|<\varepsilon$.

$$\left|\frac{1}{1+x^2}-\frac{1}{1+y^2}\right|=\left|\frac{\cancel{1}+y^2-\cancel{1}-x^2}{(1+x^2)(1+y^2)}\right|$$

$$=\frac{|x-y|\,|x+y|}{(1+x^2)(1+y^2)}$$

$$\le \underbrace{\frac{|x-y|\,|x|}{(1+x^2)(1+y^2)}}_{\le 1}+\underbrace{\frac{|x-y|\,|y|}{(1+x^2)(1+y^2)}}_{\le 1}$$

$$\le 2|x-y|<2\delta=\varepsilon$$

ÖR: $f(x)=x^2$ fonksiyonu IR'de düzgün sürekli değildir.

DS $\Leftrightarrow$ $\forall\varepsilon>0$ icin $\exists\delta=\delta(\varepsilon)$: $\forall x,y\in\mathbb{R}$, $|x-y|<\delta \Rightarrow |f(x)-f(y)|<\varepsilon$

DS' $\Leftrightarrow$ $\exists\varepsilon>0$ icin $\forall\delta=\delta(\varepsilon)$; $\exists x,y\in\mathbb{R}$, $|x-y|<\delta \Rightarrow |f(x)-f(y)|\ge\varepsilon$

$\varepsilon=1$ verilsin. $\forall\delta=\frac{1}{n}$: $\exists x=n$, $y=n+\frac{\delta}{2}$, $|x-y|<\frac{1}{n}$

$$\Rightarrow |x-y|=\left|n-n-\frac{\delta}{2}\right|=\frac{\delta}{2}<\delta$$

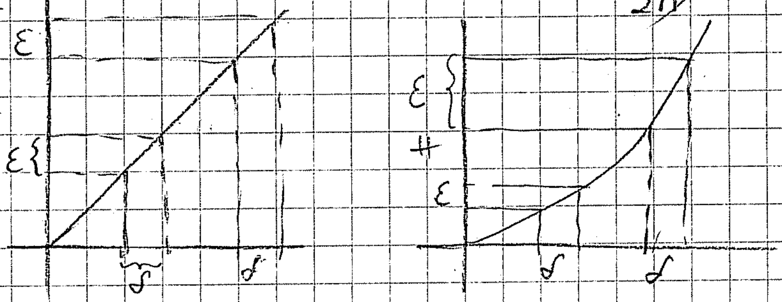
$\longrightarrow$

$$\left| f(x) - f(y) \right| = \left| n^2 - \left(n + \frac{\delta}{2} \right)^2 \right|$$

$$= \left| n - n - \frac{\delta}{2} \right| \left| n + n + \frac{\delta}{2} \right|$$

$$= \frac{\delta}{2} \left(2n + \frac{\delta}{2} \right) > \frac{\delta}{2} \cdot 2n$$

$$> \frac{1}{\cancel{2n}} \cdot \cancel{2n} = 1$$



$\ddot{O}$RN $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$
$(x,y) \longmapsto (x, \sin y, x+y)$, $\mathbb{R}$'de düzgün sürekli

$f_1(x,y) = x$

$f_2(x,y) = \sin y$

$f_3(x,y) = x+y$

$f_1 : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$
$(x,y) \longrightarrow x$

Verilen $\varepsilon > 0$, $\exists \delta = \varepsilon$ öyleki

$\forall p,q \in \mathbb{R}^2$ $\quad \|p-q\|_\infty < \delta \Rightarrow |f(p)-f(q)| < \varepsilon.$

$p = (x,y)$ $\quad \max\{|x-x'|, |y-y'|\} < \delta \qquad |x-x'| < \delta = \varepsilon$

$q = (x',y')$ $\quad |x-x'| \leq \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2} < \delta$

$f_2 : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$

$(x,y) \longmapsto \sin y.$

Verilen $\varepsilon > 0$, $\exists \delta = \varepsilon/2$ secelim öyle ki $\|p-q\|_\infty < \delta \Rightarrow |\sin y - \sin y'|$
$\leq |y-y'| < \delta = \varepsilon.$

$f_3 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$
$(x,y) \longmapsto x+y$

Verilen $\varepsilon > 0$ $\exists \delta = \varepsilon/2$ / ε $\nearrow |x-x'| + |y-y'| < \delta$

$\forall p,q \in \mathbb{R}^2$ $\|p-q\|_\infty < \delta \Rightarrow |x+y-(x'+y')| = |x-x'+(y-y')| \leq |x-x'| + |y-y'|$
$\underset{1}{}$ $\quad < 2\delta = \varepsilon$

Teorem: $f: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ bir fonk, $D \subset \mathbb{R}^n$ kompakt alt kümesi ve f, D üzerinde sürekli olsun. f fonk D üzerinde düzgün süreklidir

ÖR: $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ $\quad$ $\mathbb{R}$'de sürekli

$x \longmapsto x^2$ $\quad$ $[0,1]$ "

↳ kompakt

$\mathbb{R}$ sayıların arsimet özelliğinden tüm $\mathbb{R}$'yi taramış olursun!

$\Rightarrow [0,1]$, $f(x) = x^2$ düzgün süreklidir

İspat: f fonk D üzerinde düzgün sürekli olmasın.

$\varepsilon = 1$ alalım. $\forall n \in \mathbb{N}$, $\boxed{\delta = \frac{1}{n}}$:

$\exists p_n, q_n \in D : \|p_n - q_n\| < \frac{1}{n} \Rightarrow \|f(p_n) - f(q_n)\| \geq 1$

$(p_n) \subset D$ ayrıca D kompakt

$\exists (p_{n_k}) \longrightarrow p \in D$

$$\|q_{n_k} - p\| = \|q_{n_k} - p_{n_k} + p_{n_k} - p\|$$

$$\leq \|q_{n_k} - p_{n_k}\| + \|p_{n_k} - p\|$$

$$< \frac{1}{n_k} + \varepsilon'$$

$$\Rightarrow (q_{n_k}) \longrightarrow p$$

f sürekli olduğundan $f(p_{n_k}) \longrightarrow f(p)$

$f(q_{n_k}) \longrightarrow f(p)$

$$\Rightarrow \|f(p_{n_k}) - f(q_{n_k})\| \longrightarrow 0 \quad \lightning$$

$$p_{n_k} \longrightarrow p \iff \lim_{n \to \infty} p_{n_k} = p \iff \lim_{n \to \infty} p_{n_k} - p = 0$$

$$\iff \lim_{k \to \infty} \|p_{n_k} - p\| = 0.$$

düzgün sürekli $\Rightarrow$ sürekli $\Leftrightarrow$ dizisel sürekli

$\left\{ \begin{array}{l} \text{Düzgün yakınsaklık } n\text{'e} \\ \text{düzgün süreklilik } x\text{'e} \end{array} \right.$ bağlı

FONKSİYON DİZİLERİ:

$f : \mathbb{N} \longrightarrow X$

$n \longmapsto f(n) = a_n \qquad X = \mathbb{R}$

$= 2n \qquad X = \mathbb{Q}$

$X = C(\mathbb{R})$

$f_n : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$f_n(x) = \sin nx$

$f_1(x) = \sin x$

$f_2(x) = \sin 2x$

$\vdots$

$f_n(x) = \sin nx$

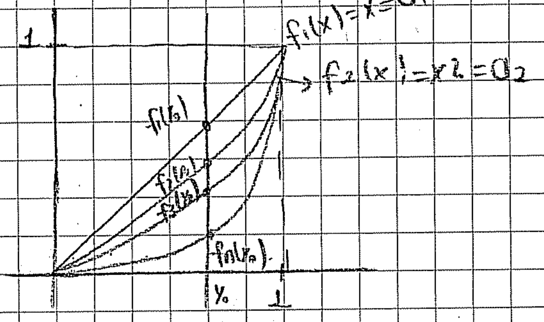
ÖR: $(f_n(x)) = (x^n)_{n=1}^{\infty} \quad , A = [0,1]$

$f : \mathbb{N} \longrightarrow C[0,1]$

$n \longmapsto a_n = f_n$ bir fonk.

$f_n : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$

$x \longmapsto x^n$



$(f_n(x_0))$ sayı dizisinin yakınsaklığı → Noktasal yakınsaklık ↑

(f_n) $[0,1]$ yakınsaması → Düzgün yakınsaklık

ÖR! $f: \mathbb{N} \longrightarrow C(\mathbb{R})$

$$f_n(x) = \left(\frac{nx}{1+n^2x^2} \right) \quad , \mathbb{R} \; , \; [-4,4]$$

$$f_5(x) = \frac{5x}{1+25x^2}$$

Tanım: (f_n) fonk dizisi olsun. Her $x \in D$ için $(f_n(x))$ sayı dizisi yakınsak ise (f_n) noktasal yakınsaktır denir.

$f_n(x) \longrightarrow a_x$, $f(x) = a_x$ fonksiyonu, (f_n) dizisinin noktasal yakınsadığı fonk.'dur. → ε ve x_0'a bağlı

$x \in D$ için;

$$\lim_{n \to \infty} f_n(x) = f(x) \iff \forall \varepsilon > 0, \; \exists N = N(\varepsilon, x) \text{ öyle ki } \forall n > N \text{ için } \| f_n(x) - f(x) \| < \varepsilon .$$

ÖR! $A = [0,1]$, $(f_n(x)) = (x^n)_{n=1}^{\infty}$

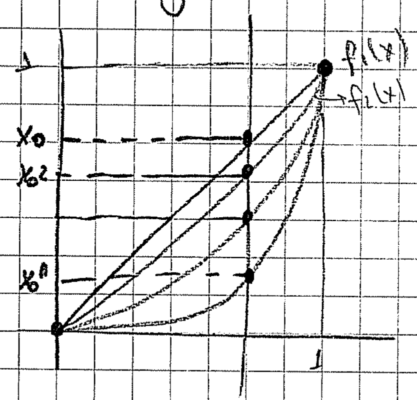
$x=0$, $(f_n(0)) = (0^n) = (0) \longrightarrow 0$

$x=1$, $(f_n(1)) = (1^n) = (1) \longrightarrow 1$

$x_0 \in (0,1)$, $(f_n(x_0)) = (x_0^n) \longrightarrow 0 = a_{x_0}$

$$f_n(x) \xrightarrow{\text{noktasal}} f(x) = \begin{cases} 0 & , \; x \in [0,1) \\ 1 & , \; x = 1 \end{cases}$$

f fonksiyonu $A = [0,1)$ üzerinde sürekli fonk DEĞİLDİR!



ÖR! $f_n(x) = \left(\frac{nx}{1+n^2x^2} \right)$, $\mathbb{R}$.

$f_n(x) \xrightarrow{\text{noktasal}} f(x)=0$, $\mathbb{R}$ üzerinde

$x_0 \in \mathbb{R}$ o.ü $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x_0) = 0$.

Verilen $\varepsilon > 0$, $\exists N = N(\varepsilon, x_0) = \left[\left| \frac{1}{\varepsilon |x_0|} \right|\right] + 1$ seçilsin.

$|f_n(x_0) - 0| < \varepsilon \quad \forall n \geq N$.

$$|f_n(x_0) - 0| = \left| \frac{nx_0}{1+n^2x_0^2} \right| < \frac{|nx_0|}{n^2x_0^2} = \frac{1}{n}\frac{1}{|x_0|} < \varepsilon$$

$$n > \frac{1}{\varepsilon |x_0|}$$

$$1+n^2x^2 > n^2x^2$$

ÖR! $f_n(x) = (xe^{-nx})_{n=1}^{\infty}$ fonk dizisinin $[0,\infty)$ aralığında $f(x)=0$ fonk'una noktasal yakınsadığını gösteriniz.

$x=0$, $f_n(0) = (0.e^{-n.0}) = (0) \longrightarrow 0$

$x_0 \in (0,\infty)$ $\quad f_n(x_0) \xrightarrow{\text{noktasal}} 0$

Verilen $\varepsilon > 0$, $\exists N = N(\varepsilon, x_0) = \left[\left| \frac{1}{x_0} \ln\left(\frac{x_0}{\varepsilon}\right) \right|\right] + 1$ seçelim.

$|f_n(x_0) - 0| = |x_0 e^{-nx_0} - 0| < \varepsilon \quad \forall n > N$

$= |x_0 e^{-nx_0}| = x_0 e^{-nx_0} < \varepsilon$.

$\Rightarrow e^{-nx_0} < \frac{\varepsilon}{x_0} \Rightarrow e^{nx_0} > \frac{x_0}{\varepsilon}$

$\underset{\ln \text{ artan}}{\Rightarrow} \ln e^{nx_0} > \ln\left(\frac{x_0}{\varepsilon}\right)$

$n x_0 > \ln\left(\frac{x_0}{\varepsilon}\right)$

$n > \frac{1}{x_0} \ln\left(\frac{x_0}{\varepsilon}\right)$

UYGULAMA (11.04.2017)

① $f:\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ sürekli $\Leftrightarrow x_n \longrightarrow x \Rightarrow f(x_n) \longrightarrow f(x)$

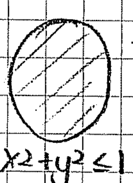
$\Leftrightarrow \forall G \subseteq \mathbb{R}^m$ açık $f^{-1}(G)$ açık

$\forall F \subseteq \mathbb{R}^m$ kapalı, $f^{-1}(F)$ kapalı

K kompakt $\Rightarrow f(K)$ kompakt

$K = \{ \sin(x^2y) + g(x,y) : x^2+y^2 \leq 1 \}$ $g:\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ sürekli olsun. K kompakt? K bağlantılı?

$h(x,y) = \sin(x^2y) + g(x,y)$ → sürekli iki fonk top.
h sürekli.



$K = \{ h(x,y) \ldots \}$

$A = \{ (x,y) : x^2+y^2 \leq 1 \}$

$K = h(A)$

A kompakt (A kapalı ve sınırlı), h süreklidir.

O halde $K = h(A)$ kompakttır.

A bağlantılı, h sürekli $\Rightarrow K = h(A)$ bağlantılıdır.

(yol bağ. $\Rightarrow$ bağlantılı)

② $[0,1]$'den $(0,1)$'e sürekli örten bir dönüşüm olmadığını gösteriniz

$f:[0,1] \longrightarrow (0,1)$ sürekli fonk olsaydı $[0,1]$ kompakt sürekli $\underset{\text{kompakt}}{(x,y)} \longrightarrow \underset{\text{kompakt değil}}{f(x,y)}$

olduğundan, $f([0,1]) = (0,1)$ kompakt olmalıydı ↯

③ $f:[a,b] \longrightarrow [a,b]$ sürekli olsun. f'nin bir sabit nokta olduğunu gösteriniz.

($f(c)=c$ o.s. $c \in [a,b]$ old. göst.)

$f(c)=c$ $c \in [a,b]$?

$\underbrace{f(c)-c}_{g(c)} = 0$ $c \in [a,b]$?

$g(x) = f(x) - x$ olarak tanımlayalım.

? $g(c)=0$, $c \in [a,b]$ vardır.

g süreklidir.

(i) $f(a)=a \Rightarrow g(a)=0$

(ii) $f(b)=b \Rightarrow g(b)=0$

(iii) $f(a) \neq a$, $f(b) \neq b$ olduğunu kabul edelim.

$a < f(a) \leq b$

$a \leq f(b) < b$

$g(a) = f(a) - a > 0$

$g(b) = f(b) - b < 0$

Ara değer teoreminden $\exists c \in [a,b] : g(c) = 0$

④ $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ sürekli olsun. $\Gamma = \{ \underbrace{(x, f(x))}_{\text{Fonksiyon}} : \underbrace{x \in \mathbb{R}^n}_{\text{Tanım kümesi}} \}$ kapalı ve bağlantılı olduğunu gösteriniz.

$g(x) = (x, f(x))$ $\quad g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$

$x \mapsto (x, f(x))$

$\Gamma = g(\mathbb{R}^n)$

g sürekli?

g sürekli (her bileşeni sürekli olduğu için)

$\mathbb{R}^n$ bağlantılı olduğundan, Γ bağlantılıdır.

$\Gamma = \overline{\Gamma}^{\checkmark} \; (\Gamma \subseteq \overline{\Gamma})^{2} \checkmark$

$(x,y) \in \overline{\Gamma} \Leftrightarrow \exists (x_n, \overset{f(x_n)}{\overset{\parallel}{y_n}}) \longrightarrow (x,y)$

$((x,y) \in \Gamma \;\; f(x) = y ?)$

$x_n \longrightarrow x$

$f(x_n) \longrightarrow y$

$\Big\}$ $x_n \longrightarrow x$ ve f sürekli olduğundan $f(x_n) \longrightarrow f(x)$

Limitin tekliğinden $y = f(x)$. Böylece $(x,y) \in \Gamma$

! $\mathbb{R}$'nin tüm bağlantılı kümeleri birer aralıktır.

⑤ $A \subseteq \mathbb{R}$ bağlantılı, $f : A \to \mathbb{R}$ sürekli ve her $x \in A$ için $f(x) \neq 0$ olsun. Her $x \in A$ için $f(x) > 0$ ya da, $f(x) < 0$ olduğunu gösteriniz

A bağlantılı, f sürekli $\Rightarrow f(A) \subseteq \mathbb{R}$ bağlantılı

$\Rightarrow f(A)$ bir aralıktır

$f(A)$ bir aralık ve $0 \notin f(A) \Rightarrow f(x) > 0 \ (\forall x \in A)$

ya da

$f(x) < 0 \ (\forall x \in A)$

$\forall \varepsilon > 0, \ \exists \delta > 0, \ |x-y| < \delta, \ |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$

⑥ a) $f : (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$ türevlenebilir ve $|f'(x)| \leq M$ olsun. f'nin (a,b)'de düzgün sürekli olduğunu gösteriniz.

b) $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$ düzgün sürekli olduğunu gösteriniz.

c) (a)'daki ifadenin tersinin doğru olmadığını gösteriniz.

a) $\varepsilon > 0$ alalım. $(\exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0, \ |x-y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$.

Ortalama değer teoreminden, $\frac{|f(x) - f(y)|}{|x-y|} = |f'(c)|$ o.ş $\exists c \in (x,y)$ vardır.

$|f(x) - f(y)| = |f'(c)| . |x-y| < M . |x-y| < M . \delta = \varepsilon$

$\delta = \varepsilon / M$

$\delta = \varepsilon/M$ seçilirse, $|x-y| < \delta, \ |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$

b) $f'(x) = \frac{(x^2+1) - 2x}{(x^2+1)^2}$

$$|f'(x)| = \left| \frac{2x}{(x^2+1)^2} \right| = |2| \left| \overset{\leq 1}{\frac{x}{(x^2+1)^2}} \right| \leq 2$$

$|x| > 1 \Rightarrow x < x^2 < x^2+1 < (x^2+1)^2$

$|x| < 1 \Rightarrow x < 1 < x^2+1 < (x^2+1)^2$

(a)'dan f düzgün süreklidir.

* Toplamlar , çıkarmalar düzgün sürekli çarpmalar düzgün süreksiz !!

c) $f(x) = \sqrt{x}$ alalım. $[0,\infty)$ aralığında düzgün süreklidir.

$|f'(x)| = \left| \frac{1}{2\sqrt{x}} \right|$ $(0,1)$ aralığında sınırlı değildir.

⑥ $f(x)=x^3$ 'ün $[0,\infty)$'da düzgün sürekli olmadığını gösteriniz.

$\exists \varepsilon > 0$, $\exists x,y \in [0,\infty)$, $\forall \delta > 0$, $|x-y| < \delta$ fakat

$|f(x)-f(y)| \geq \varepsilon$ ($\delta > 0$ alalım $\frac{1}{2n} < \delta$, $n \in \mathbb{N}$ vardır)

$\varepsilon = 1$ alalım $x_n = n$ $y_n = n + \frac{1}{2n}$

$|x_n - y_n| = \frac{1}{2n} < \delta$

$|f(x_n) - f(y_n)| = \boxed{\frac{3n}{2}} + \frac{3}{4n} + \frac{1}{8n^3} > 1 = \varepsilon$

18 Nisan 2017

ÖR: $f_n(\vec{x}) = \left(\sin\frac{x}{n}, \frac{y}{n} \right)$

$$f_n : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

$$(x,y) \longmapsto \left(\sin\frac{x}{n}, \frac{y}{n} \right)$$

$f_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} (0,0) \rightarrow$ noktasal yakınsar

$\frac{sayı}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

$\forall \varepsilon > 0$, $\exists N$: $\forall n > N = \left[\!\left[\frac{sayı}{\varepsilon} \right]\!\right] + 1$

$\left| \frac{sayı}{n} - 0 \right| < \varepsilon \Rightarrow \frac{|sayı|}{n} < \varepsilon \Rightarrow n > \frac{|sayı|}{\varepsilon}$

$\frac{y}{n} \rightarrow 0$ $\forall y \in \mathbb{R}$

$\frac{x}{n} \rightarrow 0$ $\forall x \in \mathbb{R}$.

sin sürekli $\Leftrightarrow$ dizisel sürekli

$\Leftarrow \sin\left(\frac{x}{n}\right) \longrightarrow \sin 0 = 0$

$f_n(x) = \left(\sin\frac{x}{n}, \frac{y}{n} \right) \xrightarrow[n\to\infty]{noktasal} (0,0)$

ÖR: $f_n(x) = \left(n \sin\left(\frac{x^n}{n}\right) \right)_{n=1}^{\infty}$ $[0,1]$

$x=0$ için $f_n(0) = (0) \longrightarrow 0$

$x=1$ için $f_n(1) = \left(n \sin \frac{1}{n} \right) \xrightarrow[n\to\infty]{\text{noktasal}} 1 = f(1)$

$$\lim_{n\to\infty} n \sin \frac{1}{n} \quad (\infty . 0)$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\sin \frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} = \lim_{u\to\infty} \frac{\sin u}{u} = 1$$

—o—

$x \in (0,1)$, $\left(x = \frac{1}{2}\right)$

$f_n(x) = \left(n \sin\left(\frac{x^n}{n}\right) \right) \xrightarrow[n\to\infty]{\text{noktasal}} 0.$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sin\left(\frac{1}{2^n n}\right)}{\frac{1}{n}} = \lim_{x\to\infty} \frac{\sin\left(\frac{1}{2^x x}\right)}{\frac{1}{x}}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{\cos\left(\frac{1}{x2^x}\right) \cdot \left(- \frac{2^x + x2^x + 2^x \ln 2}{(x2^x)^2} \right)}{-\frac{1}{x^2}}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \cos\left(\frac{1}{x2^x}\right)\left(\frac{1 + x\ln 2}{2^x}\right)$$

$$= 1 \cdot 0 = 0.$$

—o—

$\forall \varepsilon > 0$, $\exists N = N(\varepsilon, x)$, $\forall n > N$ $|f(x) - 0| < \varepsilon$.

$$\left| n \sin\left(\frac{x^n}{n}\right) \right| \leq \cancel{n} \left| \frac{x^n}{\cancel{n}} \right|$$

$$\leq |x^n| < \varepsilon.$$

$$\Rightarrow \ln |x|^n < \ln \varepsilon$$

$$\Rightarrow n . \ln|x| < \ln \varepsilon$$

$$\Rightarrow n > \frac{-\ln \varepsilon}{-\ln|x|}$$

—o—

$x \in (0,1)$ için

$\lim_{n\to\infty} x^n = 0$ olduğunu ispatlayınız.

$\longrightarrow$

Seytan Merdiveni

$\forall \varepsilon > 0 , \exists N \quad : \quad \forall n > N$

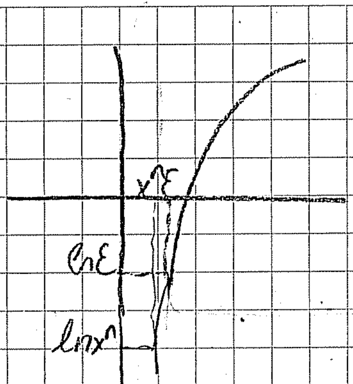
$|x^n - 0| < \varepsilon$

$|x^n| < \varepsilon .$

$\ln |x|^n < \ln \varepsilon$

$\Rightarrow (-\ln|x|^n) > (-\ln \varepsilon)$

$n > \dfrac{(-\ln \varepsilon)}{(-\ln|x|)}$



$$f(x) = \begin{cases} 0 & , x \in [0,1) \\ 1 & , x = 1 \end{cases}$$

$\downarrow$

noktasal yakınsadığı fonksiyon

$$\text{ÖR: } f_n(x) = \Big(\overbrace{\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n}^{f_n^1(x)} , \overbrace{n\left(\sqrt{x} - 1\right)}^{f_n^2(x)} \Big)_{n=1}^{\infty}$$

$f_n : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}^2$

$f_n^1(x) = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \longrightarrow e^x$

$\left[\quad x = 1 \text{ için } \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \longrightarrow e \right]$

$= \lim\limits_{n \to \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \quad (1^\infty)$

$= \lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{\ln\left(1 + \frac{x}{n}\right)}{1/n} \quad \left(\frac{0}{0}\right)$

$= \lim\limits_{y \to \infty} \dfrac{\ln\left(1 + \frac{x}{y}\right)}{\frac{1}{y}}$

$= \lim\limits_{y \to \infty} \dfrac{x}{1 + \frac{x}{y}} = x$

$= \lim\limits_{n \to \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = e^x$

$$e^x \geq 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!}$$

$\forall \varepsilon > 0 \,,\ \exists N = N(\varepsilon, x) \qquad \forall n > N$

$$\Rightarrow \left| f_n^1(x) - e^x \right| < \varepsilon .$$

$e^x \geqslant 1 + x$

$f(x) = e^x - 1 - x \geq 0 \qquad \forall x \in \mathbb{R}_+$

$f'(x) = e^x - 1 = 0 \quad \Rightarrow x = 0$

x		0	
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘		↗

$f(0) = 0$.

$$\left| f_n^1(x) - e^x \right| \leq \left| f_n^1(x) - 1 - x - \dots - \frac{x^n}{n!} \right|$$

$$\leq \left| \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n - 1 - x \dots - \frac{x^n}{n!} \right|$$

$$\leq \left| \cancel{\binom{n}{0} 1^n \left(\frac{x}{n}\right)^0} + \cancel{\binom{n}{1} 1^{n-1} \frac{x}{n}} + \binom{n}{2} 1^{n-2} \frac{x^2}{n^2} + \dots + \binom{n}{n} 1^0 \frac{x^n}{n^n} \right) \right|$$

$$\cancel{-1} \cancel{-x} - \dots - \frac{x^n}{n!}$$

$$= \left| \left(\frac{n(n-1)}{2} \frac{x^2}{n^2} - \frac{x^2}{2} \right) + \dots + \left(\frac{x^n}{n^n} - \frac{x^n}{n!} \right) \right.$$

$$< \left| \frac{x^2}{2} \left(\frac{n-1}{n} - 1 \right) \right| + \dots + \left| x^n \left(\frac{1}{1^n} - \frac{1}{n!} \right) \right|$$

$$\leq \frac{|x|^2}{2} \frac{1}{n} + \dots + \frac{|x^n|}{n!} \cdot \left| \frac{n!}{n^n} - 1 \right| < \frac{\varepsilon}{n} + \dots + \frac{\varepsilon}{n} = \varepsilon .$$

$$\left| \frac{n!}{n^n} - 1 \right| = \left| \frac{n(n-1) \dots 1}{n \; n \; n} \right| < 1$$

$$\frac{|x^n|}{n!} \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$$

$x = e$

$f_n(e) = n(\sqrt[n]{e} - 1) \longrightarrow 1 = \ln e$

$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(\sqrt[n]{e} - 1)}{\frac{1}{n}} \quad \left(\frac{0}{0}\right)$

$= \lim\limits_{y\to\infty} \frac{e^{\frac{1}{y}} - 1}{\frac{1}{y}} = \lim\limits_{y\to\infty} \frac{e^{\frac{1}{y}} \cdot \left(\frac{1}{y}\right)^1}{\left(\frac{1}{y}\right)^1} = 1$

$x \in \mathbb{R}^+ \quad f_n(x) = n(\sqrt[n]{x} - 1) \xrightarrow[n\to\infty]{\text{noktasal}} \ln x$

$f_n(x) = n\sqrt[n]{x} - n$

$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists N = N(\varepsilon, x) : \quad \forall n > N$

$|n(\sqrt[n]{x} - 1) - \ln x| < \varepsilon$

Cuma → metrik
Cu[illegible] → [illegible]
pazar → d.cebir

$g(x) = \ln x$

$g'(x) = \frac{1}{x} \qquad \ln x = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{g^{(n)}(1)}{n!}(x-1)^n$

$g''(x) = -\frac{1}{x^2}$

$g'''(x) = \frac{2}{x3}$

$\ln x = (x-1) - \frac{1}{2!}(x-1)^2 + \frac{2}{3!}(x-1)^3 - \frac{3.2}{4!}(x-1)^4$

$= \frac{1}{1}(x-1) - \frac{1}{2}(x-1)^2 + \frac{1}{3}(x-1)^3 - \frac{1}{4}(x-1)^4 + \ldots$

$= \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}(x-1)^n$

$x > 1 \quad \ln x \geq (x-1) - \frac{1}{2}(x-1)^2$

$|n(\sqrt[n]{x} - 1) - \ln x| \leq |n(\sqrt[n]{x} - 1) - (x-1) + \frac{1}{2}(x-1)^2|$

$f(x) \qquad x = x_0$

$f(x) \cong f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$

$\ln x \cong (x-1)$

$\sqrt[n]{x} \cong 1 + \frac{1}{n} x^{\frac{1}{n} - 1}\Big|_{x=1} (x-1) = 1 + \frac{1}{n}(x-1)$

$\Rightarrow n(\sqrt[n]{x}-1) \cong n.\frac{1}{n}(x-1) \cong (x-1)$

$|f_n{}^2(x) - \ln(x)| \cong |(x-1)-(x-1)| < \varepsilon.$

$f(x) = (e^x, \ln x)$

— o —

Lipschitz $\exists L$ $\forall x,y \in D(f)$ sağlıyorsa düzgün sürekli

$|f(x)-f(y)| \leq L|x-y|$

$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta = \delta(\varepsilon) = \varepsilon / L$ $\forall x,y \in D(f)$

$|x-y| < \delta \Rightarrow |f(x)-f(y)| < \varepsilon.$

$|f(x)-f(y)| \leq L|x-y| < L\delta = \varepsilon.$

— o —

$f(x) = \sin x$ IR'de Lipschitz koşulunu sağlar.

$\exists L \geq 0.\ |f(x)-f(y)| \leq L|x-y|$

$$|\sin x - \sin y| = \left| 2\sin\left(\frac{x-y}{2}\right) . \cos\left(\frac{x-y}{2}\right)\right|$$

$$\leq \left| 2\sin\left(\frac{x-y}{2}\right)\right|$$

$$\leq 2.\left|\frac{x-y}{2}\right| = |x-y|$$

$L = 1.$

Acık ⟶ Açığa gider.

Ters görün

1) K kapalı $K = K$ $x \in K, x \in K$?
$\exists x_n \in K$ $x_n \to x$

2) Heine-Borel.

3) Ön görüntü ← küme kapalı mı acık mı?

4) K bağlantılı ise f(K) bağlantılı

19/04/2017

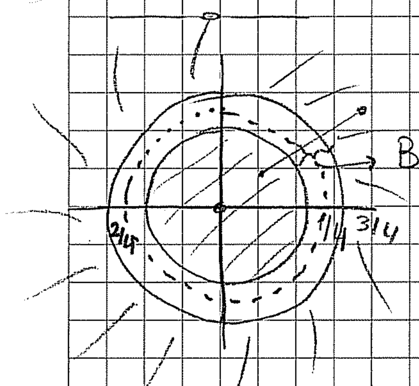
UYGULAMA

① $x=(x_1,x_2)=(0,0) \in \mathbb{R}^2$ o.ü. $K=\{y\in\mathbb{R}^2 : \|x-y\| \leq 1/4\} \cup \{y\in\mathbb{R}^2 : \|x-y\| \geq 3/4\}$ bağlantılı mıdır? Kompakt mıdır?

<u>Hatırlatma:</u>

$A\neq\emptyset$, $B\neq\emptyset$, A,B acık
$A\cap B\cap K=\emptyset$ $A\cap K\neq\emptyset$
$B\cap K\neq\emptyset$ } bağlantılı değildir.

$K\subseteq A\cup B$ $((K\cap A)\cup(K\cap B)=K)$



→ Birleştiremediğim icin yol bağlantılı değil.

Yol bağlantılı ⇒ bağlantılıdır.
⇍

$A=\left\{y\in\mathbb{R}^2 : \|x-y\| < \frac{2}{4}\right\}$

$B=\left\{y\in\mathbb{R}^2 : \|x-y\| > \frac{2}{4}\right\}$

A,B acık $K\subseteq A\cup B$

$(0,0)\in A\cap K\neq\emptyset$ $A\cap B=\emptyset$ olduğu icin

$(0,\frac{3}{4})\in B\cap K\neq\emptyset$ $A\cap B\cap K=\emptyset$

bağlantılı değil.

bağlantılı ve acık ⇒ yol bağlantılı

~yol bağlantılı ⇒ ~bağlantılı V ~acık.

② $f(x)=\frac{\sin x}{x}$ fonk. $(0,1]$ aralığında düzgün sürekli olduğunu gösteriniz.

[sürekli ve kompakt aralık ⇒ düzgün sürekli]

$$g(x)=\begin{cases}\frac{\sin x}{x} & x\in(0,1] \\ 1 & x=0\end{cases}$$

$g(x)$, $[0,1]$'de sürekli.

g(x), [0,1] 'de sürekli ⇒ [0,1] kompakt olduğundan, g, [0,1] 'de düzgün süreklidir.

$g|_{[0,1]} = f$ olduğundan f, (0,1] de düzgün süreklidir.

③ $f(x) = \ln(\sqrt{x^2+3})$ düzgün sürekli olduğunu gösteriniz.

$\forall \varepsilon > 0$ için $\exists \delta = \delta(\varepsilon)$ . . . öyle ki $\forall p,q \in K$, $\|p-q\| < \delta \Rightarrow |f(p) - f(q)| < \varepsilon$.

$f : (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$ türevlenebilir. Eğer $|f'(x)| \le M$ $(\forall x)$ $\Rightarrow$ f düzgün süreklidir.

$$f(x) = \ln(x^2+3)^{1/2} = \frac{1}{2}\ln(x^2+3)$$

$$|f'(x)| = \frac{1}{2}\cdot\left|\frac{2x}{x^2+3}\right| = \left|\frac{x}{x^2+3}\right|$$

$$|x| > 1 \Rightarrow \left|\frac{x}{x^2+3}\right| \le \left|\frac{x}{x^2}\right| = \left|\frac{1}{x}\right| < 1$$

$$|x| \le 1 \Rightarrow \left|\frac{x}{x^2+3}\right| \le |x| \le 1$$

$\forall x$ için $|f'(x)| \le 1$ olduğundan f düzgün süreklidir.

④ f fonk. $[0,a]$ ve $[a,\infty)$ aralıklarında düzgün sürekli ise $[0,\infty)$ aralığında düzgün sürekli olduğunu gösteriniz.

$\varepsilon > 0$ alalım $x,y \in [0,\infty)$

(i) $x,y \in [0,a]$, $\exists \delta_1 > 0$ $|x-y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon/2$

(ii) $x,y \in [a,\infty)$, $\exists \delta_2 > 0$ $|x-y| < \delta_2 \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon/2$

(iii) $x \in [0,a]$, $y \in [a,\infty)$, $x \neq a$, $y \neq a$.

$\delta = ?$ $|x-y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon/2$

$\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$, $|x-y| < \delta \Rightarrow$

$x, a \in [0,a]$, $|x-a| < |x-y| < \delta < \delta_1 \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon/2$

$y, a \in [a,\infty)$, $|a-y| < |x-y| < \delta < \delta_2 \Rightarrow |f(a) - f(y)| < \varepsilon/2$

$|f(x) - f(y)| \le |f(x) - f(a) + f(a) - f(y)| < \varepsilon.$

⑤ $f(x)=\sqrt{x}$ $[0,\infty)$ düzgün sürekli olduğunu gösteriniz.

$|f'(x)| = \left|\frac{1}{2\sqrt{x}}\right| \underset{x\in[1,\infty)}{\leq} \frac{1}{2}$ old. f fonk. $[1,\infty)$ aralığında düzgün süreklidir.

f fonk $[0,1]$ kompakt aralığında sürekli olduğundan düzgün süreklidir (4)'ten f, $[0,\infty)$'da düzgün süreklidir.

⑥ $f: A \longrightarrow \mathbb{R}$ o.ü, $\forall x,y \in A$ için $|f(x)-f(y)|<K|x-y|$ o.s. $K>0$ sayısı varsa f fonk'u Lipschitz süreklidir denir. "f Lipschitz sürekli ise f düzgün süreklidir. Gösteriniz" "f düzgün sürekli $\not\Rightarrow$ f Lipschitz" ters örnekle gösteriniz.

$\varepsilon>0$ alalım. $\exists\delta>0$? $|x-y|<\delta \Rightarrow |f(x)-f(y)|<K|x-y|$

$<K\delta=\varepsilon$

$\delta=\frac{\varepsilon}{K}$, $(K>0)$

$f(x)=\sqrt{x}$, $[0,1]$ aralığında düzgün sürekli

Tersine, f Lips. sürekli olsun. $\exists K>1$, $|\sqrt{x}-\sqrt{y}|<K|x-y|$ $\forall x,y\in[0,1]$ için

$x=0$ $y=\frac{1}{4K^2}$ $|\sqrt{x}-\sqrt{y}| = \frac{1}{2K} > \frac{1}{4K} = |x-y|.K$

⑦ $f: A \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ düzgün sürekli, $(x_k) \subseteq A$ bir Cauchy dizisi olsun. $f((x_k)) \subseteq \mathbb{R}^m$ bir cauchy dizisi olduğunu gösteriniz.

f düzgün sürekli, $(x_k) \subseteq A$ cauchy dizisi olsun.

$\varepsilon>0$ aldlım.

Amaç: $\forall\varepsilon>0$, $\exists N\in\mathbb{N}$ $m,n\geq N$ $\|f(x_m)-f(x_n)\|<\varepsilon$?

$\varepsilon>0$ alalım. $\exists\delta>0$; $\|x-y\|<\delta \Rightarrow \|f(x)-f(y)\|<\varepsilon$

(x_k) cauchy olduğundan $\delta>0$ için, $\exists N\in\mathbb{N}$, $m,n\geq N$, $\|x_m-x_n\|<\delta$.

$n,m\geq N$ olduğundan $\|x_m-x_n\|<\delta \Rightarrow \|f(x_m)-f(x_n)\|<\varepsilon$.

$\boxed{8}$ f sürekli iken yukarıdaki ifadenin doğru olmadığını gösteriniz.

$f : (0,\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ $\quad f(x) = \frac{1}{x}$ $\nearrow$ sürekli

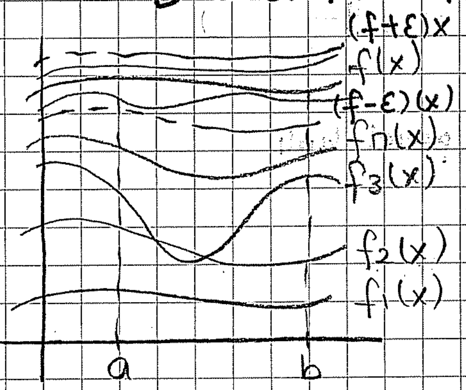
d. sürekli değil.

$(x_n) = \frac{1}{n}$ Cauchy

$(f(x_n))_{\mathbb{N}} = (n)_{n\in\mathbb{N}}$ Cauchy değildir.

Fonk. Dizilerinden itibaren

DÜZGÜN YAKINSAKLIK



$(f_n(x))$ fonk dizisi $f(x)$'e noktasal yakınsasın. Eğer $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N = N(\varepsilon)$, $\forall x \in D(f)$ $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ $\forall n > N$.

ÖR: $f_n(x) = x^n$, $[0,1]$ aralığında

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \in [0,1) \ \checkmark \\ 1, & x = 1 \ \checkmark \end{cases}$$

$r < 1$ o.ü $[0,r]$ aralığında düzgün süreklidir

$$f_n \xrightarrow{d} f \quad [0,r]$$

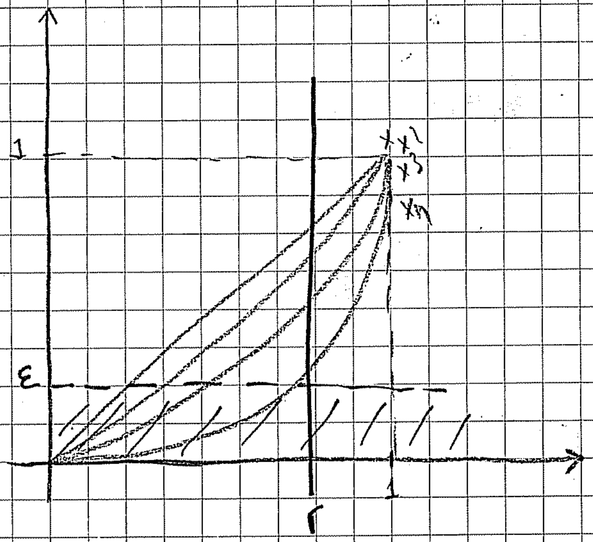
Verilen $\varepsilon > 0$, $\exists N = N(\varepsilon)$: $\forall x \in [0,r]$, $|f_n(x) - f(x)| = |x^n - 0| < \varepsilon$ $\forall n > N$.

$= x^n < r^n < \varepsilon$ $\quad$ $[0,r]$ aralığında old. için

$n \ln r < \ln \varepsilon$

$n > \left[\frac{-\ln \varepsilon}{-\ln r} \right]$ $\quad \forall x \in [0,r]$

$$N = \left[\left| \frac{-\ln \varepsilon}{-\ln r} \right|\right] + 1 = N(\varepsilon)$$



Teorem: (f_n) ve f fonk $[a,b]$ aralığında tanımlı ve (f_n) sürekli fonk dizisi olsun.

$$f_n \xrightarrow{d} f \iff c_n := \sup_{\substack{a\le x\le b \\ x\in K}} \| f_n(x) - f(x) \| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

$x\in K$ → en genel hali

$$\begin{tikzcd} f_n : [a,b] \arrow[r] \arrow[d, "n"] & \mathbb{R} \\ f : [a,b] \arrow[r] & \mathbb{R} \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} f_n : K \text{ kompakt} \subset \mathbb{R}^k \arrow[r] \arrow[d, "n"] & \mathbb{R}^m \\ f : K \subset \mathbb{R}^k \arrow[r] & \mathbb{R}^m \end{tikzcd}$$

$$f_n(x) = f_n((x_1,\dots,x_k)) = (f_n^1(x_1,\dots,x_k),\dots,f_n^m(x_1,\dots,x_k))$$

İspat: $f_n \xrightarrow{d} f$ olsun.

$\forall \varepsilon>0,\ \exists N=N(\varepsilon) : \forall x\in[a,b],\ |f_n(x)-f(x)|<\varepsilon \quad \forall n>N.$

f_n ve f sürekli $[a,b]$

$\Rightarrow f_n - f$ fonk. sürekli

$$c_n := \sup_{a\le x\le b} |f_n(x)-f(x)| < \varepsilon .$$

$$|c_n - 0| < \varepsilon \Rightarrow \lim c_n = 0$$

Örnek: $f_n(x) = \left(x-\frac{1}{n}\right)^2 , [-1,1]$

$x=-1 , \ f_n(-1) = \left(-1-\frac{1}{n}\right)^2 \xrightarrow[n]{} 1 = (-1)^2$

$x=1 , \ f_n(1) = \left(1-\frac{1}{n}\right)^2 \longrightarrow 1 = (1)^2$

$x_0 \in (-1,1) , \ f_n(x_0) = \left(x_0-\frac{1}{n}\right)^2 \longrightarrow x_0^2 = (x_0)^2$

$$c_n := \sup_{-1\le x\le 1} |f_n(x) - f(x)|$$

$$= \sup_{-1\le x\le 1} \left| \left(x-\frac{1}{n}\right)^2 - x^2 \right|$$

$$= \sup_{-1\le x\le 1} \left| x^2 - \frac{2x}{n} + \frac{1}{n^2} - x^2 \right|$$

$$= \sup_{-1\le x\le 1} \left| \underbrace{\frac{1}{n^2} - \frac{2}{n}x}_{h(x)} \right| , [-1,1]$$

$h'(x) = -\frac{2}{n} < 0 \Rightarrow h(x) \searrow$

$h(-1) = \frac{1}{n^2} + \frac{2}{n}$ $\quad h(1) = \frac{1}{n^2} - \frac{2}{n}$

$c_n = h(-1) = \frac{1}{n^2} + \frac{2}{n} \longrightarrow 0$

Teoremden $f_n \xrightarrow{d} f(x) = x^2$

$(\Leftarrow:)$ $c_n := \sup\limits_{a \le x \le b} |f_n(x) - f(x)| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ olsun.

$\forall \varepsilon > 0 , \exists N = N(\varepsilon) : \forall n > N$ için $|c_n - 0| < \varepsilon$.

$\Rightarrow \sup\limits_{a \le x \le b} |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$.

$\Rightarrow \forall x \in [a,b]$ $\quad |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$

$\Rightarrow f_n \xrightarrow{d} f$

Teorem: (f_n) fonk dizisi A kümesi üzerinde sürekli ve f'e düzgün yakınsıyor ise f, A üzerinde süreklidir.

İspat: $\varepsilon > 0$ alalım: $x_0 \in A$ fiks olsun.

(*) $\forall n \in \mathbb{N}$ için $f_n(x)$ fonk'u x_0'da süreklidir

$\exists \delta > 0$: $|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f_n(x) - f_n(x_0)| < \varepsilon$.

(**) $f_n \xrightarrow{d} f$: $\exists N$: $\forall x \in A$ için $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$

İddia: f fonk. x_0 noktasında süreklidir.

$\exists \delta' =$ seçelim öyle ki $|x - x_0| < \delta' \Rightarrow$

$|f(x) - f(x_0)| \le |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(x_0)| + |f_n(x_0) - f(x_0)|$

$< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$.

! f_n sürekli + $f_n \xrightarrow{d} f \Rightarrow f$ sürekli.

ÖR: $f_n(x) = x^n - x^{n+1}$, $[0,1]$

$f_n(0) = 0 \longrightarrow 0$

$f_n(1) = 1 - 1 \longrightarrow 0$

$x_0 \in (0,1)$ için $f_n(x_0) = x_0^n(1-x_0) \longrightarrow 0$

$$\Rightarrow f_n(x) \xrightarrow{n} f(x) = 0$$

$$C_n := \sup_{0 \le x \le 1} |f_n(x) - f(x)|$$

$$= \sup_{0 \le x \le 1} |\underbrace{x^n - x^{n+1} - 0}_{h(x)}|$$

$$h(x) = x^n - x^{n+1}$$

$$h'(x) = n . x^{(n-1)} - (n+1) . x^n$$

$$= x^{(n-1)}(n - (n+1)x)$$

$$x = 0 \quad \vee \quad x = \frac{n}{n+1}$$

x	0		$\frac{n}{n+1}$		1
$h'(x)$	0	$+$	0	$-$	0
$h(x)$		↗		↘	

$h(0) = 0$ $\qquad$ $h(1) = 0$

$$h\left(\frac{n}{n+1}\right) = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n - \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1}$$

$$= \left(\frac{n}{n+1}\right)^n \left(1 - \frac{n}{n+1}\right)$$

$$= \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^n . \frac{1}{n+1}$$

$$c_n := \frac{1}{n+1}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^n$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 0 \ , \quad \lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^n$$

$$= e^{\lim_{n\to\infty} -\frac{1}{n+1} . n} = e^{-1}$$

$$\lim_{n\to\infty} c_n = 0 . e^{-1} = 0$$

→ D.y. olmaması için

ÖR: $f_n(x) = \frac{x^2}{1+nx^2}$, $\mathbb{R}$.

$x_0 \in \mathbb{R}$ $f_n(x_0) = \frac{x_0^2}{1+n(x_0)^2} \longrightarrow 0$, $n \to \infty$ giderken

$c_n := \sup\limits_{x\in\mathbb{R}} | \, |f_n(x) - 0|$

$= \sup\limits_{x\in\mathbb{R}} \left| \frac{x^2}{1+nx^2} \right| = \sup\limits_{x\in\mathbb{R}} \left(\frac{x^2}{1+nx^2} \right)$

$1+nx^2 > nx^2$

$\sup\limits_{x\in\mathbb{R}} x^2 \frac{1}{1+nx^2} < \frac{1}{n\cancel{x^2}} \cancel{x^2}$

$\Rightarrow \lim c_n = 0.$

26 Nisan 2017

$f_n \xrightarrow{d} f \iff c_n: \sup\limits_{a\leq x\leq b} \|f_n(x) - f(x)\| \to 0$

düzgün $\Rightarrow$ noktasal

$\not\Leftarrow$ x^n $[0,1] \longrightarrow f(x) = \begin{cases} 0 & x\in[0,1) \\ 1 & x=1 \end{cases}$

x^n $[0,r]$, $r<1 \xrightarrow{d} 0$

$f_n \underset{I}{\xrightarrow{d}} f \iff \forall \varepsilon > 0,\ \exists N = N(\varepsilon) : \forall x,\ \forall n \geq N$ için $\|f_n(x) - f(x)\| < \varepsilon$.

$f_n \underset{I}{\xrightarrow{\not d}} f \iff \exists \varepsilon > 0$ $\exists (f_{n_k}) \subset (f_n)$ alt dizisi ve $(x_k) \subset I \subset \mathbb{R}^n$ dizisi vardır öyle ki $\|f_{n_k}(x_k) - f(x_k)\| > \varepsilon$.

ÖR: $f_n(x) = \frac{x}{n}$, $\mathbb{R}$

$f_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{n} 0$

~~$c_n := \sup\limits_{x\in\mathbb{R}} \left| \frac{x}{n}\right.$~~ $- 0|$

$f_n : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ $\varepsilon = \frac{1}{2}$ alalım.

$n_k = k$ $x_k = k$

$f_{n_k}(x) = \frac{x}{k}$, $(x_k) = (k)_1^\infty \subset \mathbb{R}$.

$$|f_{n_k}(x_k) - f(x_k)| = \left| \frac{k}{k} - 0 \right| = 1 > \varepsilon = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow f_n \xrightarrow{\cancel{d}} 0$$

Teorem: (f_n) sürekli fonk dizisi f'le düzgün yakınsıyor ise f süreklidir.

(f_n) sürekli

$f_n \xrightarrow[d]{} f$ $\Rightarrow$ f süreklidir.

~~(f_n) sürekli~~

~~$f_n \xrightarrow{n} f$~~ ~~$\Rightarrow f_n \xrightarrow{d} f$~~ YANLIŞ

~~f sürekli~~

A kompakt

Dini Teoremi: (f_n) sürekli, f_n fonk dizisi f'e monoton olarak noktasal yakınsıyor ve f sürekli ise (f_n), f'le düzgün yakınsar

ÖR: $f_n(x) = \dfrac{x^2}{x^2+n^2}$, $[0,1] \xrightarrow{d} 0$

$f_n \xrightarrow{n} 0$ ✓

(f_n)'ler $[0,1]$'de sürekli. $f(x)=0$ sürekli

$(\forall n \quad f_{n+1} \geq f_n \vee f_{n+1} \leq f_n)$

$$x^2+(n+1)^2 > n^2+x^2$$

$$\frac{x^2 . 1}{x^2+(n+1)^2} < \frac{x^2 . 1}{x^2+n^2}$$

$$f_{n+1} < f_n$$

$\Rightarrow f_n \xrightarrow[\text{Dini}]{d} 0$

$$C_n : \sup_{0 \leq x \leq 1} \underbrace{\left| \frac{x^2}{n^2+x^2} - 0 \right|}_{h(x)}$$

$$h'(x) = \frac{2x(x^2+n^2) - 2x x^2}{(n^2+x^2)^2}$$

$$= \frac{2xn^2}{(x^2+n^2)^2} = 0$$

$x = 0$.

x		0		1	
$h'(x)$	$-$		$+$		$+$
$h(x)$	↘	●	↗	●	↗

$c_n := h(1) = \frac{1}{1+n^2} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

$f_1(x) = \frac{x^2}{1+x^2}$ $\qquad$ $f_2(x) = \frac{x^2}{4+x^2}$

$\lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{x^2}{x^2+1} = 1$ $\quad y=1$ $\quad$ Y.A $\qquad \lim\limits_{x\to\mp\infty} \frac{x^2}{4+x^2} = 1$

ÇİFT

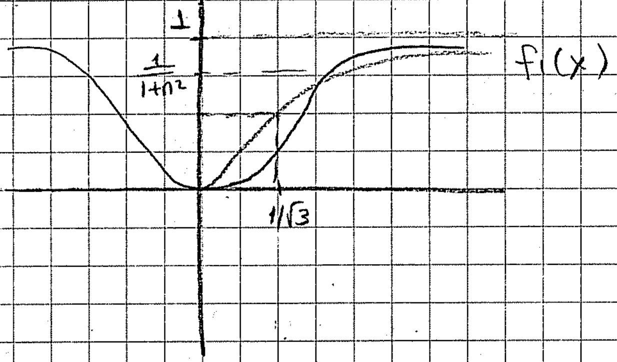
$f'(x) = \frac{2x(x^2+1) - x^2 2x}{(x^2+1)^2}$ $\qquad$ $f_2''(x) = \frac{4-6x^2}{(x^2+1)^3}$

$= \frac{2x}{(x^2+1)^2}$ $\quad x=0$

$f''(x) = \frac{2(x^2+1)^2 - 2x\,2(x^2+1)2x}{(x^2+1)^4}$

$= \frac{2-6x^2}{(x^2+1)^3}$ $\quad x = \mp\frac{1}{\sqrt{3}}$

x		0		$1/\sqrt{3}$	
$f_1'(x)$		0	$+$		$+$
$f_1(x)$			↗		↗
$f_1''(x)$			$+$	0	$-$
$f_1(x)$			∪		∩



ÖR: $f_n(x) = \frac{x^2}{x^2+n^2}$ $\qquad [1,\infty)$

$f_n(1) = \frac{1}{1+n^2} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

$x_0 \in (1,\infty)$ $\quad f_n(x_0) \xrightarrow{n} 1$

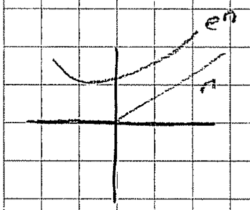
Verilen $\varepsilon > 0$, $\exists N$ bulunur öyle ki $\forall n > N$

$\left| \frac{x_0^2}{n^2+x_0^2} - 1 \right| < \varepsilon . = \left| \frac{-n^2}{n^2+x_0^2} \right| = \frac{n^2}{x_0^2+n^2} = \frac{1}{1+\left(\frac{x_0}{n}\right)^2} \xrightarrow{n} 1$

ÖR: $g_n(x) = \dfrac{nx}{n^2x^2+x+e^n}$ $[0,1]$

$g_n(0) = 0 \longrightarrow 0$

$g_n(1) = \dfrac{n}{n^2+e^n+1} = \dfrac{1}{n+\frac{1}{n}+\frac{e^n}{n}} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$



$g_n(x_0) = \dfrac{nx_0}{n^2x_0+x_0+e^n}$

$0 \leq \left| \dfrac{nx_0}{nx_0^2+x_0+e^n} \right| \leq \dfrac{nx_0}{n^2x_0} = \dfrac{1}{n}$
$\downarrow$
0

$g_n \xrightarrow{n} 0$ $[0,1]$

(g_n) ve $g(x)=0$ $[0,1]$ aralığında süreklidir.

$f_{n+1} \geq f_n$

$f_{n+1} - f_n \geq 0$

$\dfrac{f_{n+1}}{f_n} \geq 1$

$g_{n+1} - g_n \begin{matrix} \geq 0 \\ \leq 0 \end{matrix}$

$h(x) = g_{n+1}(x) - g_n(x) \geq 0.$

$h(x) = \dfrac{(n+1)x}{(n+1)^2x^2+x+e^{n+1}} - \dfrac{nx}{n^2x^2+x+e^n}$

$h'(x) = \dfrac{(n+1)((n+1)^2x^2+x+e^{n+1}) - (n+1)x(2(n+1)^2x+1)}{(\quad)^2} - \dfrac{n(n^2x^2+x+e^n) - nx(2n^2x+1)}{(\quad)^2}$

$= \dfrac{-(n+1)^3x^2+(n+1)e^{n+1}}{(\quad)^2} - \dfrac{-n^3x^2+ne^n}{(\quad)^2}$

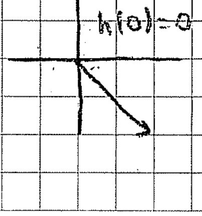
$x \in [0,1]$

$-\dfrac{ne^n - n^3x^2}{(n+1)^2x^2+x+e^{n+1}} \geq -\dfrac{ne^n-n^3x^2}{n^2x^2+x+e^n}$

⋮

$\leq 0.$ $h \downarrow$

$h(x) \leq h(0) = 0$



$g_{n+1} - g_n \leq 0$

$\Rightarrow g_{n+1} \leq g_n$

Dini $\overset{I}{}$ kompakt!

$x_0 \in (0,1)$

$$\frac{g_{n+1}}{g_n} = \frac{(n+1).x}{(n+1)^2x^2+x+e^{n+1}} \cdot \frac{n^2x^2+x+e^n}{nx}$$

$$\Rightarrow \frac{n+\cancel{1}}{\cancel{n}} \cdot \frac{n^{\cancel{2}}x^2+x+e^n}{(n+1)^2\left(\left(\frac{x}{n+1}\right)^2+\frac{x}{(n+1)^2}+\frac{e^{n+1}}{n+1}\right)}$$

$$\Rightarrow \frac{n}{n+1} \underbrace{\qquad\qquad\qquad}_{\leq 1}$$

İspat: $f_n : \overset{\nearrow \text{kompakt}}{I} \xrightarrow[\text{sürekli}]{} \mathbb{R}$

$$f_n \xrightarrow{n} f$$

$$f \text{ sürekli } : I \longrightarrow \mathbb{R}$$

(f_n) artan olsun.

$$f_n \leq f_{n+1} \leq f_{n+2} \leq \ldots \leq f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$$

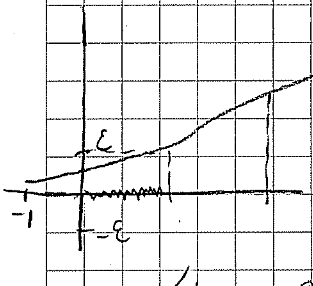
$$g_n = f - f_n \downarrow \xrightarrow{n} 0$$

$\forall x \in I$. $\lim_{n\to\infty} g_n(x) = 0$.

g_n sürekli, azalan $\xrightarrow{n} 0$. $g_n \geq 0$.

$g_n^{-1}(\underset{\text{acık}}{(-\varepsilon,\varepsilon)}) = g_n^{-1}([0,\varepsilon))$

→ g_n pozitif oradan GELDİ!



$x \in I$

$$\lim_{n\to\infty} g_n(x) = 0$$

$\exists N = N(\varepsilon, x)$: $\forall n > N$ $|g_n(x) - 0| < \varepsilon$. $0 \leq g_n(x) < \varepsilon$ $\forall n > N$

$0 \leq g_{N+1}(x) < \varepsilon$.

$x \in g_{N+1}^{-1}[0,\varepsilon) = g_{N+1}^{-1}((-\varepsilon,\varepsilon)) \subset \bigcup_n$

$$I \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} g_n^{-1}([0,\varepsilon))$$

Sonlu tane n_i vardır öyle ki

$I \subset g_{n_1}^{-1}((-\varepsilon,\varepsilon)) \cup \dots \cup g_{n_k}^{-1}((-\varepsilon,\varepsilon))$

(g_n) azalan.

$g_n^{-1}([0,\varepsilon) \subseteq g_{n+1}^{-1}([0,\varepsilon))$

$\Rightarrow \exists N_0 ; I \subset g_{n_1}^{-1}((-\varepsilon,\varepsilon)) \cup \dots \cup g_{n_k}^{-1}((-\varepsilon,\varepsilon)) \subseteq g_{N_0}^{-1}(-\varepsilon,\varepsilon)$

Verilen $\varepsilon > 0$; $\exists N_0$: $\forall n > N$ $\forall x \in I \subset g_{N_0}^{-1}((-\varepsilon,\varepsilon))$ için

$|f_n(x) - f(x)| = |g_n(x)| < \varepsilon \Rightarrow f_n \xrightarrow{d} f$

Teorem: (f_n) fonk dizisi I aralığında sürekli ve f'e düzgün yakınsak ise

$a \in I$ $F_n(x) = \int_a^x f_n(t)\,dt$ fonk dizisi $\int_a^x f(t)\,dt = F(x)$ fonk'una düzgün yakınsar.

İspat: $f_n \xrightarrow{d} f \iff \forall \varepsilon > 0, \exists N = N(\varepsilon), \forall x \in I$ ve $\forall n > N$ için $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$.

Verilen $\varepsilon > 0$ için $\exists N$ seçelim

$$|F_n(x) - F(x)| = \left| \int_a^x f_n(t)\,dt - \int_a^x f(t)\,dt \right|$$

$$\le \int_a^x |f_n(t) - f(t)|\,|dt| < \varepsilon |x-a| < \frac{\varepsilon}{|I|} |I| = \varepsilon.$$

ÖR: $F_n(x) = \frac{\ln(1+n^3x^2)}{n^2}$ $[0,1]$ aralığında $F(x) = 0$'a düzgün yakınsar.

$$F_n'(x) = f_n(x) = \frac{2xn^3}{1+n^3x^2} \frac{1}{n^2} \xrightarrow{d} 0$$

$$= \frac{2nx}{1+n^3x^2}$$

$$f_n(x) \xrightarrow[n \to \infty]{n} 0$$

$$0 \le c_n := \sup_{0 \le x \le 1} \left| \underbrace{\frac{2nx}{1+n^3x^2}}_{h(x)} - 0 \right|$$

$$h'(x) = \frac{2n(1+n3x2) - 2nx \,.\, 2n3x}{(1+n3x2)^2}$$

$$= \frac{2n + 2n4n^2 - 4n4n^2}{(1+n3x2)^2}$$

$$= \frac{2n - 2n4x2}{(\quad)2} = 0. \qquad x = \sqrt{\frac{1}{n^3}}$$

x	0		$\frac{1}{n^{3/2}}$		1
$h'(x)$	0	$+$	0	$-$	0
$h(x)$		↗		↘	

$h(0)=0$

$h(1) = \frac{2n}{1+n^3}$

$$Cn = \frac{1}{\sqrt{n}} \longrightarrow 0$$

$$\Rightarrow fn \xrightarrow{d} 0$$

$$\Rightarrow Fn \xrightarrow{d} 0$$

UYGULAMA (28.04.2017)

✓ ① a) $f_k : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ sürekli fonk'lar olsun. $f_k \longrightarrow f$ (düzgün) ise f'nin sürekli olduğunu gösteriniz. (Defterde var!)

b) $f_n(x) = x - x^n \quad 0 \leq x \leq 1$ (f_n) düzgün yakınsak mıdır?

$x=0 \quad f_n(x) = 0 \longrightarrow 0$

$x=1 \quad f_n(x) = 0 \longrightarrow 0$

$x \in (0,1) ; \lim_{n \to \infty} f_n(x) = x - x^n = x$

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x = 1 \\ x & x \in [0,1) \end{cases}$$

$$f_n(x) \xrightarrow{n} f(x)$$

$f_n(x) \longrightarrow f(x)$ (düzgün) olsaydı, f sürekli olmalıydı fakat $f(x)$, $x=1$'de sürekli değildir.

✓ 2) a) $f_n(x) = \dfrac{x^n}{n + x^n} \quad x \geq 0 \quad n = 1, 2, \ldots$

b) $f_n(x) = \dfrac{e^{-\frac{x^2}{n}}}{n} \quad x \in \mathbb{R} \quad n = 1, 2, \ldots$

a) $x = 0, 1 \quad f_n \longrightarrow 0$

$0 < x < 1 : \lim_{n \to \infty} \dfrac{x^n}{n + x^n} = \lim_{n \to \infty} \overset{\nearrow 0}{x^n} \cdot \lim_{n \to \infty} \overset{\nearrow 0}{\dfrac{1}{n + x^n}} = 0$

$x > 1 : \lim_{n \to \infty} \dfrac{x^n}{n + x^n} = \infty / \infty$ L'Hospital uygula!

$: \lim_{n \to \infty} \dfrac{x^n . \ln x}{1 + x^n . \ln x} = \infty / \infty$ Tekrar L'Hospital uygula

$= \lim_{n \to \infty} \dfrac{x^n . (\ln x)^2}{x^n . (\ln x)^2} = 1.$

$$f(x) = \begin{cases} 0 & 0 \leq x < 1 \\ 1 & x > 1 \end{cases} , \ f_n \longrightarrow f \text{ (noktasal)}$$

f_n'ler $(\forall n)$ için sürekli olduğundan, $f_n \longrightarrow f$ (düzgün) olsaydı, f sürekli olurdu, ↯ (f, $x=1$'de sürekli değil)

$f_n \to f$ (düzgün) $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N = N(\varepsilon) \quad n \geq N, \ \|f_n - f\| < \varepsilon.$

b) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{e^{-x^2/n}}{n} = 0 \quad f_n \to 0$ (noktasal) $f(x) = 0.$

$\varepsilon > 0$ alalım. $\exists N = N > \dfrac{1}{\varepsilon}$ seçelim. $n \geq N$; $\dfrac{1}{n} \leq \dfrac{1}{N}$ $\quad x=0 \Rightarrow \dfrac{1}{n}$

12'de old. için $\leftarrow |f_n - f| = \left| \dfrac{e^{-x^2/n}}{n} - 0 \right| = \left| \dfrac{e^{-x^2/n}}{n} \right| \overset{*}{\leq} \dfrac{1}{n} \leq \dfrac{1}{N} < \varepsilon$

$N > \dfrac{1}{\varepsilon}$

$*$: $e^0 = 1 \quad -\dfrac{x^2}{n} < 0$, $y = e^x$ artan olduğundan $e^{-\frac{x^2}{n}} < e^0 = 1$

3) $f_n(x) = \sqrt{n} . x^n . (1-x) \quad x \in [0,1]$ olsun. $f_n(x) \to 0$ (düzgün) yakınsadığını gösteriniz.

$f_n \to f$ (düzgün) $\Leftrightarrow c_n = \sup\limits_{x\in[a,b]} |f_n(x) - f(x)| \to 0$

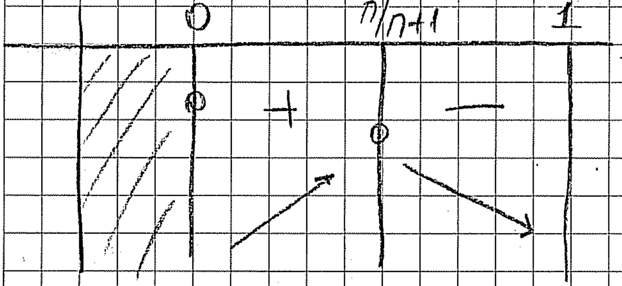
$f_n \xrightarrow{d} 0 \Leftrightarrow c_n = \sup\limits_{x\in[0,1]} |f_n(x) - 0| = \sup\limits_{x\in[0,1]} |f_n(x)| \xrightarrow{?} 0$

(max)
$\sup\limits_{x\in[0,1]} |f_n(x)| = ?$

$f_n(x)$ fonksiyonunun $[0,1]$ aralığında max değerini bulalım.

$f_n'(x) = \sqrt{n} . x^{n-1} . (n+1) . \left(\dfrac{n}{n+1} - x \right)$ → x'ler [0,1]'de dolaştığı için x'e göre türev aldım.

$x = 0 \quad x = \dfrac{n}{n+1}$



$f_n(x)$ fonk. $x = \dfrac{n}{n+1}$'de max değerini alır.

0'a gider

$\max\limits_{x\in[0,1]} |f_n(x)| = \sqrt{n} \, \dfrac{1}{n+1} \left(\dfrac{n}{n+1} \right)^n$ → fonk'da x yerine $\dfrac{n}{n+1}$ koyduk.

e^{-1}

O halde $f_n \to 0$ (düzgün)

4) $f_n(x) = \frac{x}{nx+1}$ $[0,1]$ aralığında $f(x)=0$'a düzgün yakınsadığını gösteriniz.

$$\sup_{x\in[0,1]} |f_n(x) - f(x)| = \sup |f_n(x)| \longrightarrow 0$$

$f_n'(x) = \frac{1}{(1+nx)^2} > 0 \rightarrow$ artan bir fonk.

$f_n (\forall n)$ için artan ve $x \in [0,1]$ olduğundan $f_n(x)$ max değerini $x=1$ noktasında alır.

$$\sup |f_n(x)| = \frac{1}{n+1} \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

5) $x \in [0,1]$, $f_0(x) = x$ $f_n(x) = f_{n-1}(x).(1-f_{n-1}(x))$ o.ü

$f_n \longrightarrow 0$ (düzgün) gösteriniz.

Dini Teo: A kompakt, (f_n) monoton dizi ($f_n \leq f_{n+1}$ ya da $f_n \geq f_{n+1}$ $(\forall n)$), (f_n)'ler sürekli olsun. $f_n \xrightarrow{n} f \Rightarrow f_n \xrightarrow{d} f$

$$f_n = f_{n-1} - f_{n-1}^2 \leq f_{n-1} \Rightarrow f_n\text{'ler azalandır}$$

Amaç: $0 \leq f_n \leq 1$, $1 \geq f_0(x) \geq 0$ $(x \in [0,1])$

x yerine 0 sınır nokta koyduk

$1 \geq f_{n-1} \geq 0$ olsun. $1 \geq f_n = f_{n-1}(1-f_{n-1}) \geq 0$ ✓

f_n'ler azalan ve alttan sınırlı olduğundan $\exists f$, $f_n \longrightarrow f$

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} f_{n-1}(x)(1-f_{n-1}(x))$$

$$f = f(1-f) \Rightarrow f = 0$$

$$f_n \longrightarrow 0 \text{ (noktasal)}$$

$A = [0,1]$ kompakt, $(\forall n)$ f_n sürekli ve $f_n \xrightarrow{n} 0$ olduğundan Dini teoreminden $f_n \xrightarrow{d} 0$

2 Mayıs 2017

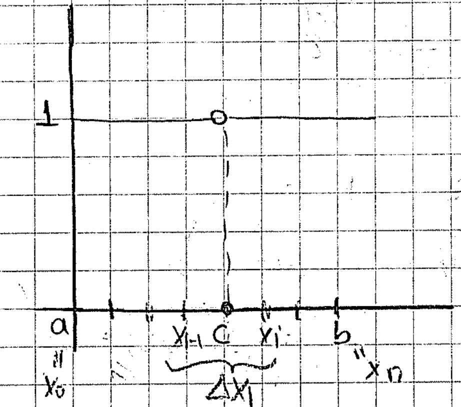
Teorem: (f_n) fonksiyon dizisi $I=[a,b]$ aralığında sınırlı, reel değerli integrallenebilir ve $f_n \longrightarrow f$ düzgün yakınsak olsun. Böylece $f(x)$ fonk integrallenebilirdir ve

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx$$

---

f fonk'u $[a,b]$ integrallenebilir

$$\sup \mathbb{A}\{A(f,P)\} = \inf\{\ddot{U}(f,P)\} = \mathcal{U}$$



$$\int_a^b 1.\,dx = \int_a^c + \int_a^b = b-a$$

Teorem: $\forall \varepsilon > 0$, $\exists P^* = \ldots$ öyle ki $\forall P \subset P'$ $|x_{i-1}-x_i| < \varepsilon$.

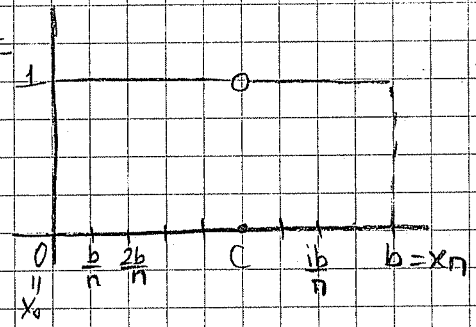
$$\ddot{U}(f,P) = \sum_{i=1}^{n} \sup_{x\in\Delta x_i} f(x)\,\Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} 1.\Delta x_i$$

$$A(f,P) = \sum_{i=1}^{n} \inf_{x\in\Delta x_i} f(x)\,\Delta x_i = 1\,\Delta x_1 + 1.\Delta x_2 + \cdots + 1.\Delta x_{i-1} + 0.\Delta x_i +$$

$$+ 1.\Delta_{i+1} + \cdots + 1.\Delta x_n$$

$$|\ddot{U}-A| < \varepsilon \Rightarrow |\ddot{U}-A| = |\Delta x_i| = |x_i - x_{i-1}| < \varepsilon$$

II. YOL



$$P = \left\{0, \frac{b}{n}, \frac{2b}{n}, \ldots, \frac{ib}{n}, \ldots b\right\}$$

$$\ddot{U}(f,P) = \sum_{i=1}^{n} 1\,\frac{b}{n} = b$$

$$\ddot{U} = \{\ddot{U}(f,P)\} = \{b\}$$

$$\sup \ddot{U} = \inf \ddot{U} = b$$

$$A(f,P) = \sum_{i=1}^{n} \inf f(x_i)\,\frac{b}{n} = \frac{n-1}{n}\,b$$

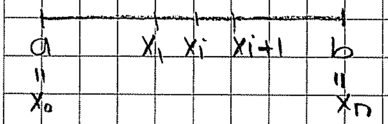
$$\sup \mathbb{A} = \left\{\frac{n-1}{n}\,b ; n\in\mathbb{N}\right\} = b$$

$\forall \varepsilon > 0 , \exists N : \forall x \in X_{(*)} \; | f_n(x) - f(x) | < \frac{\varepsilon}{3(b-a)} \quad \forall n \geq N$

f_N integrallenebilir olsun. Verilen $\varepsilon > 0$ $\exists P'$ parcalanışı vardır öyle ki $\forall P \subset P'$

$$| \ddot{U}(f_N, P) - A(f_N, P) < \varepsilon / 3$$

$(*)$ dan $\overline{\frac{\varepsilon}{3(b-a)} - f_N(x) < f(x)} < \underline{\frac{\varepsilon}{3(b-a)} + f_N(x)} \quad \forall x$



$$\ddot{U}(f, P) = \sum_{x_i \in P} \sup_{x \in \Delta x_i} f(x) \, \Delta x_i$$

$$\sup_{x_{i-1} \leq x < x_i} f(x) \leq \left(\sup_{x_{i-1} \leq x \leq x_i} f_N(x) \right) + \frac{\varepsilon}{3(b-a)}$$

$$\ddot{U}(f, P) \leq \underbrace{\sum_{x_i \in P} \left(\sup_{x_{i-1} \leq x \leq x_i} f_N(x) + \frac{\varepsilon}{3(b-a)} \right)}$$

$$= \ddot{U}(f_N, P) + (\varepsilon \Delta x_1 + \varepsilon \Delta x_2 + \dots + \varepsilon \Delta x_n)$$

$$= \ddot{U}(f_N, P) + \frac{\varepsilon}{3(b-a)} (b-a)$$

$$\ddot{U}(f, P) \leq \ddot{U}(f_N, P) + \frac{\varepsilon}{3}$$

$$A(f, P) = \sum_{x_i \in P} \inf_{x_{i-1} \leq x \leq x_i} f(x) \, \Delta x_i$$

$$f(x) \geq f_N(x) - \frac{\varepsilon}{3(b-a)}$$

$$\inf_{x_{i-1} \leq x < x_i} f(x) \geq \inf_{x_{i-1} \leq x < x_i} \left(f_N(x) - \frac{\varepsilon}{3(b-a)} \right)$$

$$\geq \sum_{x_i \in P} \left(\inf f_N(x) - \frac{\varepsilon}{3(b-a)} \right)$$

$$A(f, P) \geq A(f_N, P) - \frac{\varepsilon}{3} .$$

$$\ddot{U}(f, P) - A(f, P) \leq \ddot{U}(f_N, P) + \varepsilon/3 - A(f_N, P) + \varepsilon/3$$

$$= (\ddot{U}(f_N, P) - A(f_N, P)) + \frac{2\varepsilon}{3} < \varepsilon$$

$\Rightarrow f$ fonk $[a,b]$ integrallenebilir.

Teorem: $f_n \in C'[I]$ olsun. $f_n \to f$ noktasal yakınsıyor ve $f_n' \to g$ düzgün yakınsıyor ise $g = f'$.

İspat: $f_n \xrightarrow{g} f$ $\quad f_n' \xrightarrow{d} g \Rightarrow g$ sürekli

g fonk $I=[a,b]$ integrallenebilirdir.

$$\int_a^x f_n'(t)\,dt = f_n(x) - f_n(a)$$

$$\int_a^x g(t)\,dt \text{ vardır.}$$

noktasal yakınsak

bir önceki teoremden $\Rightarrow$

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^x f_n'(t)\,dt = \lim_{n\to\infty} (f_n(x) - f_n(a))$$

$$= \int_a^x g(t)\,dt$$

$$\Rightarrow \int_a^x g(t)\,dt = f(x) - f(a)$$

Analizin temel teoreminden;

$\exists G$ fonk. vardır öyle ki $G(x) = \int_a^x g(t)\,dt = f(x) - f(a)$

ve $G'(x) = g(x) = f'(x)$

Tanım: Cauchy: $\forall \varepsilon > 0,\ \exists N: \forall n,m > N \Rightarrow |a_n - a_m| < \varepsilon$

Cauchy $\Leftrightarrow$ Yakınsak $(\mathbb{R}^n)$

(f_n) fonk dizisi olsun.

Cauchy: $\forall \varepsilon > 0,\ \exists N: \quad \forall n,m > N \Rightarrow \|f_n(x) - f_m(x)\| < \varepsilon$

Düzgün Cauchy: $\forall \varepsilon > 0,\ \exists N: \forall x,\ \forall n,m \geq N \Rightarrow \|f_n(x) - f_m(x)\| < \varepsilon$.

Teorem: (f_n) fonk dizisi A kümesi üzerinde tanımlı reel değerli fonk dizisi olsun. (f_n) Düzgün Cauchy olması için gerek ve yeter şart düzgün yakınsak olmasıdır.

İspat: $(\Leftarrow:)$ $f_n \xrightarrow{d} f$ olsun. $\forall \varepsilon > 0,\ \exists N: \forall n > N$ ve $\forall x \in A$ için $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon/2$.

Verilen $\varepsilon > 0$ için $\exists N' = N$ alınsın. $\forall x$ ve $\forall n,m > N$ için

$$|f_n(x) - f_m(x)| \leq |f_n(x) - f(x)| + |f(x) - f_m(x)|$$

$$\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

$\Rightarrow (f_n)$ Düzgün Cauchy'dir.

($\Rightarrow$:) (f_n) Düzgün Cauchy olsun. Verilen $\varepsilon > 0$, $\exists N : \forall x$, $\forall n,m > N$ $|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$.

$(a_n) = (f_n(x))_n \subset \mathbb{R} \Rightarrow$ Cauchy.

Her x için tanımlanan $f_n(x))$ dizisi yakınsaktır.

$f_n(x) \longrightarrow f(x)$ diye tanımlayalım.

$f_n \xrightarrow{n.} f$

<u>SORU</u>: $f_n \xrightarrow{d} f$?

Verilen $\varepsilon > 0$ $\exists N' = N$ alalım $\forall x \in A$ ve $\forall n > N$ için

$|f_n(x) - f(x)| = \lim_{n \to \infty} |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$. $m > N$.

5 Mayıs 2017

$f_n : A \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$

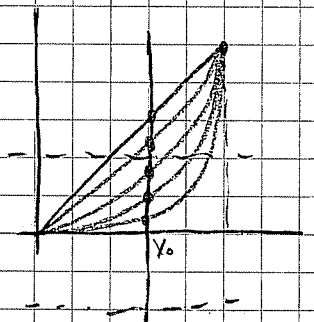
$x \longmapsto (f_n(x))$

$\lim_{n \to \infty} f_n(x) = f(x)$

$f_n \xrightarrow{n} f$

$f_n(x) = x^n$ $[0,1] \longrightarrow f(x) = \begin{cases} 0 & x \in [0,1) \\ 1 & x = 1 \end{cases}$

$\forall \varepsilon > 0$, $\exists N = N(\varepsilon, x)$: $\forall n > N$

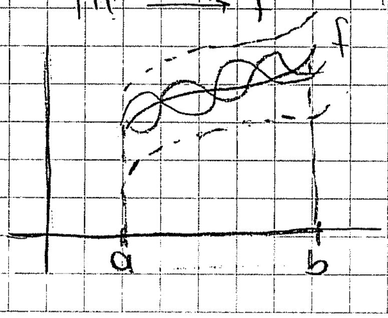


$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$

x^n $[0,r]$ $r < 1$.

$$\begin{tikzcd} x^n \arrow[d, "d"] \\ 0 \end{tikzcd}$$

$f_n \xrightarrow{d} f$



① $\forall \varepsilon > 0,\ \exists N = N(\varepsilon);\ \forall x \quad \forall n > N \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$

② $c_n = \sup\limits_{a \le x \le b} |f_n(x) - f(x)| \longrightarrow 0$

③ Dini Teoremi: Kompakt $f_n \nearrow$ veya $\searrow$ sürekli $\xrightarrow{n} f$

$\Rightarrow f_n \xrightarrow{d} f$

④ Düzgün Cauchy fonksiyon dizisi

Teorem: $f_n \xrightarrow{d} f$ $+ f_n$ sınırlı

$+ f_n$ integrallenebilir.

$\Rightarrow f$ int bilir $+ \lim \int_a^b f_n(t)dt = \int_a^b f(t)dt$

Teorem: $f_n \in C'(I)$ $\quad f_n \xrightarrow{n} f$

$f_n' \xrightarrow{d} g$

$\Rightarrow f' = g$

Tanım: (Düzgün Sınırlılık / Equibdd)

(f_n) fonksiyon dizisi I kümesi üzerinde reel değerli fonk'lar olsun. $f_1, f_2, f_3, \dots f_n$

$(\forall n \ \ \exists M_n \in \mathbb{R}_+,\ \forall x \in I : |f_n(x)| \le M_n)$

f_n'ler sınırlıdır $\Uparrow \not\Downarrow$

$(\exists M \in \mathbb{R}_+ : \forall n, \forall x \in I \ \ |f_n(x)| \le M)$

düzgün sınırlılık

Her $n \in \mathbb{N}$ ve her $x \in I$ için $|f_n(x)| \le M$ koşulunu sağlayan bir tane $M \in \mathbb{R}_+$ var ise (f_n) fonk dizisine düzgün sınırlıdır denir.

—— △ ——

$C(I) = \{ f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ sürekli, $I \subset \mathbb{R}$ kompakt $\}$

$(C(I), +, \cdot)$

$(f+g)(x) = f(x) + g(x)$ değişmeli grup.

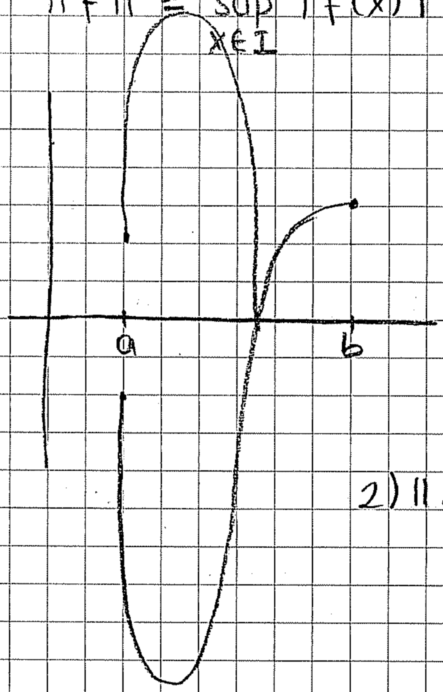
$\lambda \in \mathbb{R}$, $(\lambda \cdot f)(x) = \lambda f(x)$

$\cdot \quad + \quad \cdot$ Dağılma

$(\lambda_1 + \underset{\curvearrowleft}{\lambda_2}) \cdot f(x)$

$(\lambda_1 \lambda_2) f = \lambda_1 (\lambda_2 f)$

$\|f\| = \sup_{x \in I} |f(x)|$



$\|\cdot\| = C(I) \longrightarrow \mathbb{R}$

$f \longmapsto \|f\|$

1) $\|f\| \geq 0$ ve $\|f\| = 0 = \sup_{x \in I} |f(x)|$

$\Leftrightarrow \forall x \in I \ |f(x)| = 0$

$\Leftrightarrow f = 0$

2) $\|\lambda f\| = \sup_{x \in I} |\lambda f(x)|$

$= |\lambda| \sup_{x \in I} |f(x)| = |\lambda| \|f\|$.

3) $\|f+g\| = \sup_{x \in I} |f(x) + g(x)|$

$|f(x) + g(x)| \leq |f(x)| + |g(x)|$

$\Rightarrow \sup_{x \in I} |f(x) + g(x)| \leq \sup_{x \in I} |f(x)| + \sup_{x \in I} |g(x)|$

$\|f+g\| \leq \|f\| + \|g\|$

$(C(I), \|\cdot\|)$ normlu uzay

$\|\cdot\|$ - sup norm

- $\|\cdot\|_\infty$

$f_n \xrightarrow{d} f \Leftrightarrow c_n = \sup_{x \in I} |f_n(x) - f(x)|$

$= \sup_{x \in I} |(f_n - f)(x)|$

$= \|f_n - f\|_\infty \longrightarrow 0$.

Weierstrass Yaklasım Teoremi:

$f: I \longrightarrow \mathbb{R}$ sürekli bir fonksiyon o.ü $\forall \varepsilon > 0$ için $\exists$ reel değerli p polinomu vardır öyle ki $\|f-g\|_\infty < \varepsilon$.

———o———

$\overline{\Phi} = \mathbb{R}$?

$r \in \mathbb{R}$ o.ü $\forall \varepsilon > 0$ $B(r,\varepsilon)\setminus\{r\} \cap \Phi \neq \emptyset$ $\exists q \in \Phi$; $|q-r| < \varepsilon$.

———o———

$f \in (C(I), \|\cdot\|_\infty)$

SONUÇ: Her $f \in C(I)$ fonksiyonuna bir tane (p_n) polinom (fonk) dizisi ile düzgün yaklasılır.

$\overline{P(I) = \{\text{polinomlar}\}} = C(I)$

$\swarrow$

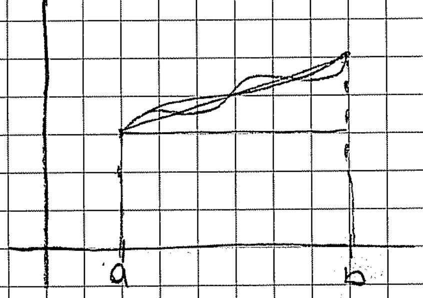
sup($\|\cdot\|_\infty$)'a göre kapanış

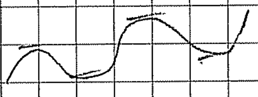
$\|p_n - f\|_\infty < \varepsilon$

$\|$

$\sup_{x \in I} |p_n(x) - f(x)| < \varepsilon$.

$\forall x \in I$ için $|p_n(x) - f(x)| < \varepsilon$.





$\sin x = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots$

$p_0(x) = a_0$

$p_1(x) = a_0 + a_1 x$

$p_2(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$

$\vdots$

Ödev: Önerme 1.39

İspat: $\forall n \in \mathbb{N}$ için (ε_n) sayı dizisi $\lim_{n\to\infty} \varepsilon_n = 0$ olsun.
ε_n için $\exists p_n$ polinomu vardır öyle ki $\|f - p_n\|_\infty < \varepsilon_n$

$$\lim_{n\to\infty} \|f - p_n\|_\infty$$

$$= \lim_{n\to\infty} c_n \leq \lim_{n\to\infty} \varepsilon_n = 0$$

$$\Rightarrow \lim c_n = 0$$

Sayı Serileri

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ seri denir. $a_n \in \mathbb{R}$, $\underset{\text{dizi}}{(a_n)_0^\infty} \subset \mathbb{R}$

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n < +\infty \iff$ seri yakınsaktır ✓

$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n}$ harmonik seri, ıraksak çünkü toplam sonlu değil

$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n = 1 - 1 + 1 - 1 + \cdots$, ıraksak

$S = \sum_{n=0}^{\infty} a_n$ serisi

(S_n) kısmi toplamlar dizisi

$S_0 = a_0$

$S_1 = a_0 + a_1$

$S_2 = a_0 + a_1 + a_2$

$\vdots$

$S_n = a_0 + a_1 + \cdots + a_n$

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n = S.$$

seri yakınsak $\iff$ (S_n) dizisi yakınsak

$$\sum_{0}^{\infty} (-1)^n = 1 - 1 + 1 - 1 + \cdots$$

$S_0 = 1$

$S_1 = 0$

$S_2 = 1$

$S_3 = 0$

$\vdots$

$$S_n = \begin{cases} 1 & n \text{ çift} \\ 0 & n \text{ tek} \end{cases}$$

$\lim s_n$ YOK $\Leftrightarrow$ S ıraksak ✓

Geo. Seri: $\sum_{n=0}^{\infty} r^n \quad , r \in \mathbb{R}$

$$S_n = a_0 + a_1 + \cdots + a_n$$

$$= 1 + r + r^2 + \cdots + r^n = \frac{1 - r^{n+1}}{1-r} \quad , r \neq 1$$

- $r = 1$ seri $\sum_{n=0}^{\infty} 1 = \infty$ ıraksak.

- $r = -1$ seri $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n =$ ıraksak.

YAKINSAK $\Leftrightarrow$ $\lim s_n$ VAR.

$$\lim s_n = \lim_{n \to \infty} \frac{1 - r^{n+1}}{1-r}$$

$$= \frac{1}{1-r} \lim_{n \to \infty} (1 - r^{n+1})$$

$$\left[\; |x| < 1 \quad \text{için} \quad \lim_{n \to \infty} x^n = 0 \; \right]$$

$$-1 < r < 1 \Rightarrow \lim_{n \to \infty} s_n = \frac{1}{1-r}$$

$r > 1 \Rightarrow \lim_{n \to \infty} \frac{1}{1-r} (1 - r^{n+1}) = +\infty$, seri ıraksak.

$r < -1 \Rightarrow \lim_{n \to \infty} \frac{1}{1-r} (1 - r^{n+1})$, YOK , seri ıraksak.

$$\sum_{n=0}^{\infty} r^n = \begin{cases} \text{Yakınsak} \quad \frac{1}{1-r} & , |r| < 1 \\ \text{Iraksak} & |r| \geq 1 \end{cases}$$

Telescopik Seri: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \Rightarrow \underbrace{\sum \frac{1}{n(n+1)} = \sum \frac{1}{n} - \sum \frac{1}{n+1}}$$

Bu sekilde yazabilmem
icin yakınsak olmaları lazım.

$$S_n = a_1 + \cdots + a_n$$

$$= 1 - \cancel{\frac{1}{2}} + \cancel{\frac{1}{2}} - \cancel{\frac{1}{3}} + \cancel{\frac{1}{3}} - \cancel{\frac{1}{4}} + \cancel{} \cdots + \cancel{\frac{1}{n}} - \frac{1}{n+1}$$

$$= 1 - \frac{1}{n+1}$$

$$\sum_{1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \lim_{n\to\infty} S_n = 1 \quad \text{YAKINSAK}$$

Harmonik Seri:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{an+b} \qquad \begin{array}{l} a, b \in \mathbb{R} \\ b \neq -a \end{array}$$

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ ıraksaktır.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \underbrace{\frac{1}{3} + \frac{1}{4}} + \underbrace{\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}} + \cdots$$

$$\geq 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \cdots$$

$= \infty$, harmonik seri ; ıraksak

Teorem: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ yakınsak ise $\lim a_n = 0$

$$\not\Leftarrow$$

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ harmonik seri ıraksak. $\lim \frac{1}{n} = 0$

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ teleskopik seri yakınsak $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 0$.

$\lim a_n \neq 0 \Rightarrow \sum_{1}^{\infty} a_n$ ıraksak.

$$\sum_{1}^{\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

$$\lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e^{\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} . n} = e \neq 0$$

$\Rightarrow$ ıraksak.

Teorem: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ve $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ yakınsak ise

i) $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n \mp b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \mp \sum_{n=1}^{\infty} b_n$

ii) $c \in \mathbb{R}$ $\sum_{n=1}^{\infty} (c a_n) = c \sum_{n=1}^{\infty} a_n$

$r^n \rightarrow$ geo.

$\frac{1}{an+b}$ harmonik

$\frac{1}{n(n+1)} \rightarrow$ teleskopik.

Cauchy kriterini kullanarak $f_n(x) = \frac{x}{1+e^{nx}}$ fonksiyon dizisinin $[0, 5]$ aralığında düzgün yakınsak olduğunu gösteriniz.

$\varepsilon > 0, \quad \exists N(\varepsilon) = ? \quad m,n > N \quad |f_m(x) - f_n(x)| < \varepsilon$

$$|f_m(x) - f_n(x)| = \left|\frac{x}{1+e^{mx}} - \frac{x}{1+e^{nx}}\right| \le \left|\frac{x}{1+e^{mx}}\right| \le \left|\frac{x}{e^{mx}}\right| \le \left|\frac{1/m}{e^{m \cdot 1/m}}\right| = \frac{1}{em}$$

$$< \frac{1}{eN} = \varepsilon$$

$g(x) = \frac{x}{1+e^{mx}}$ mutlak max, $[0, 5]$?

$g'(x) = e^{-mx}(1-mx) = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{m}$ → kritik nokta.

x		0		$1/m$		5
$g'(x)$			$+$		$-$	
$g(x)$			↗		↘	

$x = \frac{1}{m}$ 'de g fonksiyonu mutlak max değerini alır.

$f_n(x) = \frac{n+\cos x}{2n+\sin^2 x}$ olarak veriliyor.

a) $f_n \xrightarrow{n} f \quad f = ?$

b) $f_n \xrightarrow{d} f$ gösteriniz.

c) $\lim\limits_{n\to\infty} \int_2^7 f_n(x)\,dx$

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n+\cos x}{2n+\sin^2 x} \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \frac{1}{2}$.

$f_n \xrightarrow{n} f \quad , \quad f(x) = \frac{1}{2}, \quad (\forall x)$

b) $\varepsilon > 0, \quad \exists N(\varepsilon) = ? \quad n \ge N \quad |f_n(x) - f(x)| = \left|\frac{n+\cos x}{2n+\sin^2 x} - \frac{1}{2}\right| \le$

$$\le \left|\frac{2\cos x + \sin^2 x}{2(2n+\sin^2 x)}\right| \le \frac{3}{2(2n+\sin^2 x)} \le \frac{3}{4n} + \frac{3}{4N} = \varepsilon$$

$$4n + 2\sin^2 x \ge 4n$$

$$\frac{1}{2(2n+\sin^2 x)} \le \frac{1}{4n}$$

c) $f_n \xrightarrow{d} f$,

$$\lim_{n\to\infty} \int f_n(x)\,dx = \int \left(\lim_{n\to\infty} f_n(x)\right) dx = \int f(x)\,dx$$

$$\lim_{n\to\infty} \int_2^7 f_n(x)\,dx = \int_2^7 \left(\lim_{n\to\infty} f_n(x)\right) dx = \int_2^7 \frac{1}{2}\,dx = \frac{5}{2}$$

③ $f_n = n^3.x^n(1-x)$ fonksiyon dizisinin $[0,1]$ aralığında $f(x)=0$'a noktasal yakınsadığını gösteriniz. $f_n(x) \longrightarrow f(x)=0$ yakınsamasının düzgün olmadığını gösterin.

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} n^3.x^n.(1-x) \begin{cases} \xrightarrow{x=0} 0 \\ \xrightarrow{x=1} 0 \\ \xrightarrow{x=(0,1)} ? \end{cases}$$

$\sum \underbrace{n^3.x^n.(1-x)}_{a_n}$ yakınsak $\Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = 0$

$\sum n^3.x^n(1-x)$ serisinin yakınsak olduğunu gösterirsek genel terimin limitinin 0 olduğunu, yani $\lim_{n\to\infty} n^3 x^n(1-x)=0$ olduğunu söyleyebilirim.

$*\sum a_n$ yakınsak $\Rightarrow a_n \longrightarrow 0$, $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \begin{cases} \longrightarrow =1 \text{ yanıt vermez.} \\ \longrightarrow <1 \text{ yakınsak} \\ \longrightarrow >1 \text{ ıraksak.} \end{cases}$

Oran teo kullanalım.

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{f_{n+1}}{f_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(n+1)^3.x^{(n+1)}.\cancel{(1-x)}}{n^3.x^n\cancel{(1-x)}}\right| \underset{\substack{\downarrow \\ x\in(0,1)}}{=} |x| < 1.$$

olduğundan seri yakınsaktır ve $\lim_{n\to\infty} f_n(x)=0$

$f_n \xrightarrow{n} f = 0.$

Eğer $f_n \xrightarrow{d} f$ olsaydı, $\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f_n(x)dx = \int_0^1 f(x)dx = 0$ olurdu

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f_n(x)\,dx = \lim_{n\to\infty}\int_0^1 n^3 x^n(1-x)dx = \lim_{n\to\infty} n^3\int_0^1 (x^n - x^{n+1})dx$$

$$= \lim_{n\to\infty} n^3\left(\frac{x^{n+1}}{n+1} - \frac{x^{n+2}}{n+2}\right)\Bigg|_{x=0}^{x=1} = \lim_{n\to\infty}\frac{n^3}{(n+1)(n+2)} = \infty \;\lightning$$

$\therefore f_n \not\xrightarrow{d} f$

④ $g_n(x) = \frac{x^n}{n}$ fonksiyon dizisi olsun

a) (g_n) dizisinin $[0,1)$ aralığında düzgün yakınsak olduğu g fonksiyonunu bulunuz. $g'(x)=?$

b) (g_n') fonksiyon dizisinin $[0,1]$ aralığında yakınsak olduğunu gösteriniz. Bu yakınsama düzgün müdür?

$g_n \xrightarrow{n} g = ?$ $\quad \lim_{n\to\infty}\frac{x^n}{n} \begin{cases} \xrightarrow{x=0} 0 \\ \xrightarrow{x=1} 0. \\ \xrightarrow{x\in(0,1)} 0. \end{cases}$

$g(x)=0$, $g_n \xrightarrow{n} 0$

$\varepsilon > 0$, $\exists N(\varepsilon)$, $n \geq N$ $|g_n - 0| = \left| \frac{x^n}{n} - 0 \right| = \frac{x^n}{n} < \frac{1}{n} < \frac{1}{N} = \varepsilon$

$g_n \xrightarrow{d} 0$

$g(x)=0 \Rightarrow g'(x) = 0$

b) $g_n'(x) = \frac{n \cdot x^{n-1}}{n} = x^{n-1}$, $x \in [0,1]$

$$\lim_{n\to\infty} g_n'(x) = \lim_{n\to\infty} x^{n-1} \begin{array}{l} \xrightarrow{x=0} 0 \\ \xrightarrow{x=1} 1 \\ \xrightarrow{x\in(0,1)} 0 \end{array}$$

$$g_n'(x) \xrightarrow{n} h(x) = \begin{cases} 0, & x \in [0,1] \\ 1 & x = 1 \end{cases}$$

YOL I: $h(x)$ sürekli olmadığından $g_n' \not\xrightarrow{d} h$

YOL II: $g_n' \xrightarrow{d} h$ olsaydı, $h = g'$ olmalıydı ↯

O halde $g_n' \not\xrightarrow{d} h$

⑤ f fonksiyonu $[0,1]$ aralığında sürekli ve $\int_0^1 f(x) \cdot x^n dx = 0$ $(n = 0, 1, \dots)$ ise $f(x) = 0$ $(x \in [0,1])$ olduğunu gösteriniz.

* $[a,b]$ kapalı aralığında tanımlı, gerçel değerli ve sürekli her fonksiyon uygun bir gerçel katsayılı polinomlar dizinin düzgün yakınsak limitidir. Yani, f, $\exists f_n$, $f_n \xrightarrow{d} f$

$f(x) = 0$ olduğunu göstermek için $\int f^2(x)\,dx = 0$ olduğunu gösterelim. Weierstrass yaklaşım teoreminden $\exists f_n$, $f_n \xrightarrow{d} f$

$f_n(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n$

$$\int_0^1 f^2(x)\,dx = \int_0^1 f(x) \left[\lim_{n\to\infty} f_n(x) \right] dx = \int_0^1 \left(\lim_{n\to\infty} f(x) f_n(x) \right) dx$$

$$\overset{*}{=} \lim_{n\to\infty} \int_0^1 f(x) f_n(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \int_0^1 f(x)(a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n)\,dx$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left[\int_0^1 f(x) a_0\,dx + \int_0^1 f(x)\, a_1(x)\,dx + \dots + \int_0^1 f(x) a_n\, x^n\,dx \right] = 0$$

$* \; f(x) f_n(x) \xrightarrow{d} f^2(x)$

f fonksiyonu kompakt $[0,1]$ kümesi üzerinde sürekli olduğundan sınırlıdır. Yani $\exists M > 0$, $|f(x)| \leq M$ $(\forall x)$

$\varepsilon > 0$ alalım. $\exists N$, $n \geq N$ $|f(x) f_n(x) - f^2(x)| = |f(x)| . |f_n(x) - f(x)|$

$\Big($ $f_n \xrightarrow{d} f$ için $\varepsilon / M > 0$ sayısı için $\exists N$, $n \geq N$

$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon / M \Big)$

$\leq \cancel{M} . \frac{\varepsilon}{\cancel{M}} = \varepsilon .$

9 Mayıs 2017

Mutlak Yakınsak: Eğer $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ serisi yakınsak ise $\sum a_n$ serisine mutlak yakınsaktır denir.

Mutlak yakınsak $\underset{\not\Leftarrow}{\Rightarrow}$ Yakınsak

$(-1)^n . \frac{1}{n}$

Alterne Seri Testi: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n . a_n$ alterne seri denir.

$$\left.\begin{array}{l} 1)\ a_n \geq 0 \\ 2)\ a_n \searrow \\ 3)\ \lim\limits_{n \to \infty} a_n = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \text{Yakınsak}$$

ÖR: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n . \frac{1}{n}$, $a_n = \frac{1}{n} \downarrow \xrightarrow{n \to \infty} 0 \Rightarrow$ Yakınsak.

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left| (-1)^n . \frac{1}{n} \right| = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \rightarrow$ Harmonik seri , Iraksak.

Tanım: Yakınsak olup mutlak yakınsak olmayan seriye koşullu yakınsak seri denir.

Pozitif (≥ 0) Terimli Seriler

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ serisinde her $n \in \mathbb{N}$ için $a_n \geq 0$

ÖR: $a_n = \frac{a_{n-1}}{3} + 1$, $a_1 = 1$

$a_n = \left\{ 1, \frac{1}{3}, \frac{13}{9}, \frac{111}{27}, \ldots \right\}$

$S = \frac{S}{3} + 1 \Rightarrow \frac{2S}{3} = 1$

$\Rightarrow S = \frac{3}{2}$

$a_2 > a_1$ i) $a_1 < 100$

$a_{k+1} > a_k$ olsun. ii) $a_k < 100$ olsun

$a_{k+2} > a_{k+1}$ (?) iii) $a_{k+1} < 100$ (?) $\Rightarrow$ limit var.

* Yakınsak $\Leftrightarrow$ lim S_n var olmasıdır.

$S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n \longrightarrow S_n$ artan dizi.

$\Leftrightarrow$ (S_n) üstten sınırlıdır.

$\Leftrightarrow$ $\sup\{S_n\}$ var.

İntegral Test:

$f: \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$ $f(x) \geq 0$, $[a, \infty)$ ve $f(x)$ azalan.

$n \longmapsto f(n) = a_n$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \sum_{n=100}^{\infty}$$

$$\text{Seri} = 1 + \frac{4}{3} + \frac{7}{5} + \underbrace{\frac{8}{9} + \frac{8}{10} + \frac{8}{11}}_{\text{azalan.}} + \dots$$

$$\sum_{n=4}^{\infty} (a_n)$$

$$\int_a^{\infty} f(x)dx \text{ yakınsak} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ yakınsak}$$

" ıraksak $\Rightarrow$ " ıraksak.

ÖR: Harmonik seri ıraksaktır.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}, \quad f(x) = \frac{1}{x}, \quad [1, \infty)$$

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x} dx = \lim_{\alpha \to \infty} \int_1^{\alpha} \frac{dx}{x} = \lim_{\alpha \to \infty} \ln x \Big|_1^{\infty} = \lim_{\alpha \to \infty} \ln \alpha = \infty \to \text{ıraksak.}$$

P-Test: $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} = \begin{cases} \text{Yakınsak}, & p > 1 \\ \text{Iraksak}, & p \leq 1 \end{cases}$$

$f(x) = \frac{1}{x^p}$, $p = 1$, $f(x) = \frac{1}{x}$ ıraksak

$p < 0$, $f(x) = x^{-p}$ ıraksak

$p = 0$ ıraksak

$p > 0$ $f(x) = \frac{1}{x^p}$

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^p}\,dx = \lim_{\alpha\to\infty}\int_1^{\infty}\frac{1}{x^p}\,dx = \lim_{\alpha\to\infty}\frac{x^{1-p}}{1-p}\Bigg|_1^{\alpha} = \lim_{\alpha\to\infty}\frac{x^{1-p}}{1-p}\Bigg|_1^{\alpha}$$

$$= \lim_{\alpha\to\infty}\frac{\alpha^{1-p}}{1-p} - \frac{1}{1-p} \Rightarrow \begin{array}{ll} 1-p<0 & \text{yakınsak} \\ 1-p>0 & \text{ıraksak} \end{array}$$

Karşılaştırma Testi: $\sum a_n$ ve $\sum b_n$ pozitif serileri o.ü

$\forall n\in\mathbb{N}$ için $a_n \le b_n$ olsun. $\left(\sum a_n \le \sum b_n\right)$

1) Eğer $\sum b_n$ yakınsak $\Rightarrow \sum a_n$ yakınsak

2) Eğer $\sum a_n$ ıraksak $\Rightarrow \sum b_n$ ıraksak

ÖR: $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n}\right)$

$n^2>n$, $\underbrace{\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^2}} \le \frac{1}{n^2}+\frac{1}{n} \le \underbrace{\frac{1}{n}+\frac{1}{n}}$

$$\underset{\text{yakınsak}}{\underset{\downarrow}{\frac{2}{n^2}}} \le \frac{1}{n}+\frac{1}{n^2} \le \underset{\text{ıraksak}}{\underset{\downarrow}{\frac{2}{n}}} \rightarrow \text{kullanamam}$$

$$* \;\underset{\text{ıraksak}}{\underset{\downarrow}{\frac{1}{n}}} \le \underset{\text{ıraksak}}{\underset{\downarrow}{\frac{1}{n}}}+\frac{1}{n^2}$$

Limit Karşılaştırma Testi:

$\sum a_n$ ve $\sum b_n$ pozitif seriler ve $\forall n\in\mathbb{N}$ için $b_n>0$

o.ü $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=L$ olsun.

1) $L=0$ ve $\sum b_n$ yakınsak $\Rightarrow \sum a_n$ yakınsak
$(a_n\le b_n)$

2) $L=\infty$ ve $\sum b_n$ ıraksak $\Rightarrow \sum a_n$ ıraksak
$(b_n\le a_n)$

3) $0<L<\infty$ karakterleri aynıdır

$\forall\varepsilon>0$, $\exists N: \forall n>N$ için $\left|\frac{a_n}{b_n}-L\right|<\varepsilon$.

$\left|\frac{a_n}{b_n}-L\right|<\varepsilon \Rightarrow L-\varepsilon<\frac{a_n}{b_n}<L+\varepsilon \Rightarrow (L-\varepsilon)b_n<a_n<(L+\varepsilon)b_n$

ÖR: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n^2}$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \longrightarrow$ ıraksak

$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{n+1}{n^2}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2+n}{n^2} = 1 \Rightarrow$ limit karsılastırma testinden ıraksak

Eğer $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ alırsak (yakınsak), $\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{n+1}{n^2}}{\frac{1}{n^2}} = \infty \Rightarrow$ limit karsılastırma testinden calısmaz

Teorem: (a_n) ve (b_n) pozitif terimli diziler o.ü (a_n) sınırlı olsun. $\sum(b_n)$ yakınsak ise $\sum a_n . b_n$ yakınsaktır

İspat: $\exists N \in \mathbb{R}_+$ öyle ki $\forall n \in \mathbb{N}$ için $0 < a_n \leq M \Rightarrow 0 \leq a_n b_n \leq M . b_n$

Eğer $\sum b_n$ yakınsak $\Rightarrow \sum M . b_n = M \sum b_n$ yakınsak

Karsılastırma testinden $\sum a_n . b_n$ yakınsak

Oran Testi (D' Alembert):

$\sum a_n$ pozitif terimli $(\forall n \in \mathbb{N}, a_n > 0)$ o.ü,
(seri ve $\forall n \in \mathbb{N}$ $a_n \neq 0$)

$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = L$, $\left(\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = L \right)$

1) $L < 1$ yakınsak (mutlak yakınsak)

2) $L > 1$ ıraksak

3) $L = 1 \Rightarrow$ test calısmaz

$\forall \varepsilon > 0$, $\exists N$ öyle ki $\forall n > N$ için $\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} - L \right| < \varepsilon$.

$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} - L \right| < \varepsilon \Rightarrow L - \varepsilon < \frac{a_{n+1}}{a_n} < L + \varepsilon \Rightarrow (L-\varepsilon) a_n < a_{n+1} < (L+\varepsilon) . a_n$ $\forall n > N$

$S_n = a_{N+1} + a_{N+2} + \dots + a_{N+n}$

$n = N+1$, $(L-\varepsilon) . a_{N+1} < a_{N+2} < (L+\varepsilon) a_{N+1}$

$(L-\varepsilon)^2 a_{N+1} < (L-\varepsilon) a_{N+2} < a_{N+3} < (L+\varepsilon) a_{N+2} < (L+\varepsilon)^2 a_{N+1}$

$a_{N+1} + (L-\varepsilon) a_{N+1} + (L-\varepsilon)^2 a_{N+1} + \dots + (L-\varepsilon)^{n-1} a_{N+1} < S_n < a_{N+1} + (L+\varepsilon) a_{N+1} + \dots$
$+ (L+\varepsilon)^{n-1} a_{N+1}$

$$\underbrace{a_{N+1} \left(1 + (L-\varepsilon) + \dots + (L-\varepsilon)^{n-1}\right)}_{L > 1 \Rightarrow \text{ıraksak (Geo. seri)}} < S_n < \underbrace{\left(1 + (L+\varepsilon) + \dots + (L+\varepsilon)^{n-1}\right)}_{L < 1 \Rightarrow \text{yakınsak (Geo. seri)}}$$

Kök Testi:

$\sum a_n$ pozitif terimli seri o.ü $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = L$ olsun.
(seri olsun.) $\left(\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = L\right)$

1) $L<1$ yakınsak

2) $L>1$ ıraksak

3) $L=1$ test çalışmaz.

ÖR: $\sum_{n=1}^{\infty} n \left(\frac{n-1}{2n+1}\right)^n$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} \cdot \frac{n-1}{2n+1} = 1 \; \frac{1}{2} = \frac{1}{2} < 1$$

$$\ln\left(\lim_{n\to\infty} n^{1/n}\right) = (\infty^0) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \cdot \ln n \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = 0 \Rightarrow \lim n^{1/n} = e^0 = 1$$

Kök testinden yakınsak.

Betül

ÖR: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!}$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{n^n} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

"Bet"

$$= e^{\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \cdot n} = e^1 = e > 1 \Rightarrow \text{Iraksak.}$$

10 Mayıs 2017

Kummer Testi: $\sum a_n$ pozitif terimli bir seri ve (p_n) 'de $\lim_{n\to\infty}\left(p_n \frac{a_n}{a_{n+1}} - p_{n+1}\right) = K$ koşulunu sağlayacak şekilde seçilmiş bir dizi olsun.

i) $K<0$ ve $\sum \frac{1}{p_n}$ serisi ıraksak $\Rightarrow$ seri ıraksaktır.

ii) $K>0 \Rightarrow$ yakınsak.

$\left[p_n = n, \; \sum \frac{1}{p_n}, \; \sum \frac{1}{n}\right]$

Raabe Testi: $p_n = n$ al ve $\sum a_n$ pozitif terimli seri olsun.

$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) n = K$ limiti için;

1) $K < -1 \Rightarrow$ ıraksak

2) $K > -1 \Rightarrow$ yakınsak.

$p_n = n$

$$\lim_{n\to\infty}\left(n\,\frac{a_n}{a_{n+1}} - (n+1)\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(n\,\frac{a_n}{a_{n+1}} - n - 1\right)$$

$$= \left(\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right)n\right) - 1 = K$$

$$\Rightarrow \lim\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right)n = K+1 \quad > 0 \quad (K > -1 \Rightarrow \text{yakınsak})$$

$$< 0 \quad (K < -1 \Rightarrow \text{ıraksak})$$

ÖR: $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2.4.6\ldots(2n)}$

Oran Testi: $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(2n+1)}{(2n+2)} = 1$. Test çalışmaz

$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1}$ serisi ile LKT $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} a_n . n+1 \quad (0.\infty)$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n+2}{2n+1} - 1\right)n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2n+1}\right)n = \frac{1}{2}, \text{ yakınsak}$$

ÖR: $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{(\alpha+1)(\alpha+2)\ldots(\alpha+n)}, \ \alpha > 0$

Oran Testi: $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n+\alpha+1} = 1$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right)n$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+\alpha+1}{n+1} - 1\right)n$$

$$= \lim_{n\to\infty} \alpha\,\frac{n}{n+1} = \alpha.$$

Abel Kriteri: (a_n) ve (b_n) dizileri icin

1) $\sum b_n$ yakınsak

2) a_n monoton ve sınırlı ise

$\Rightarrow \sum a_n b_n$ yakınsaktır.

UYARI: $\sum (-1)^n \cdot \frac{1}{n}$ yakınsak

$$\sum \frac{1}{n} = \sum \underbrace{(-1)^n}_{\substack{a_n \\ \downarrow \\ \text{sınırlı}}} \cdot \underbrace{\frac{(-1)^n}{n}}_{\substack{b_n \\ \downarrow \\ \text{yakınsak}}} \quad , \text{ ıraksak.}$$

(a_n) monoton olmadığı için Abel kriteri uygulanamaz.

ÖR: $$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\cos\left(\frac{\pi n^2}{n+1}\right)}{\ln^2 n}$$

$$0 \le \left| \frac{\cos\left(\frac{\pi n^2}{n+1}\right)}{\ln^2 n} \right| \le \frac{1}{\ln^2 n} \le \frac{1}{n^2}$$

↳ p-test yakınsak

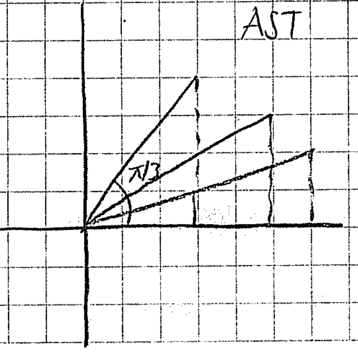
mutlak yakınsak KT'den.

$$\cos\left(\frac{\pi n^2}{n+1}\right) = (-1)^n \cos\left(\frac{\pi n^2}{n+1} - \pi n\right) = (-1)^n \cos\left(\frac{-\pi n}{n+1}\right)$$
$$= (-1)^n \cos\left(\frac{\pi n}{n+1}\right)$$
$$= (-1)^{n-1} \cos\left(\frac{\pi}{n+1}\right) \; ?$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\cos\left(\frac{\pi n^2}{n+1}\right)}{\ln^2 n} = \sum_{n=2}^{\infty} \underbrace{\frac{(-1)^{n-1}}{\ln^2 n}}_{b_n} \underbrace{\cos\left(\frac{\pi}{n+1}\right)}_{a_n}$$

AST yakınsak sınırlı

artan AK'den yakınsak.



Dirichlet Kriteri: (a_n) ve (b_n) dizileri için $S_n = b_1 + \dots + b_n$ olsun.

i) S_n sınırlı

ii) a_n azalarak sıfıra yakınsıyor ise $\sum a_n b_n$ yakınsaktır.

ÖR: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \cos nx \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

$nx = 2k\pi \quad , n \in \mathbb{Z}$

$x = 2\pi$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{(\cos nx)}_{b_n} . \underbrace{\frac{1}{n}}_{a_n}$$

ii) $\lim_{n\to\infty} a_n = 0 \searrow$

i) $S_n = \sum_{k=1}^{n} \cos(kx) \quad , x \in \mathbb{R} \setminus \{2m\pi \, ; m \in \mathbb{Z}\}$

$$0 \le |S_n| = \left| \frac{\cos\left(\left(\frac{n+1}{2}\right)x\right) \sin\frac{n}{2}.x}{\sin\frac{x}{2}} \right| \le \frac{1}{\left|\sin\frac{x}{2}\right|}$$

sınırlı (noktasal)

$\Rightarrow \sum \frac{1}{n} \cos nx$ yakınsaktır.

Fonksiyon Serileri

(f_n) fonksiyon dizisi $A \subset \mathbb{R}^n$ üzerinde tanımlı bir dizi o.ü. $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ serisine fonksiyon serisi denir.

$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ yakınsak ⇔ $\lim s_n$ L var

ıraksak yok veya $\mp\infty$

$S_n(x) = (f_1 + \dots + f_n)(x)$

$= f_1(x) + \dots + f_n(x)$

Kısmi toplamlar dizisi: (S_n) A üzerinde tanımlı bir fonksiyon dizisi olur.

Tanım: Eğer (s_n) noktasal yakınsak ise $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ fonk serisi noktasal yakınsak ve eğer (S_n) düzgün yakınsak ise $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ fonksiyon serisi düzgün yakınsaktır.

ÖR: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{((n-1)x+1)(nx+1)}$ $(0,\infty)$ aralığındaki yakınsaklığını inceleyiniz.

$$f_n : (0,\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto \frac{x}{((n-1)x+1)(nx+1)}$$

$$S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} f_k(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{x}{((k-1)x+1)(kx+1)} = \sum \left(-\frac{1}{kx+1} + \frac{1}{(k-1)x+1}\right)$$

$$= \frac{x}{x+1} + \frac{x}{(x+1)(2x+1)} + \frac{x}{(2x+1)(3x+1)} + \dots + \frac{x}{((k-1)x+1)(kx+1)}$$

$$= 1 - \cancel{\frac{1}{x+1}} + \cancel{\frac{1}{x+1}} - \cancel{\frac{1}{2x+1}} + \dots + \cancel{\frac{1}{(n-1)x+1}} - \frac{1}{nx+1}$$

$$= 1 - \frac{1}{nx+1} \quad (0,\infty)$$

$S_n \xrightarrow{n} ?$

$$\lim_{n\to\infty} S_n(x) = \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{nx+1}\right) = 1$$

a) Noktasal Yakınsadığını ispatlayınız.

b) $S_n \xrightarrow{d} 1$?

$$C_n := \sup_{0<x<+\infty} |S_n(x) - 1|$$

$$= \sup_{x\in(0,\infty)} \left|\cancel{1} - \frac{1}{nx+1} - \cancel{1}\right|$$

$$= \sup_{x\in(0,\infty)} \frac{1}{nx+1}$$

$$h(x) = \frac{1}{nx+1}$$

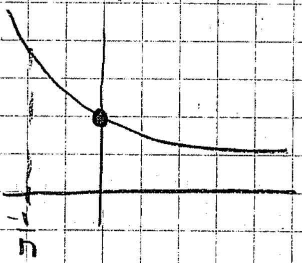
$$\lim_{x\to\infty} h(x) = 0.$$

$h'(x) = \frac{-n}{(nx+1)^2}$

KN YOK

TN $x = -\frac{1}{n}$

x		$-1/n$		0	
$h'(x)$				0	$-$
$h(x)$					$\searrow$



$C_n := \sup_{x \in (0,\infty)} | s_n(x) - 1 | = 1 \not\to 0$

$S_n \overset{d}{\not\to} 1$

fonk seri $\forall x \in (0,1)$

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{((n-1)x+1)(nx+1)} = 1$, 1'e noktasal yakınsar fakat düzgün yakınsamaz.

ÖR: $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{x^n}{n} - \frac{x^{n+1}}{n+1} \right)$

$f_n(x) = \left(\frac{x^n}{n} - \frac{x^{n+1}}{n+1} \right)$

$S_n(x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + \cdots + \frac{x^n}{n} - \frac{x^{n+1}}{n+1}$

$= x - \frac{x^{n+1}}{n+1}$

$\lim_{n\to\infty} S_n(x) = \lim_{n\to\infty} x - \frac{x^{n+1}}{n+1}$ $|x| \leq 1$

$= x = s(x)$ noktasal yakınsak.

$C_n := \max_{[-1,1]} |s_n(x) - s(x)| = \max_{x\in[-1,1]} \left| x - \frac{x^{n+1}}{n+1} - x \right|$

$= \max_{-1 \leq x \leq 1} \frac{|x|^{n+1}}{n+1} \leq \frac{1}{n+1}$

$C_n \to 0 \Leftrightarrow S_n(x) \xrightarrow{d} x = s(x)$

UYGULAMA (12 Mayıs 2017)

EŞ-SÜREKLİLİK VE ARZELA-ASCOLİ TEOREMİ

$\mathcal{C}(A) = \{ f : f : A \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R},\ \text{sürekli},\ A \text{ kompakt} \}$

$\|f\| = \sup_{x \in A} |f(x)|$

$\mathcal{B} \subseteq \mathcal{C}(A)$ olsun. $\forall x \in A$, $\forall f \in \mathcal{B}$ $|f(x)| \leq M$ o.s. $M > 0$ varsa, $\mathcal{B}$ düzgün sınırlı denir.

Tanım: $\forall \varepsilon > 0$, $\exists f(\varepsilon) > 0$, $\|x-y\| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$ $(\forall f \in \mathcal{B})$ koşulu sağlanıyorsa $\mathcal{B}$'ye eşsürekli denir.

Arzela-Ascoli: $A \subseteq \mathbb{R}^n$ kompakt ve $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{C}(A)$. Eğer $\mathcal{B}$ düzgün sınırlı ve eşsürekli ise $\mathcal{B}$'deki herhangi bir dizinin düzgün yakınsak bir alt dizisi vardır.

<u>ÖR:</u> $f_n : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ sürekli fonk'lar, $|f_n(x)| \leq 100$ $(\forall n, \forall x \in [0,1])$ ve $f_n'(x)$ türevi var ve $(0,1)$'de düzgün sınırlı olsun.

a) $\forall x, y \in [0,1]$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $|f_n(x) - f_n(y)| \leq M|x-y|$ o.s. $M > 0$ olduğunu gösteriniz.

→ f_n'ler $(0,1)$ aralığında türevlenebilir, $[0,1]$ aralığında sürekli olduğundan Ortalama Değer Teoremi'nden

$$\exists c \in (0,1) \quad \left| \frac{f_n(x) - f_n(y)}{x-y} \right| = |f'(c)| \leq M$$

Ayrıca varsayımdan $\exists M > 0$; $|f_n'(x)| \leq M$ $(\forall n, \forall x \in (0,1))$

$$\Rightarrow |f_n(x) - f_n(y)| \leq M|x-y|$$

b) (f_n) dizisinin düzgün yakınsak bir alt dizisinin olduğunu gösteriniz.

→ $\mathcal{B} = \{ f_n : n \in \mathbb{N} \}$

<u>Amaç:</u> $\mathcal{B}$ düzgün sınırlı ve eş süreklidir.

Üstünde n varsa kök testi! Ör $\frac{1}{2}^n$

$\|f_n\| = \sup_{x\in[0,1]} |f_n(x)| \leq 100$ $(\forall x, \forall n)$ old. $\mathcal{B}$ düzgün sınırlıdır. $\varepsilon > 0$ alalım, $\delta = \varepsilon / M$ için $|x-y| < \delta \Rightarrow |f_n(x) - f_n(y)| \leq M|x-y| < M\delta = M\varepsilon/M = \varepsilon$.

KUVVET SERİLERİ

Tanım: $\forall n$, $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ ve $x_0 \in \mathbb{R}$ o.ü $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$ serisine x_0 merkezli kuvvet serisi denir.

Teorem: $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$ kuvvet serisi,

$$R = \frac{1}{\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}}$$ tanımlayalım. Burada $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = 0 \Rightarrow R = \mp\infty$

$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \infty \Rightarrow R = 0$

Bu durumda kuvvet serisi,

1) $(x_0 - R, x_0 + R) = \{x : |x - x_0| < R\}$'de yakınsaktır.

2) $\{x : |x - x_0| > R\}$'de ıraksaktır.

3) $x = x_0 - R$ ve $x = x_0 + R$ noktası özel olarak incelenir.

Tanım: $R = \frac{1}{\lim \sqrt[n]{|a_n|}}$ = yakınsaklık yarıçapı

$(x_0 - R, x_0 + R)$ = yakınsaklık aralığı

NOT: Oran Testi kullanıldığında yakınsaklık yarıçapı

$$R = \frac{1}{\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|}$$ olarak bulunur.

ÖR: $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+1)^n}{2^n}$ yakınsaklık yarıçapını ve aralığını bulalım.

$$R = \frac{1}{\lim_{n\to\infty} \left| \frac{\frac{1}{2}^{n+1}}{\frac{1}{2}^n} \right|} = \frac{\frac{1}{1}}{\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|} = 2$$

$a_n = \frac{1}{2^n}$

Yakınsak her dizinin kuyruğu sıfıra gider.

$|x+1| < 2$

$\underset{=}{-3} \leq x \leq \underset{=}{1}$ ✓

$x=-3$: $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n$, ıraksak $\left(\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0 \Rightarrow \sum a_n \text{ ıraksak}\right)$

$x=1$: $\sum_{n=0}^{\infty} \underset{a_n}{\underline{\underline{1}}}$, ıraksak $\left(\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0\right)$

Yakınsaklık aralığı : $(-3, 1)$

1) $f_n : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f_n(x) = \frac{x^2}{(1+x^2)^n}$ $n=1,2,\ldots$ sürekli fonksiyonların bir dizisi olsun.

$\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ serisinin noktasal yakınsak olduğunu gösteriniz.

r^n geo. seri

$$\longrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^2}{(1+x^2)^n} = x^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(1+x^2)^n} = x^2 \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{1+x^2}\right)^n$$

$$= x^2 \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{1+x^2}} = 1+x^2 \quad (x \neq 0)$$

$x=0 \Rightarrow \sum f_n(x) = 0$

$$\Rightarrow \sum f_n(x) \longrightarrow f(x) = \begin{cases} 1+x^2 & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

2) $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \overset{g_n(x)}{\boxed{\frac{x^{n/2}}{n.(n!)^2}}}$ $\quad 0 \leq x \leq 1$ f'nin sürekli olduğunu gösteriniz.

Amaç: $S_n \xrightarrow{d} f$

$$|S_n(x) - f(x)| = \left| \sum_{k=1}^{n} g_k(x) - \sum_{n=1}^{\infty} g(k) \right|$$

$$= \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{x^{k/2}}{k(k!)^2} \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k(k!)^2} \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k^3} \longrightarrow 0 \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^3}$$ yakınsal

bir dizidir ve yakınsak dizilerin kuyruğu sıfıra gider.

8) Abel-Düzgün Yakınsaklık Kriteri:

(f_n) ve (g_n) fonksiyon dizileri $D \subseteq \mathbb{R}$ üzerinde tanımlı ve,

- $\forall x \in D$ için $(f_n(x))$ monoton
- $\exists M > 0$, $\forall x \in D$ ve $\forall n$, $|f_n(x)| \le M$
- $\sum g_n(x)$ D üzerinde düzgün yakınsak ise $\sum f_n(x) g_n(x)$

D üzerinde düzgün yakınsar.

* Dirichlet Kriteri: $\sum f_n$ fonksiyon serisi D üzerinde tanımlı fonksiyonların serisi ve (g_n) negatif olmayan fonksiyonlar dizisi olsun. Eğer $s_n = \sum_{k=1}^{n} f_k$ düzgün sınırlı, $g_{n+1}(x) \le g_n(x)$ ve $g_n \xrightarrow{d} 0$ ise $\sum f_n g_n$ fonksiyon serisi D üzerinde düzgün yakınsaktır.

ÖR1 a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot x^n}{n}$ $\quad 0 \le x \le 1$

$g_n(x) = \frac{(-1)^n}{n} \qquad f_n(x) = x^n$

$\sum g_n(x) = \sum \frac{(-1)^n}{n}$ → Alterne seri testinden yakınsak noktadan bağımsız olduğu için düzgün yakınsaktır.

$f_{n+1} \le f_n$ sağlanır.

$|f_n(x)| \le 1 \quad \forall n, \forall x$

Abel testinden $\sum f_n g_n$ düzgün yakınsaktır.

b) $0 < \delta < 2\pi$ o.ü $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}$ fonk. serisinin $[\delta, 2\pi\delta]$ aralığında düzgün yakınsak old. gösteriniz.

$g_n = \frac{1}{n} \qquad f_n = \sin nx$

- $g_n \xrightarrow{d} 0$, $g_{n+1} = \frac{1}{n+1} \le \frac{1}{n} = g(n)$
- $g_n = \frac{1}{n} > 0$

Amaç: $S_n(x) = \sum_{k=1}^{n}{}' f_k(x)$ düzgün sınırlıdır

$\exists M > 0, \quad |S_n(x)| < M, \quad \forall n, \forall x$

$2 \sin kx . \sin \frac{x}{2} = \cos\left[(k - 1/2)x\right] - \cos\left[(k + 1/2)x\right]$

$$\Downarrow \sum_{k=1}^{n} \qquad \qquad \qquad \Downarrow$$

$\left| 2 . \sin\frac{x}{2} \underbrace{(\sin x + \cdots + \sin nx)} \right| = \left| \cos\frac{x}{2} - \cos\left(n + \frac{1}{2}\right)x \right| \leq \left|\cos\frac{x}{2}\right| + \left|\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)\right| \leq 2$

$|S_n(x)| = |\sin x + \cdots + \sin nx| \leq \frac{1}{\sin\frac{x}{2}}$

($h(x) = \sin\frac{x}{2}$, $[\delta, 2\pi - \delta]$, mutlak minimum değeri olan m alır. $m \leq \sin\frac{x}{2}$ $(\forall x)$)

$S_n(x)$ düzgün sınırlıdır. Dirichlet kriterinden $\sum f_n g_n$ düzgün yakınsaktır

16 Mayıs 2017

$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ I aralığında noktasal y. / düzgün y. $\Leftrightarrow$ $\lim s_n(x)$ n.y. / d.y. $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow c_n = \sup_{x\in I} |s_n(x) - s(x)| \to 0$

$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x$, IR.

$f_n(x) = \frac{x^n}{n!}$, IR.

$\sum f_n(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ $IR \xrightarrow[d.y]{} e^x$

Örnek) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{2^n}$

$$s_n(x) = f_0(x) + \dots + f_{n-1}(x)$$

$$= 1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{2} + \dots + \left(\frac{x}{2}\right)^{n-1}$$ → geometrik seri

$$= \frac{1-\left(\frac{x}{2}\right)^n}{1-\frac{x}{2}} \quad , \quad \frac{x}{2} \neq 1$$

$$\lim_{n\to\infty} s_n(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{1-\left(\frac{x}{2}\right)^n}{1-\frac{x}{2}}$$ $\left|\frac{x}{2}\right| < 1$ ise yakınsak.

$|x| < 2$.

$$= \frac{1}{1-\frac{x}{2}} = \frac{2}{2-x}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{2^n} = \frac{2}{2-x} \quad |x|<2.$$
(noktasal)

$$c_n = \sup_{x\in(-2,2)} |s_n(x) - s(x)|$$

$$= \sup_{-2<x<2} \left| \frac{1}{1-\frac{x}{2}} - \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^n}{1-\frac{x}{2}} - \frac{1}{1-\frac{x}{2}} \right|$$

$$= \sup_{-2<x<2} \underbrace{\left| \frac{2x^n}{(2-x)2^n} \right|}_{h(x)} = 0 \longrightarrow 0$$

$$h'(x) = \frac{1}{2^{n-1}}\left[\frac{nx^{n-1}(2-x)+x^n}{(2-x)^2}\right]$$

$$= \frac{1}{2^{n-1}}\left[\frac{2nx^{n-1}-(n-1)x^n}{(2-x)^2}\right]$$

$$= \frac{1}{2^{n-1}} \cdot \frac{1}{(2-x)^2} \, x^{n-1}(2n-(n-1)x) = 0$$

$x = 0$ veya $\cancel{x = \frac{2n}{n-1}}$ $\quad \frac{2n}{n-1} > \frac{2n-2}{n-1} \geq 2$

$\Rightarrow$ tanım aralığında değil.

X		-2		0		2	
h'(x)	//		+	0	−		//
h(x)	//		↗	0	↘		//

$h(0) = 0 \longrightarrow 0$ yakınsar.

Cauchy Kriteri:

$I \subseteq \mathbb{R}$ üzerinde tanımlı $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ fonksiyon serisi verilsin.

Verilen $\forall \varepsilon > 0$ icin $\exists N \in \mathbb{N}$ var öyle ki $\forall n, m > N$, $\forall x \in I$ iken $|s_n(x) - s_m(x)| < \varepsilon$ kosulu sağlanıyor ise seriye düzgün Cauchy serisi denir.

Teorem: $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ fonksiyon serisinin I aralığında düzgün yakınsak olması icin gerek ve yeter kosul serinin düzgün Cauchy olmasıdır.

Örnek: $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{2^n}$, $I = (-2, 2)$ üzerinde düzgün Cauchy serisidir. İspatlayınız.

$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{2^n}$ $\quad S_n = \frac{1-\left(\frac{x}{2}\right)^n}{1-\frac{x}{2}}$

Verilen $\varepsilon > 0$, $\exists N$ öyle ki $\forall n, m > N$, $\forall x \in I$

$|Sn(x) - Sm(x)| < \varepsilon \qquad n > m > N \qquad n = m+k$

$$\left| \frac{1-\left(\frac{x}{2}\right)^n}{1-\frac{x}{2}} - \frac{1-\left(\frac{x}{2}\right)^m}{1-\frac{x}{2}} \right| = \left| \frac{1}{1-\frac{x}{2}} \left(\frac{x}{2}\right)^m - \left(\frac{x}{2}\right)^{m+k} \right|$$

$$= \left| \frac{1}{1-\frac{x}{2}} \left(\frac{x}{2}\right)^m \left(1-\left(\frac{x}{2}\right)^k\right) \right| < 2.\left(\frac{|x|}{2}\right)^N$$

$$< 2.\left(\frac{|x|}{2}\right)^N < \varepsilon$$

$$\boxed{\frac{1-\left(\frac{x}{2}\right)^k}{1-\frac{x}{2}}} < 2.$$

Eğer $|r| < 1 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} r^n = 0 \Leftarrow$

$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists N' : \forall n > N'$

$|r|^n < \varepsilon$

Örnek: $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^2}{1+(nx)^2}$

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{\cancel{x^2}}{1+((n+1)x)^2} \cdot \frac{1+(nx)^2}{\cancel{x^2}} \right|$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1+n^2x^2}{1+(n+1)^2x^2} = 1 \quad \text{oran testi çalışmaz.}$$

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) n$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1+n^2x^2-1-(n+1)^2x^2}{1+(n+1)^2x^2} \right).n$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1+n^2x-1-n^2x^2-2nx^2-x^2}{1+(n+1)^2x^2} \right).n$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{-2n^2x^2-nx^2}{1+(n+1)^2x^2} = -2 \quad \text{ıraksak} \quad \forall \mathbb{R}/\{0\}$$

Örnek: $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sum_{n=0}^{\infty} fn(x)$

$$Sn(x) = x + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}$$

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{x^{\cancel{2n+3}}}{(2n+3)!} \cdot \frac{(2n+1)!}{\cancel{x^{2n+1}}} \right| = 0 < 1. \quad \forall x \in \mathbb{R}, \text{ yakınsak}$$

$$e^{x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n}}{n!} \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$e^{-x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-x)^{n}}{n!}$$

$$\frac{e^{x} - e^{-x}}{2} = \frac{1}{2}\left(\sum_{0}^{\infty} \frac{x^{n}}{n!} - \sum_{0}^{\infty} \frac{(-x)^{n}}{n!}\right) = \frac{1}{2}\sum_{0}^{\infty} \frac{(x)^{n} - (-x)^{n}}{n!}$$

$$\overset{\shortparallel}{\sinh x} \qquad = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{2}\,\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

Weierstrass M-Test

$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ fonk. serisi I aralığı üzerinde her $x \in I$ için

$|f_n(x)| < M_n$ koşulunu sağlayan bir $M_n \in \mathbb{R}_+$ sahip

olsun. Eğer $\sum_{n=1}^{\infty} M_n$ serisi yakınsak ise $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$

fonk serisi düzgün yakınsaktır.

İspat: $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N =$ $\forall n,m > N$ $(n > m > N)$ $\forall x \in I$ için

$|S_n(x) - S_m(x)| < \varepsilon.$

$$|s_n(x) - s_m(x)| = |f_1(x) + \cdots + f_n(x) - (f_1(x) + \cdots + f_m(x))|$$

$$= \left|\sum_{m+1}^{n} f_k(x)\right| < \varepsilon \iff \text{seri düzgün yakınsak}$$

$$|S_n(x) - S_m(x)| = \left|\sum_{k=m+1}^{n} f_k(x)\right|$$

$$\leq \sum_{k=m+1}^{n} |f_k(x)|$$

$$\leq \sum_{k=m+1}^{n} M_k < \varepsilon \iff (S_n(x)) \text{ düzgün Cauchy} \iff \text{seri düzgün yakınsak.}$$

$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} M_n \text{ yakınsak}} \iff (s_n) \text{ yakınsak}$$

$$\iff (s_n) \text{ Cauchy}$$

$$\iff \forall \varepsilon > 0,\ \exists N \text{ öyle ki } \forall n > m > N$$

$$|s_n - s_m| = |M_1 + \dots + M_n - (M_1 + \dots + M_n)| = \sum_{m+1}^{n} M_k < \varepsilon .$$

Örnek: $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{x+2^n}$ $\quad (-2, \infty)$

$$|f_n(x)| = \left| \frac{(-1)^n}{x+2^n} \right| = \frac{1}{|x+2^n|} < \frac{1}{2^n-2} = M_n$$

$$-2 < x < \infty$$

$$-2+2^n < x+2^n < \infty$$

$$0 < \frac{1}{x+2^n} < \frac{1}{2^n-2} = M_n$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} M_n = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{2^n-2}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{M_{n+1}}{M_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2^{n+1}-2} \cdot 2^n - 2$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{2^n\left(1 - \frac{2}{2^n}\right)}{2^{n+1}\left(1 - \frac{2}{2^{n+1}}\right)} = \frac{1}{2} < 1, \text{ yakınsak}$$

Örnek: $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\sin nx}{n^2} \right)^2, \ \mathbb{R}$

$$0 \le \left(\frac{\sin nx}{n^2} \right)^2 = \frac{\sin^2 nx}{n^4} \le \frac{1}{n^4} = M_n$$

$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}$ p-test yakınsak

$\Rightarrow$ Weiestrass M-testten seri düzgün yakınsak

17 Mayıs 2017

fn sürekli $\xrightarrow{d} f \Rightarrow f$ sürekli

fn sürekli + I kompakt

Dini: f sürekli $\Rightarrow f_n \xrightarrow{d.y.} f$

$f_n \xrightarrow{n} f$

fn monoton

Dini Teoremi (Seriler): (f_n) fonk dizisi I kompakt aralığında sürekli ve pozitif olmak üzere $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ I üzerinde f(x) sürekli fonksiyonuna noktasal yakınsasın Seri f(x)'e düzgün yakınsar.

İspat: $\sum f_n(x) \Longleftrightarrow (s_n(x))$

ny $\Leftrightarrow$ ny

dy $\Leftrightarrow$ dy

$s_n(x) \xrightarrow{n} f(x)$

f(x) sürekli

fn(x) sürekli $\Rightarrow s_n(x) = f_1(x)+\dots+f_n(x)$ sürekli ↗ monoton

$s_n(x) = (f_1+\dots+f_n)(x) \le s_{n+1}(x) = (f_1+\dots+f_{n+1})(x)$

$\Rightarrow$ Dini Teoremi (diziler için) $s_n(x) \xrightarrow{d.y.} f(x)$

ÖR: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}$, $[0,1]$

$|f_n(x)| = \left|\frac{x^n}{n^2}\right| < \frac{1}{n^2} = M_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ p-test yakınsak

$\Rightarrow$ Seri düzgün yakınsak

Weierstrass M-Test

$f_n(x) = \frac{x^2}{n^2} \geq 0$ $x \in [0,1]$, polinom sürekli

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}$

$\int_0^t 1+x+x^2+x^3+\dots = \sum_0^{\infty} x^n = \int_0^t \frac{1}{1-x}$, $|x|<1$

$$x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\frac{x^4}{4}+\dots\Big|_0^t=-\ln|1-x|\Big|_0^t$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{t^n}{n}=t+\frac{t^2}{2}+\frac{t^3}{3}+\dots=-\ln(1-t)$$

$$\int 1+\frac{t}{2}+\frac{t^2}{3}+\dots=-\frac{1}{t}\ln(1-t)$$

$$x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3^2}+\dots=-\int\frac{\ln(1-t)}{t}\,dt$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n^2}=-\int\frac{\ln(1-t)}{t}\,dt=\frac{1}{2}\ln t\,\ln(1-t)$$

$\ln(1-t)=u$ $\qquad \frac{1}{t}\,dt=dv$

$du=-\frac{dt}{1-t}$ $\qquad v=\ln t$

$$\int\frac{\ln(1-t)}{t}\,dt=\ln(1-t)\ln t+\int\frac{\ln t}{1-t}\,dt$$

$1-t=\alpha \quad dt=-d\alpha$

$1-\alpha=t$

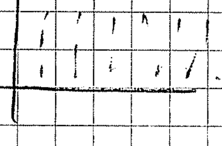
$$-\int\frac{\ln\alpha}{1-\alpha}\,d\alpha=\ln t\,\ln(1-t)+\int\frac{\ln t}{1-t}\,dt$$

$\frac{1}{2}\ln x\,\ln(1-x)=f(x)$ sürekli

$\Rightarrow$ Dini teoreminden düzgün yakınsaktır.

---

f_n $I=(a,b)$ aralığında integrallenebilir fonk'lar olmak üzere $f_n\xrightarrow{d}f$ ise f integrallenebilirdir ve $\int_a^b f(x)\,dx=\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)\,dx$.



$f_n(x)=$ sürekli $[0,1]\xrightarrow{n}f(x)=\begin{cases}1 & x\in\emptyset\cap[0,1]\\ 0 & x\in \text{[illegible]}\cap[0,1]\end{cases}$

int'bilir değil.

Teorem: $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ fonksiyon serisinde f_n'ler $I=(a,b)$ aralığında integrallenebilir fonk'lar o.ü seri $f(x)$ fonk'ına düzgün yakınsasın. f integrallenebilirdir ve

$$\int_a^b f(x)\,dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx$$

İspat: $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = f(x)$ düzgün $\Leftrightarrow S_n(x) = f_1(x) + \dots + f_n(x) \xrightarrow{dy.} f(x$

$S_n(x)$ I üzerinde integrallenebilir

$\Rightarrow f$ integrallenebilirdir.

Ayrıca $\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \int_a^b S_n(x)\,dx$

$$= \lim_{n\to\infty} \int_a^b (f_1(x) + \dots + f_n(x))\,dx$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \int_a^b f_k(x)\,dx = \sum_{k=1}^{\infty} \int_a^b f_k(x)\,dx$$

ÖR: arctanx seri açılımı?

$$\frac{1}{1+x^2} = \frac{d}{dx}\arctan x$$

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n, \quad |x|<1$$

$$|x| = |-x^2| < 1$$

$x = -x^2$ $\Rightarrow |x| < 1.$

$$\frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-x^2)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n}$$

$$\int_0^x \frac{1}{1+t^2}\,dt = \arctan x = \int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n t^{2n}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^x (-1)^n t^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}.$$

(f_n) fonk dizisi I aralığında diff'bilir fonk o.ü

$f_n(x) \xrightarrow{n} f(x)$ ve

$f_n'(x) \xrightarrow{d} g(x)$ ise f fonk diff'bilirdir ve $f'(x)=g(x)$ $\forall x \in I$.

Teorem: $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ fonk serisinde f_n'ler I aralığında diff'bilir fonk'lar o.ü $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ serisi $f(x)$ fonk'u noktasal, $\sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x)$ serisi ise $g(x)$'e düzgün yakınsasın

Böylece f fonk I aralığında diff'bilirdir ve $f'(x)=g(x)$;

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x)$$

İspat: $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = f(x)$ noktasal $\Leftrightarrow S_n(x) = f_1(x) + \cdots + f_n(x) \xrightarrow{n.y.} f(x)$

$\sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x) = g(x)$ düzgün $\Leftrightarrow S_n'(x) = f_1(x)' + \cdots + f_n'(x) \xrightarrow{d.y.} g(x)$

$\Rightarrow f(x)$ diff'bilir ve $f'(x)=g(x)$

ÖR: $\frac{1}{(1-x)^2}$ fonksiyonunun seri açılımını bulunuz

$$g(x) = \frac{1}{(1-x)^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{1-x}\right)$$

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n, \ |x|<1 \Rightarrow g(x) = f'(x) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} x^n\right)'$$

düzgün y.

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (x^n)'$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} n.x^{n-1}$$