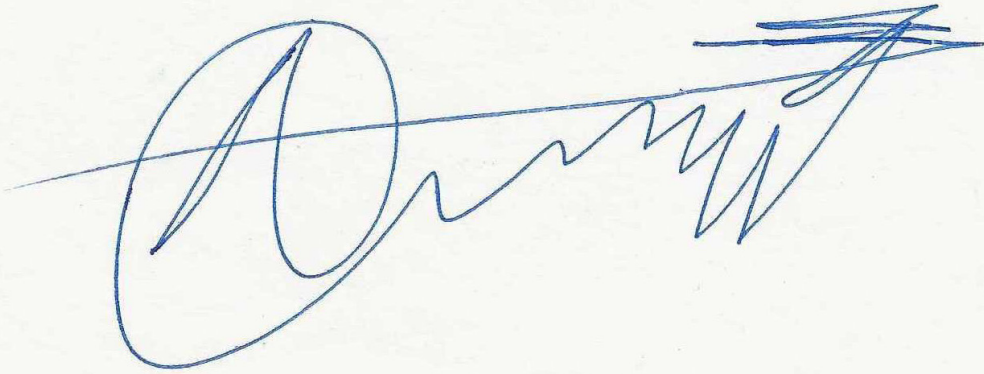


09 Ekim 2019

BEYTEPE / ANKARA

name Süleyman Onur Şahin

KOMPLEKS FONKSİYONLAR
TEORİSİ



Hacettepe Üniversitesi Matematik bölümünde
2019-2020 akademik yılının güz döneminde
Sayın Doç. Dr. Nazife Erkuşun Özcan tarafından
verilen Kompleks Fonksiyonlar Teorisi dersinde tarafımda
kullanılmış olan bu defterin tamamına yakını Nazife Hanımın
dersteki anlatımlarından ve sahneye yazdıklarından oluşmakla
birlikte, bazı bölümlerde Jerrold E. Marsden tarafından
yazılan Basic Complex Analysis (Third Edition) kitabının
tarafımda çevirisi yapılarak ek bilgi olarak deftere eklenmiştir.

Sayın Doç. Dr. Nazife Erkuşun Özcan'a
bu vesileyle, biz lisans öğrencilerine yönelik emeğinden
dolayı teşekkürlerimi sunar, bütün öğrencilere başarılı ve sağlıklı
bir dönem dilerim.

Süleyman Onur Şahin
29.09.2020

Hatalar ve düzeltmeler için: onur@outlook.at

Wir müssen wissen.

Wir werden wissen!

- David Hilbert



Dersin İçeriği

1) Komplek Düzlem ve Elementer Fonksiyonlar

1.1) Kompleks Sayılar

1.2) Kutupsal Gösterim

1.3) Stereografik İzdüşüm

1.4) Elementer Fonksiyonlar

2) Analitik Fonksiyonlar

2.1) Limit ve Süreklilik

2.2) Analitik Fonksiyon Kavramı

2.3) Cauchy - Riemann Denklemleri

2.4) Kompleks Diferansiyel Operatörleri

2.5) Ters Tasvirler

2.6) Harmonik Fonksiyonlar

3) Kompleks İntegrasyon ve Analitiklik

3.1) Kompleks Çizgisel İntegral

3.2) Cauchy - Goursat Teoremi

3.3) Cauchy İntegral Formülü

3.4) Darboux Teoremi

3.5) Liouville Teoremi

3.6) Morera Teoremi

3.7) Analitik Fonksiyonlar için Cebirin Temel Teoremi

3.8) Cauchy Eşsizliği

3.9) Maksimum Prensibi

4) Kuvvet Serileri

4.1) Sonsuz Sayı Serileri

4.2) Yakınsaklık Kriterleri

4.3) Fonksiyon Dizileri ve Serileri

4.4) Kuvvet Serileri

4.5) Analitik Fonksiyonların Kuvvet Serisi Açılımı

4.6) Analitik Fonksiyonların Özel Noktaları

4.7) Singüler Noktaların Sınıflandırılması

4.8) Laurent Serilerinin Açılımı ve Laurent Parçalanışı

5) Rezidü Hesabı

5.1) Rezidü Teoremi

5.2) Belirli İntegral Hesapları

KOMPLEKS SAYILAR

$$\mathbb{C} := \{ z = x + iy \mid x, y \in \mathbb{R}, i^2 = -1 \}$$

şeklinde tanımlanan $\mathbb{C}$ kümesine **kompleks sayılar kümesi** denir.

Burada,

$$x = \operatorname{Re}(z)$$

ve

$$y = \operatorname{Im}(z)$$

olarak tanımlanır.

$\mathbb{C}$ Kümesinin Cebirsel İncelenmesi

Toplama

$z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$ alalım.

i) **Kapalılık Vardır:** $z_1 + z_2 \in \mathbb{C}$

ii) **Birleşme Özelliği Vardır:** $z_1 + (z_2 + z_3) = (z_1 + z_2) + z_3$

iii) **Etkisiz Elemanı Vardır:** $z_1 + e = e + z_1 = z_1$

olacak şekilde $e \in \mathbb{C}$ vardır.

iv) **Her Elemanın Tersisi Vardır:** $z_1 + z_1' = z_1' + z_1 = 0$

olacak şekilde $z_1' \in \mathbb{C}$ vardır.

$\implies (\mathbb{C}, +)$ bir gruptur.

v) Değişme Özelliği Vardır: $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$

→ $(\mathbb{C}, +)$ değişmeli gruptur. (Abel grubudur)

Carpma

$z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$ alalım.

i) Kapalılık Vardır: $z_1 z_2 \in \mathbb{C}$

ii) Birleşme Özelliği Vardır: $z_1 (z_2 z_3) = (z_1 z_2) z_3$

iii) Dağılma Özelliği Vardır: $z_1 (z_2 + z_3) = (z_1 z_2) + (z_1 z_3)$

ve $(z_1 + z_2) z_3 = (z_1 z_3) + (z_2 z_3)$

→ $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ halkadır.

iv) Etkisiz Elemanı Vardır: $z_1 e' = e' z_1 = z_1$

olacak şekilde $e' \in \mathbb{C}$ vardır.

v) Değişme Özelliği Vardır: $z_1 z_2 = z_2 z_1$

→ $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ birimli ve değişmeli halkadır.

vi) Sıfır Bölünürlük Yoktur: $z_1 z_2 = e$ ise $z_1 = e$ veya $z_2 = e$

→ $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ tamlik bölgesidir.

vii) Etkisiz Elemandan Farklı Her Elemanın Tersi Vardır:

$$z_1 z_1'' = z_1'' z_1 = e'$$

→ $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ cisimdir.

Kompleks Sayıların Özellikleri

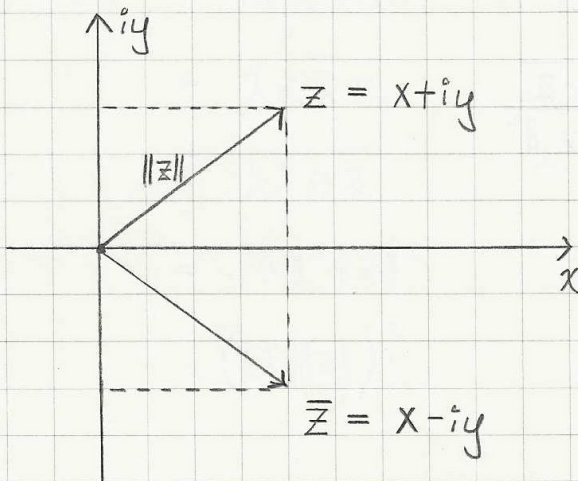
$z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ alalım.

i) $z_1 = z_2 \iff \operatorname{Re}(z_1) = \operatorname{Re}(z_2) \wedge \operatorname{Im}(z_1) = \operatorname{Im}(z_2)$

ii) z kompleks sayısının eşleniği, reel eksene göre simetrisi olan sayıdır ve $\bar{z}$ ile gösterilir.

Yani, $z = x + iy$ ise $\bar{z} = x - iy$ olur.

iii) $\|z\|$ ifadesine z kompleks sayısının **modülü, normu, uzunluğu, boyu** denir. Aynı zamanda $|z|$ şeklinde de gösterilebilir.



$$\|z\| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Eslenik Özellikleri

$$i) \overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$$

$$ii) \overline{z_1 z_2} = \overline{z_1} \overline{z_2}$$

$$iii) \overline{\overline{z}} = z$$

$$iv) \overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}, \quad z_2 \neq 0$$

$$v) \|z\|^2 = z \overline{z}$$

$$vi) \|z\| \geq 0$$

$$vii) \frac{1}{\overline{z}} = \frac{\overline{z}}{z \overline{z}} = \frac{\overline{z}}{\|z\|^2}$$

$$viii) \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}} = \frac{z_1 \overline{z_2}}{z_2 \overline{z_2}} = \frac{z_1 \overline{z_2}}{\|z_2\|^2}$$

$$ix) \|z\| = \|\overline{z}\|$$

(iv) sıkkının incelenmesi

$$\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \overline{\left(\frac{z_1 \overline{z_2}}{z_2 \overline{z_2}}\right)}$$

$$= \frac{\overline{z_1 \overline{z_2}}}{\|z_2\|^2}$$

$$= \frac{1}{\|z_2\|^2} \overline{z_1} \overline{\overline{z_2}} = \frac{\overline{z_1} \overline{z_2}}{\overline{z_2} \overline{z_2}} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$$

Norm Özellikleri:

$$\begin{aligned} \|\cdot\|: \quad \mathbb{C} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ z &\longrightarrow \|z\| = \sqrt{x^2 + y^2} \end{aligned}$$

$$i) \|z\| \geq 0 \quad \text{ve} \quad \|z\| = 0 \iff z = 0$$

$$ii) \|\lambda z\| = \|\lambda\| \|z\|, \quad \lambda, z \in \mathbb{C}$$

$$iii) \|z_1 + z_2\| \leq \|z_1\| + \|z_2\|$$

$$iv) \left| \|z_1\| - \|z_2\| \right| \leq \|z_1 + z_2\|$$

(ii) Sıkkının incelenmesi:

$$\|\lambda z\|^2 = (\lambda z)(\overline{\lambda z})$$

$$= \lambda z \overline{\lambda z}$$

$$= \lambda \overline{\lambda} z \overline{z}$$

$$= \|\lambda\|^2 \|z\|^2$$

$$= \left(\|\lambda\| \|z\| \right)^2$$

$$\Rightarrow \|\lambda z\| = \|\lambda\| \|z\|$$

(ii) şıkkının incelenmesi

$$\begin{aligned}\|z_1 + z_2\|^2 &= (z_1 + z_2) (\overline{z_1 + z_2}) \\&= (z_1 + z_2) (\overline{z_1} + \overline{z_2}) \\&= z_1 \overline{z_1} + z_1 \overline{z_2} + \overline{z_1} z_2 + z_2 \overline{z_2} \\&= \|z_1\|^2 + (z_1 \overline{z_2}) + (\overline{z_1} z_2) + \|z_2\|^2 \\&\leq \|z_1\|^2 + 2 \|z_1 \overline{z_2}\| + \|z_2\|^2 \\&\quad \parallel \\&\quad \|z_1\|^2 + 2 \|z_1\| \|\overline{z_2}\| + \|z_2\|^2 \\&\quad \parallel \\&\quad (\|z_1\| + \|z_2\|)^2\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \|z_1 + z_2\| \leq \|z_1\| + \|z_2\|$$

(iv) şıkkının incelenmesi:

$$\|z_1\| = \|(z_1 + z_2) + (-z_2)\|$$

$$\leq \|z_1 + z_2\| + \|-z_2\| = \|z_1 + z_2\| + \|z_2\|$$

$$\Rightarrow \|z_1\| - \|z_2\| \leq \|z_1 + z_2\|$$

$$\Rightarrow -\|z_1 + z_2\| \leq \|z_1\| - \|z_2\| \leq \|z_1 + z_2\|$$

$$\Rightarrow \left| \|z_1\| - \|z_2\| \right| \leq \|z_1 + z_2\|$$

Örnek

$\|z\| = 1$ denklemini sağlayan sayıların kümesini bulunuz.

Cözüm

$$z = a + ib \implies \|z\| = \sqrt{a^2 + b^2} = 1$$

$$\implies \sqrt{a^2 + b^2} = 1$$

$\implies a^2 + b^2 = 1^2$ denklemini merkezi $m=(0,0)$, yarıçapı $r=1$ olan bir çember belirtir.

Örnek

$\|z-i\| = 1$ denklemini sağlayan sayıların kümesini bulunuz.

Cözüm

$$z = a + ib \implies \|z-i\| = \sqrt{a^2 + (b-1)^2} = 1$$

$$\implies \sqrt{a^2 + (b-1)^2} = 1$$

$\implies a^2 + (b-1)^2 = 1^2$ denklemini merkezi $m=(0,1)$, yarıçapı $r=1$ olan bir çember belirtir.

Örnek

$\|z\| = \|z-i\|$ denklemini sağlayan sayıların kümesini bulunuz.

Çözüm

$z = a + ib$ olsun.

$$\|z\| = \|z-i\| \Rightarrow \|a + ib\| = \|a + i(b-1)\|$$

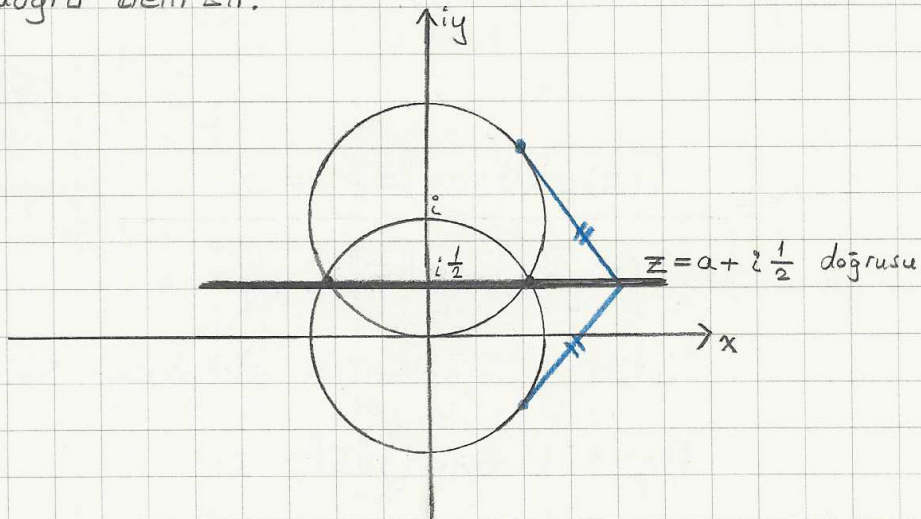
$$\Rightarrow \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{a^2 + (b-1)^2}$$

$$\Rightarrow a^2 + b^2 = a^2 + (b-1)^2$$

$$\Rightarrow (b-1)^2 - b^2 = 0$$

$$\Rightarrow b = \frac{1}{2}$$

$\Rightarrow z = a + i\frac{1}{2}$ denklemi $b = \frac{1}{2}$ noktasından geçen bir doğru belirtir.



Örnek

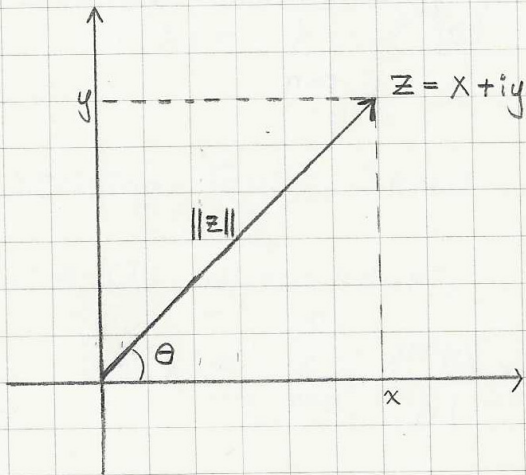
$\|z\| = 2$ için $\left\| \frac{-1}{z^4 + 3z^2 + 2} \right\|$ normuna bir üst sınır bulunuz.

Çözüm

$$\begin{aligned} \left\| \frac{-1}{z^4 + 3z^2 + 2} \right\| &= \frac{1}{\|z^4 + 3z^2 + 2\|} = \frac{1}{\|z^2 + 1\| \|z^2 + 2\|} \\ &\leq \frac{1}{\|z\|^2 - 1} \cdot \frac{1}{\|z\|^2 - 2} \\ &= \frac{1}{2^2 - 1} \cdot \frac{1}{2^2 - 2} \\ &= \frac{1}{6} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \left\| \frac{-1}{z^4 + 3z^2 + 2} \right\| \leq \frac{1}{6} \text{ bir üst sınırdır.}$$

Kutupsal Gösterim



İki kompleks sayının çarpımının geometrik olarak ne anlama geldiğini anlamak için onları kutupsal koordinat formunda yazacağız.

Kutupsal koordinatlarda norm vektörünün reel eksen ile arasındaki pozitif yönlü θ açısına **kompleks sayının argümanı** denir ve $\theta = \arg(z)$ ile gösterilir.

Burada,

$$x = \|z\| \cos(\arg(z))$$

$$y = \|z\| \sin(\arg(z))$$

eşitlikleri yazılabilir. Buradan,

$$z = \|z\| (\cos \theta + i \sin \theta)$$

$$= \|z\| \operatorname{cis} \theta$$

eşitliği kurulur.

Örnek

$z = 1+i$ kompleks sayısının argümanlarını bulunuz.

Cözüm

$$z = 1+i$$

$$= \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right)$$

$$= \sqrt{2} \left(\cos \frac{9\pi}{4} + i \sin \frac{9\pi}{4} \right)$$

$$\Rightarrow \sqrt{2} \left(\cos \left(\frac{\pi}{4} + 2k\pi \right) + i \sin \left(\frac{\pi}{4} + 2k\pi \right) \right), \quad k \in \mathbb{Z}$$

öyleki, z kompleks sayısının argümanları

$$\arg z = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$$

olarak bulunur.

Esas Argüman

$-\pi < \theta \leq \pi$ aralığındaki θ açısına bir kompleks sayının esas argümanı denir ve $\text{Arg } z$ ile gösterilir.

0 halde, yukarıda verilen $z = 1+i$ kompleks sayısının esas argümanının

$$\text{Arg } z = \frac{\pi}{4}$$

olduğu kolaylıkla görülebilir.

Taylor ve Maclaurin Serisi

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(c)}{n!} (x-c)^n, \quad c \in \mathbb{R}$$

serisine Taylor Serisi denir.

$c = 0$ noktasındaki,

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$$

serisine Maclaurin Serisi denir.

Euler Formülü

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$$

$f(\theta) = \cos \theta$ fonksiyonunun Maclaurin serisi açılımını inceleyelim.

$$f(\theta) = \cos \theta \quad \text{ için } f(0) = 1$$

$$f'(\theta) = -\sin \theta \quad \text{ için } f'(0) = 0$$

$$f''(\theta) = -\cos \theta \quad \text{ için } f''(0) = -1$$

$$f'''(\theta) = \sin \theta \quad \text{ için } f'''(0) = 0$$

$$\Rightarrow \cos \theta = 1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \frac{\theta^6}{6!} + \dots$$

$f(\theta) = \sin \theta$ fonksiyonunun Maclaurin serisi açılımı benzer şekilde

$$\sin \theta = \theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \frac{\theta^7}{7!} + \dots$$

şeklinde bulunabilir.

$$\begin{aligned} \cos + i \sin \theta &= 1 + i\theta - \frac{\theta^2}{2!} - \frac{i\theta^3}{3!} + \frac{\theta^4}{4!} + \frac{\theta^5}{5!} + \dots \\ &= 1 + (i\theta) + \frac{(i\theta)^2}{2!} + \frac{(i\theta)^3}{3!} + \frac{(i\theta)^4}{4!} + \frac{(i\theta)^5}{5!} + \dots \\ &= e^{i\theta} \end{aligned}$$

eşitliğini elde ederiz.

0 halde,

$$z = \|z\| (\cos \theta + i \sin \theta)$$

yerine,

$$z = \|z\| e^{i\theta}$$

üstel gösterimini de kullanabiliriz.

Soru

$\arg(z_1 z_2)$ ile $\arg(z_1)$ ve $\arg(z_2)$ arasındaki ilişki nedir?

Cözüm

$$\arg(z_1) = \theta_1$$

$$\arg(z_2) = \theta_2$$

olsun.

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= \|z_1\| (\cos \theta_1 + i \sin \theta_1) \|z_2\| (\cos \theta_2 + i \sin \theta_2) \\ &= \|z_1\| \|z_2\| \left((\cos \theta_1 \cos \theta_2 - \sin \theta_1 \sin \theta_2) + i (\cos \theta_1 \sin \theta_2 + \sin \theta_1 \cos \theta_2) \right) \\ &= \|z_1 z_2\| (\cos(\theta_1 + \theta_2) + i \sin(\theta_1 + \theta_2)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \arg(z_1 z_2) &= \theta_1 + \theta_2 \\ &= \arg(z_1) + \arg(z_2) \pmod{2\pi} \end{aligned}$$

sonucunu elde ederiz.

Benzer şekilde,

$$\arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \arg(z_1) - \arg(z_2) \pmod{2\pi}$$

sonucuna ulaşılabilir.

Kompleks Kök

De Moivre formülü kompleks sayılarda çarpma işlemi için türetilmiştir. Kutupsal koordinat gösterimini kullanmak, geometrik sezgiden daha fazlasını sağlar.

Herhangi bir kompleks sayının n . dereceden köklerini elde etmek için bu formülü kullanabiliriz.

De Moivre Formülü

$z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$ ve $n \in \mathbb{Z}^+$ olsun.

$$z^n = r^n (\cos n\theta + i \sin n\theta)$$

İspat

Herhangi z_1 ve z_2 kompleks sayıları için

$$\|z_1 z_2\| = \|z_1\| \|z_2\| \quad \text{ve} \quad \arg(z_1 z_2) = \arg(z_1) + \arg(z_2) \pmod{2\pi}$$

önergeleri göz önünde bulundursun.

$$z^2 = \|z\|^2 (\cos(\theta + \theta) + i \sin(\theta + \theta)) = \|z\|^2 (\cos 2\theta + i \sin 2\theta)$$

$$z^3 = z \cdot z^2 = \|z\| \|z\|^2 (\cos(2\theta + \theta) + i \sin(2\theta + \theta)) = \|z\|^3 (\cos 3\theta + i \sin 3\theta)$$

Bu prosedürü devam ettirerek De Moivre formülünü elde ederiz.

Örnek

$w \in \mathbb{C}$ olsun.

$z^n = w$ denkleminin çözüm kümesini bulunuz.

Cözüm

$z = \|z\| (\cos \theta + i \sin \theta)$ olsun.

$$\begin{aligned} z^n &= \|z\|^n (\cos(n\theta) + i \sin(n\theta)) \quad , \text{ (De Moivre formülü)} \\ &= \|w\| (\cos \alpha + i \sin(\alpha)) \quad , (n\theta = \alpha) \end{aligned}$$

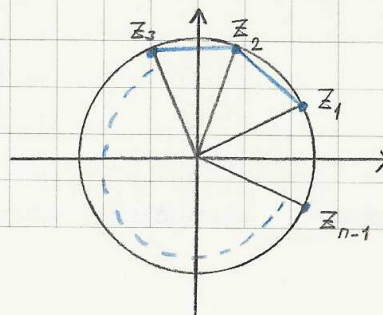
ve

$$\left. \begin{aligned} \cos(n\theta) &= \cos \alpha \\ \sin(n\theta) &= \sin \alpha \end{aligned} \right\} \Rightarrow n\theta = \alpha + 2k\pi$$

$\Rightarrow \theta = \frac{\alpha + 2k\pi}{n}$ olarak α cinsinden θ ifade edilebilir.

Burada $k=0, 1, \dots, n-1$ değerlerini alır çünkü $\mathbb{C}$ cebirsel kapalı bir cisim olduğundan n . dereceden cebirsel kapalı bir kompleks sayının birbirinden farklı n tane kökü bulunur.

$$\begin{aligned} \Rightarrow z &= \|w\|^{\frac{1}{n}} e^{i\theta} \\ &= \|w\|^{\frac{1}{n}} e^{i \frac{\alpha + 2k\pi}{n}} \end{aligned}$$



Örnek

$z^2 = (1 - \sqrt{3}i)^3$ denkleminin çözüm kümesini bulunuz.

Cözüm

$w := 1 - \sqrt{3}i$ şeklinde tanımlansın.

$$w = 1 - \sqrt{3}i$$

$$= \|w\| (\cos\theta + i\sin\theta)$$

$$= 2 \left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) \right)$$

$$= 2 \left(\cos\frac{\pi}{3} - i\sin\frac{\pi}{3} \right)$$

$$\implies w^3 = (1 - \sqrt{3}i)^3$$

$$= 8(\cos\pi - i\sin\pi)$$

$$= -8$$

$$\implies z^2 = -8$$

$\implies z = \pm 2\sqrt{2}i$ olacak şekilde iki farklı kök bulunur.

Bir de bu denklemi sağlayan z karmaşık sayılarının kutupsal koordinatlardaki karşılıklarını bulalım.

$$z = \|z\| (\cos\theta + i\sin\theta)$$

$$z^2 = \|z\|^2 (\cos 2\theta + i\sin 2\theta)$$

$$= w^3$$

$$= 8(\cos(-\pi) + i\sin(-\pi))$$

$$\Rightarrow \|z\|^2 = 8$$

$$\Rightarrow \|z\| = 2\sqrt{2}$$

Ayrıca,

$$2\theta = -\pi + 2k\pi, \quad k=0,1$$

$$\Rightarrow \theta = -\frac{\pi}{2} + k\pi, \quad k=0,1$$

olarak bulunabilir.

0 halde,

$$z_1 = 2\sqrt{2} \left(\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) \right)$$

$$z_2 = 2\sqrt{2} \left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2} \right)$$

olacak şekilde z_1 ve z_2 sayılarının kutupsal formu yazılabilir.

Örnek

$z^2 + (1-i)z - 3i = 0$ denkleminin çözüm kümesini bulunuz.

Cözüm

Verilen kompleks katsayılı denklemin kolları sırasıyla

$$a = 1$$

$$b = (1-i)$$

$$c = -3i$$

şeklinde dir. Buradan, bu ikinci dereceden verilen denklemin kökleri kök bulma formülünden

$$z_{1,2} = \frac{i - 1 \pm \sqrt{10i}}{2}$$

şeklinde bulunabilir. Ancak, kompleks sayının köklerini standart formda ifade edebilmek için karekök içerisinde yer alan i ifadesinden kurtulmamız gerekmektedir:

$$w := \sqrt{10i} \quad \text{tanımlamasını yapalım.}$$

$$w = \sqrt{10i} \implies w^2 = 10i$$

$$= 10 \left(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} \right) \\ = \|w\|^2 (\cos 2\theta + i \sin 2\theta), \quad (\text{De Moivre})$$

$$\implies \|w\| = \sqrt{10} \quad \text{ve} \quad 2\theta = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, \quad k = 0, 1$$

$$\implies \theta_1 = \frac{\pi}{4}, \quad \theta_2 = \frac{5\pi}{4}$$

elde ederiz.

0 halde, denklemi sağlayan z_1 ve z_2 kökleri

$$z_1 = \frac{i-1 + \sqrt{10} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right)}{2} \\ = \frac{i-1 + \sqrt{5} + i\sqrt{5}}{2}$$

ve

$$z_2 = \frac{i-1 + \sqrt{10} \left(\cos \frac{5\pi}{4} + i \sin \frac{5\pi}{4} \right)}{2} \\ = \frac{i-1 - \sqrt{5} - i\sqrt{5}}{2}$$

şeklinde bulunabilir.

n. Mersebeden Kompleks Katsayılı Homojen Denklemler

$a, b, c \in \mathbb{C}$ olsun.

$$ay'' + by' + cy = 0$$

şeklinde verilen ikinci dereceden kompleks katsayılı homojen denklemin genel çözümünü bulalım.

$$y = e^{mx}$$

alalım.

$$\Rightarrow am^2 e^{mx} + bme^{mx} + ce^{mx} = 0$$

$$\Rightarrow e^{mx} (am^2 + bm + c) = 0$$

$$\Rightarrow am^2 + bm + c = 0$$

(i) m_1 ve m_2 kökləri $m_1 = z$ ve $m_2 = \bar{z}$

olacak şekilde iki farklı karmaşık sayı

$$\Rightarrow y = e^{mx}$$

$$= e^{zx}$$

$$= e^{ax+ibx}$$

$$= e^{ax} \cos bx + ie^{ax} \sin bx, \quad (e^{x+iy} = e^x(\cos y + i \sin y))$$

olarak bulunur.

(ii) m_1 ve m_2 kökleri $m_1, m_2 \in \mathbb{R}$ olacak şekilde iki gerçel sayı olsun.

$$\longrightarrow y = c_1 e^{m_1 x} + c_2 e^{m_2 x}$$

Lagrange Özdeşliği

$$1 + \cos \theta + \cos 2\theta + \dots + \cos n\theta = \frac{1}{2} + \frac{\sin(n+\frac{1}{2})\theta}{2\sin \frac{\theta}{2}}$$

$$\left(\sin \frac{\theta}{2} \neq 0 \right)$$

İspat

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^n z^i &= 1 + z + z^2 + \dots + z^n \\ &= \frac{1 - z^{n+1}}{1 - z}, \quad z \neq 1 \quad \text{geometrik serisi} \end{aligned}$$

$z \neq 1$ önünde bulundurulsun.

$$\begin{aligned}
1 + z + z^2 + \dots + z^n &= 1 + (\cos\theta + i\sin\theta) + \dots + (\cos\theta + i\sin\theta)^n \\
&= 1 + (\cos\theta + i\sin\theta) + \dots + (\cos n\theta + i\sin n\theta) \\
&= 1 + \cos\theta + \dots + \cos n\theta + i(\sin\theta + \dots + \sin n\theta)
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
\frac{1 - z^{n+1}}{1 - z} &= \frac{1 - (\cos\theta + i\sin\theta)^{n+1}}{1 - \cos\theta - i\sin\theta} \\
&= \frac{((1 - \cos(n+1)\theta - i(\sin(n+1)\theta)) (1 - \cos\theta + i\sin\theta))}{(1 - \cos\theta)^2 + \sin^2\theta} \\
&= \frac{(1 - \cos(n+1)\theta)(1 - \cos\theta) + \sin(n+1)\theta \sin\theta + i(\sin\theta(1 - \cos(n+1)\theta) - (\sin(n+1)\theta)(1 - \cos\theta))}{2(1 - \cos\theta)}
\end{aligned}$$

$$\rightarrow z_1 = z_2 \iff \operatorname{Re}(z_1) = \operatorname{Re}(z_2) \text{ ve } \operatorname{Im}(z_1) = \operatorname{Im}(z_2)$$

olduğu göz önünde bulundurulursa yukarıdaki iki denklemin birbirine eşit olduğu açık olduğundan her iki denklemin gerçel kısımlarını birbirine eşitleyebiliriz.

$$\begin{aligned}
1 + \cos\theta + \dots + \cos n\theta &= \frac{(1 - \cos(n+1)\theta)(1 - \cos\theta) + \sin\theta \sin(n+1)\theta}{2(1 - \cos\theta)} \\
&= \frac{1 - \cos\theta - \cos(n+1)\theta + \cos((n+1)\theta - \theta)}{2(1 - \cos\theta)} \\
&= \frac{1}{2} + \frac{\cos n\theta - \cos(n+1)\theta}{2(1 - \cos\theta)} \\
&\vdots \\
&= \frac{1}{2} + \frac{\sin(n + \frac{1}{2})\theta}{2\sin\frac{\theta}{2}}
\end{aligned}$$

Stereografik izdüşüm

$$\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C}_{\infty} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$$

kümesine genişletilmiş kompleks sayılar kümesi adı verilir.

$$W := \{ (x, y, 0) \in \mathbb{R}^3 \mid x, y \in \mathbb{R} \} \subseteq \mathbb{R}^3$$

alt uzayını tanımlayalım.

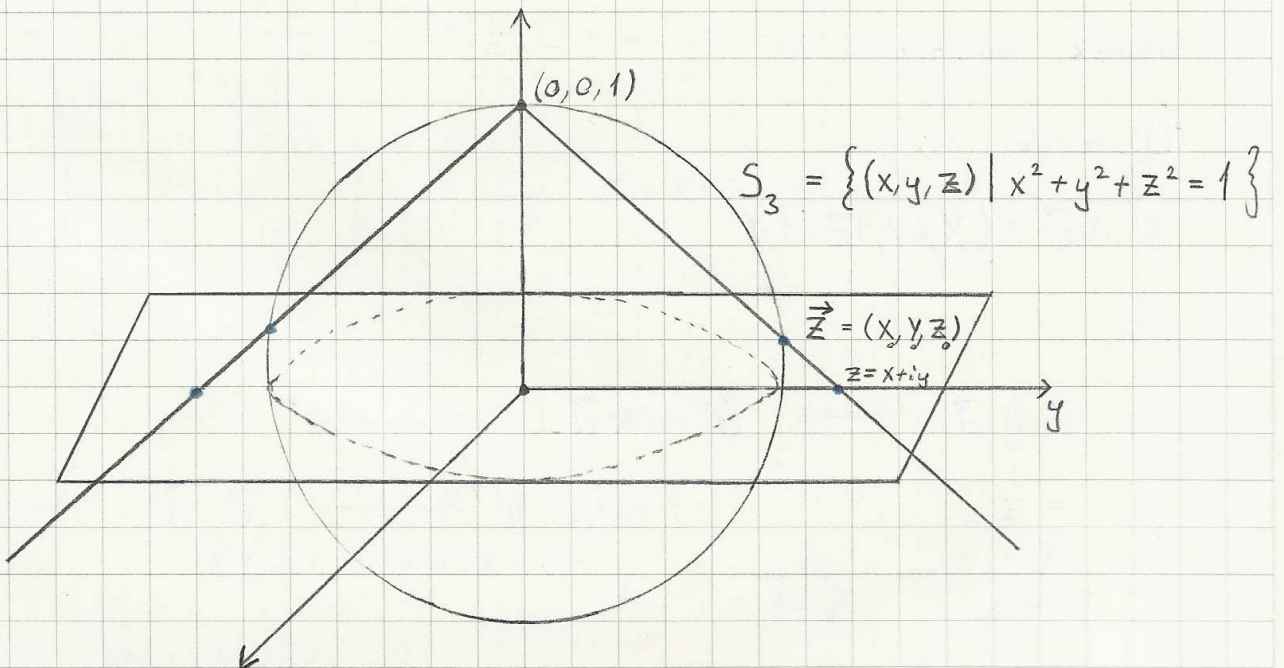
O halde,

$$\mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2 \cong W$$

olduğu görülebilir.

$$S_3 := \{ (x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1 \}$$

birim küresini tanımlayalım.



$$\|z\| > 1 \implies \vec{Z} \text{ üst yarım kürede,}$$

$$\|z\| < 1 \implies \vec{Z} \text{ alt yarım kürede,}$$

$$\|z\| = 1 \implies \vec{Z} = (x, y, 0) : x^2 + y^2 = 1$$

$$f: S_3 \longrightarrow \mathbb{C} \cup \{\infty\}$$

$$(x, y, z) \longmapsto x + iy$$

fonksiyonunu tanımlayalım.

$$\vec{Z}_0 = (x_0, y_0, z_0) \text{ noktası biliniyor olsun.}$$

0 halde, d doğrusunun doğrultma vektörü

$$\vec{d} = \vec{Z}_0 - \vec{N}$$

$$= (x_0, y_0, z_0) - (0, 0, 1)$$

$$= (x_0, y_0, z_0 - 1)$$

olarak bulunur.

0 halde,

$$\vec{u} = (x, y, z - 1)$$

için

$$\vec{u} \parallel \vec{d} \iff \vec{u} = \lambda \vec{d}, \quad \lambda \in \mathbb{R}^+$$

$$\Rightarrow (x, y, z-1) = (\lambda x_0, \lambda y_0, \lambda(z_0-1))$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = \lambda x_0 \\ y = \lambda y_0 \\ z = \lambda z_0 - \lambda + 1 \end{cases}$$

d doğrusu kompleks düzlemi bir (x, y) noktasında keser.

O halde doğru ile düzlemin arakesişini incelersek,

$$x = \lambda x_0$$

$$y = \lambda y_0$$

$$0 = \lambda z_0 - \lambda + 1 \quad \Longrightarrow \quad \lambda = \frac{1}{1 - z_0}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = \frac{x_0}{1 - z_0} \\ y = \frac{y_0}{1 - z_0} \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad z = x + iy = \frac{x_0}{1 - z_0} + i \frac{y_0}{1 - z_0}$$

$$\Rightarrow f: S_3 \longrightarrow \mathbb{C} \cup \{\infty\}$$

$$(x, y, z) \longmapsto z = x + iy = \frac{x}{1 - z} + i \frac{y}{1 - z}$$

elde etmiş oluruz.

ÖRNEK

$$S_3 = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\} \text{ olmak üzere}$$

$$f: S_3 \longrightarrow \mathbb{C} \cup \{\infty\} \text{ fonksiyonu tanımlansın.}$$
$$(x, y, z) \longmapsto x + iy$$

$$f(1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}) = ?$$

ÇÖZÜM

$$f(x, y, z) = \frac{x}{1-z} + i \frac{y}{1-z}$$

$$\Rightarrow f(1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}) = \frac{1/\sqrt{3}}{1-1/\sqrt{3}} + i \frac{1/\sqrt{3}}{1-1/\sqrt{3}} .$$

Buraya kadar birim kürede $(0,0,1)$ noktasından geçen ve küreyi (x_0, y_0, z_0) noktasında kesen doğrunun kompleks düzlemle olan arakesitinin nasıl bulunacağını inceledik. Şimdi, gene birim kürede $(0,0,1)$ noktasından geçen ve kompleks düzlemi $Z_0 = x_0 + iy_0$ noktasında kesen doğrunun küre yüzeyini hangi noktada kestiğini nasıl bulabileceğimizi inceleyelim.

$$f: S_3 \longrightarrow \mathbb{C} \cup \{\infty\}$$

$$(x, y, z) \longrightarrow x + iy$$

fonksiyonunu tanımlayalım.

$$z_0 = x_0 + iy_0 \text{ noktası biliniyor olsun.}$$

0 halde d doğrusunun doğrultman vektörü

$$\vec{d} = (x_0, y_0, 0) - (0, 0, 1)$$

$$= (x_0, y_0, -1)$$

olarak bulunur.

0 halde,

$$\vec{u} = (x, y, z - 1)$$

için

$$\vec{u} \parallel \vec{d} \iff \vec{u} = \lambda \vec{d}, \quad \lambda \in \mathbb{R}^+$$

$$\Rightarrow (x, y, z - 1) = (\lambda x_0, \lambda y_0, -\lambda)$$

$$x = \lambda x_0$$

$$y = \lambda y_0$$

$$z - 1 = -\lambda$$

d doğrusu birim kürenin yüzeyini bir (X, Y, Z) noktasında keser.

O halde doğru ile küre yüzeyinin arakesitini incelersek

$$\left. \begin{array}{l} X = \lambda x_0 \\ Y = \lambda y_0 \\ Z = 1 - \lambda \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} X^2 + Y^2 + Z^2 = 1 \\ (\lambda x_0)^2 + (\lambda y_0)^2 + (1 - \lambda)^2 = 1 \end{array}$$

$$\lambda^2 x_0^2 + \lambda^2 y_0^2 + (1 - \lambda)^2 = 1$$

$$\lambda^2 \|z_0\|^2 + (1 - \lambda)^2 = 1$$

$$\lambda^2 \|z_0\|^2 + 1 - 2\lambda + \lambda^2 = 1$$

$$\lambda^2 (1 + \|z_0\|^2) - 2\lambda = 0$$

$$\lambda (\lambda (1 + \|z_0\|^2) - 2) = 0$$

$$\Rightarrow \lambda = 0 \quad \text{veya} \quad \lambda = \frac{2}{1 + \|z_0\|^2}$$

$$\Rightarrow (X, Y, Z) = \left(\frac{2x_0}{1 + \|z_0\|^2}, \frac{2y_0}{1 + \|z_0\|^2}, 1 - \frac{2}{1 + \|z_0\|^2} \right)$$
$$\left(\frac{2x_0}{1 + \|z_0\|^2}, \frac{2y_0}{1 + \|z_0\|^2}, \frac{\|z_0\|^2 - 1}{1 + \|z_0\|^2} \right)$$

Ödev : Stereografik izdüşüm altında S_3 üzerindeki çemberler, düzlem üzerinde çember ve doğrulardır. Gösteriniz.

Kirişsel Uzaklık

Öklid metriğine göre,

$$d(\bar{z}_1, \bar{z}_2) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

$$d_\infty(\bar{z}_1, \bar{z}_2) = \rho(\vec{\bar{z}}_1, \vec{\bar{z}}_2)$$

şeklinde tanımlanan uzaklığa kirişsel uzaklık denir.

$$d_\infty(\bar{z}_1, \bar{z}_2) = \rho(\vec{\bar{z}}_1, \vec{\bar{z}}_2)$$

$$= \rho((x_1, y_1, \bar{z}_1), (x_2, y_2, \bar{z}_2))$$

$$= \rho\left(\left(\frac{2x_1}{1+\|\bar{z}_1\|^2}, \frac{2y_1}{1+\|\bar{z}_1\|^2}, \frac{\|\bar{z}_1\|^2-1}{1+\|\bar{z}_1\|^2}\right), \left(\frac{2x_2}{1+\|\bar{z}_2\|^2}, \frac{2y_2}{1+\|\bar{z}_2\|^2}, \frac{\|\bar{z}_2\|^2-1}{1+\|\bar{z}_2\|^2}\right)\right)$$

$$= \sqrt{4\left(\frac{x_1}{1+\|\bar{z}_1\|^2} - \frac{x_2}{1+\|\bar{z}_2\|^2}\right)^2 + 4\left(\frac{y_1}{1+\|\bar{z}_1\|^2} - \frac{y_2}{1+\|\bar{z}_2\|^2}\right)^2 + \left(\frac{\|\bar{z}_1\|^2-1}{1+\|\bar{z}_1\|^2} - \frac{\|\bar{z}_2\|^2-1}{1+\|\bar{z}_2\|^2}\right)^2}$$

$$= \sqrt{\frac{4\|\bar{z}_1\|^2}{(1+\|\bar{z}_1\|^2)^2} + \frac{4\|\bar{z}_2\|^2}{(1+\|\bar{z}_2\|^2)^2} - \frac{8x_1x_2 + 8y_1y_2}{(1+\|\bar{z}_1\|^2)(1+\|\bar{z}_2\|^2)} + \frac{\|\bar{z}_1\|^4 - 2\|\bar{z}_1\|^2 + 1}{(1+\|\bar{z}_1\|^2)^2} + \frac{\|\bar{z}_2\|^4 - 2\|\bar{z}_2\|^2 + 1}{(1+\|\bar{z}_2\|^2)^2} - \frac{2\|\bar{z}_1\|^2\|\bar{z}_2\|^2 - \|\bar{z}_1\|^2 - \|\bar{z}_2\|^2 + 1}{(1+\|\bar{z}_1\|^2)^2(1+\|\bar{z}_2\|^2)^2}}$$

$$= \sqrt{2\left(1 - \frac{(\|\bar{z}_1\|^2\|\bar{z}_2\|^2 - \|\bar{z}_1\|^2 - \|\bar{z}_2\|^2 + 1) + 4x_1x_2 + 4y_1y_2}{(1+\|\bar{z}_1\|^2)(1+\|\bar{z}_2\|^2)}\right)}$$

$$= 2\sqrt{\frac{\|\bar{z}_1\|^2 + \|\bar{z}_2\|^2 - 2x_1x_2 - 2y_1y_2}{(1+\|\bar{z}_1\|^2)(1+\|\bar{z}_2\|^2)}}$$

$$= 2\sqrt{\frac{x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2 + y_1^2 - 2y_1y_2 + y_2^2}{(1+\|\bar{z}_1\|^2)(1+\|\bar{z}_2\|^2)}}$$

$$= 2\frac{\|\bar{z}_1 - \bar{z}_2\|}{\sqrt{(1+\|\bar{z}_1\|^2)(1+\|\bar{z}_2\|^2)}}$$

Kompleks Sayılar ($\mathbb{C}$) nin Topolojisi

$\mathbb{C}$, $\mathbb{R}$ üzerinde bir vektör uzay olmak üzere,
 $\mathbb{C}$ üzerinde bir norm, aşağıdaki özellikleri sağlayan bir

$$\|\cdot\| : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{R}$$

fonksiyonudur.

Her $z \in \mathbb{C}$ ve her $\lambda \in \mathbb{R}$ için

$$N1) \|z\| \geq 0$$

$$N2) \|z\| = 0 \iff z = 0$$

$$N3) \|\lambda z\| = |\lambda| \|z\|$$

$$N4) \|z_1 + z_2\| \leq \|z_1\| + \|z_2\|$$

üzerinde bir $\|\cdot\|$ normu tanımlanmış olan $\mathbb{C}$ vektör uzayı
normlu vektör uzayıdır.

$\mathbb{R}^n$ nin topolojisindeki tüm özellikler $\mathbb{C}$ 'de de geçerlidir.

Kompleks Fonksiyonlar

Tanım

$f: A \rightarrow B$ bir dönüşüm olmak üzere

$A, B \subseteq \mathbb{C}$ ise f fonksiyonuna kompleks fonksiyon adı verilir.

$$G(f) = \{(z, w) \mid w \in f(z), \forall z \in D(f)\} \subseteq A \times B$$

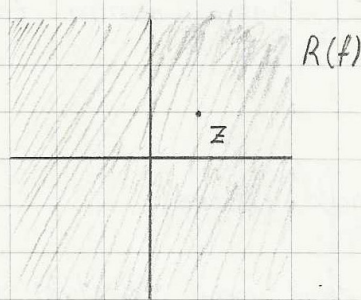
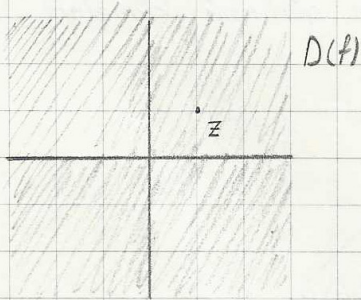
Örnek

$f(z) = z$ fonksiyonunun tanım ve görüntü kümeleri:

$$D(f) = \mathbb{C}$$

$$R(f) = \mathbb{C}$$

$$G(f) = \{(z, z) \mid \forall z \in \mathbb{C}\} \subseteq \mathbb{C} \times \mathbb{C} = \mathbb{C}^2$$



$\mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$ olduğundan $\mathbb{C} \times \mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 = \mathbb{R}^4$ olduğu kolayca görülebilir.

Bu sebeple, bir kompleks fonksiyonun grafiğini Kartezyen koordinatlarda ifade edebilmek mümkün değildir.

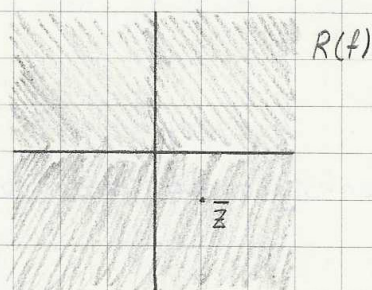
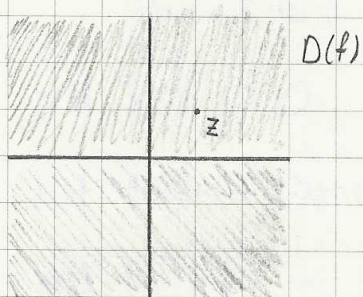
Örnek

$f(z) = \bar{z}$ fonksiyonunun tanım ve görüntü kümeleri

$$D(f) = \mathbb{C}$$

$$R(f) = \mathbb{C}$$

$$G(f) = \{ (z, \bar{z}) \mid \bar{z} \in f(z), \forall z \in D(f) \} \subseteq \mathbb{C} \times \mathbb{C} = \mathbb{C}^2$$



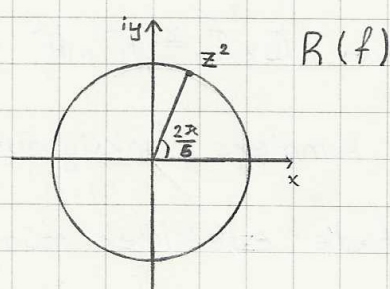
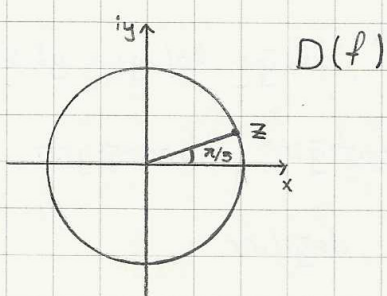
Örnek

$f(z) = z^2$ fonksiyonunun tanım ve görüntü kümeleri

$$D(f) = \mathbb{C}$$

$R(f) = \mathbb{C}$ olmak üzere,

$\|z\|=1$ eğrisinin f fonksiyonu altındaki görüntüsü



$$\|z\| = 1 \text{ için}$$

$$z = \|z\| e^{i\theta}$$

$$= e^{i\theta}$$

$$= (\cos\theta + i\sin\theta)$$



$$f(z) = z^2$$

$$= (\cos\theta + i\sin\theta)^2$$

$$= \cos 2\theta + i\sin 2\theta$$

Benzer şekilde,

$y = x$ eğrisinin f fonksiyonu altındaki tanım ve görüntü kümeleri:

$$z = x + iy$$

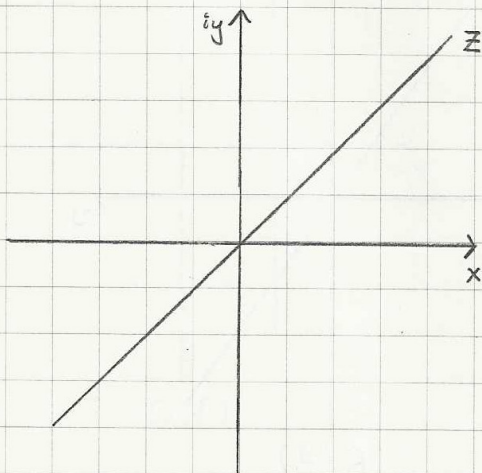
$$\Rightarrow f(z) = z^2$$

$$= (x + iy)^2$$

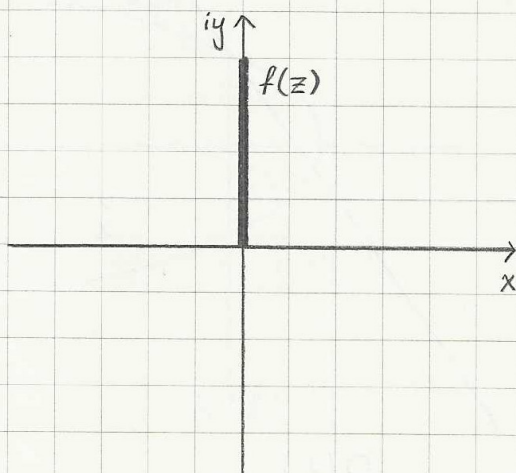
$$= x^2 - y^2 + i2xy$$

$$= x^2 - (x^2) + i2x(x)$$

$$= i2x^2$$



$D(f)$



$R(f)$

Benzer şekilde,

$y = 2x$ eğrisinin f fonksiyonu altındaki tanım ve görüntü kümeleri:

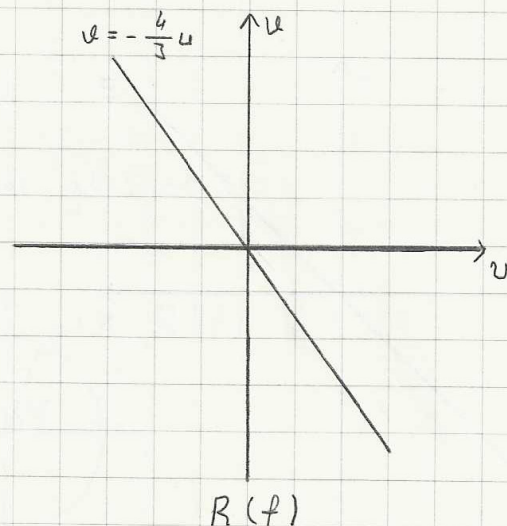
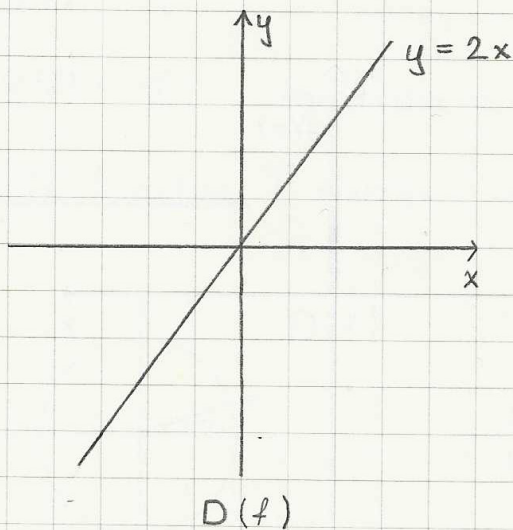
$$\begin{aligned} z = x+iy &\implies f(z) = z^2 \\ &= (x+iy)^2 \\ &= (x^2 - y^2) + i2xy \\ &= (x^2 - 4x^2) + i2x(2x) \\ &= -3x^2 + i4x^2 \end{aligned}$$

Şimdi, $u := -3x^2$

$v := 4x^2$

dersek,

$$4u + 3v = 0 \implies v = -\frac{4}{3}u$$



Benzer şekilde,

$x = a$ eğrisinin f fonksiyonu altındaki tanım ve görüntü kümeleri :

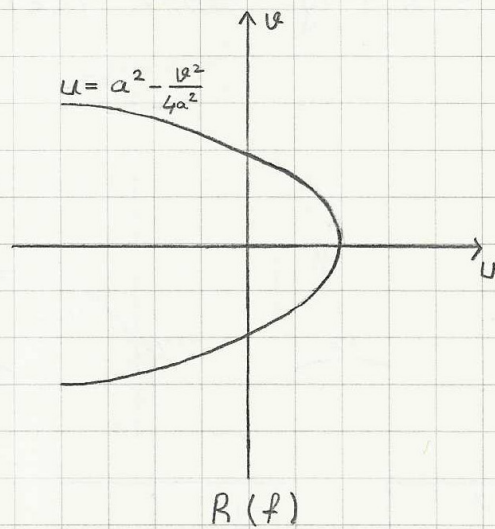
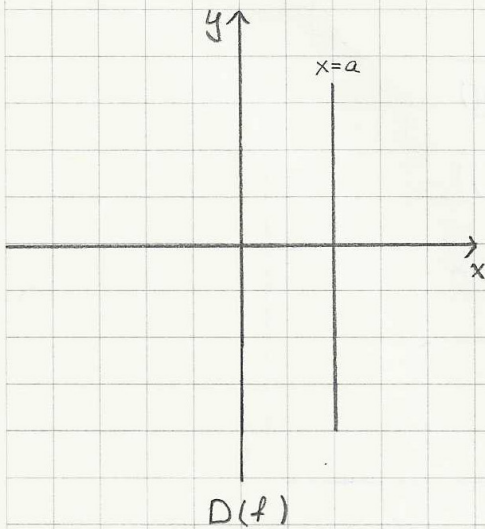
$$\begin{aligned} z = x + iy &\implies f(z) = z^2 \\ &= (x + iy)^2 \\ &= (x^2 - y^2) + i2xy \\ &= (a^2 - y^2) + i2ay \end{aligned}$$

Şimdi, $u = a^2 - y^2$

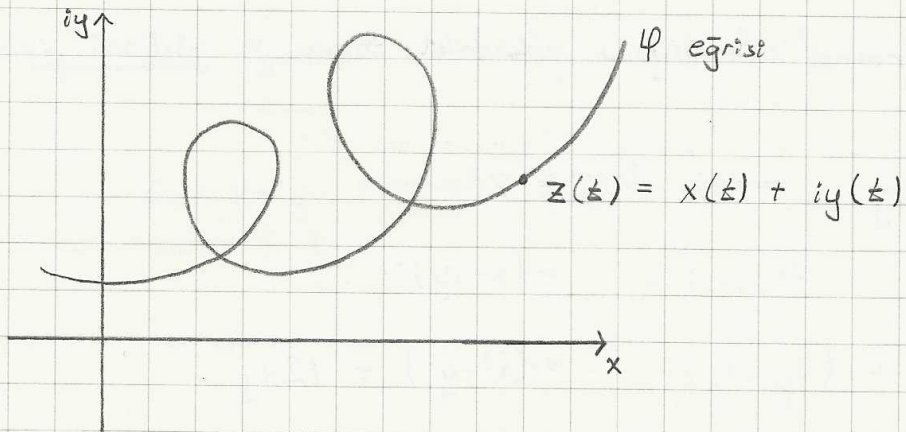
$$v = 2ay$$

dersek,

$$u = a^2 - \frac{v^2}{4a^2} \quad \text{eşitliğini elde edebiliriz.}$$



Parametrik Gösterim



gösterimine parametrik gösterim adı verilir.

Örnek

$$f: \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$$
$$z \longmapsto i\bar{z}$$

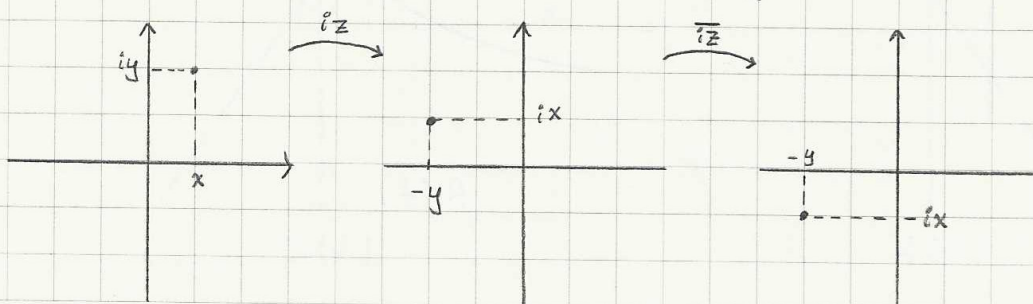
fonksiyonunu ele alalım.

$$z = x + iy \implies f(z) = \overline{i\bar{z}}$$

$$= \overline{i(x + iy)}$$

$$= \overline{ix - y}$$

$$= -y - ix$$



Şimdi, kompleks düzlemdeki bir eğrinin
 $f(z) = \bar{z}$ fonksiyonu altındaki görüntüsünü
parametrik denklemden yararlanarak bulalım:

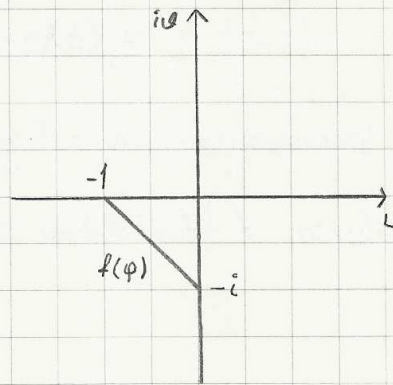
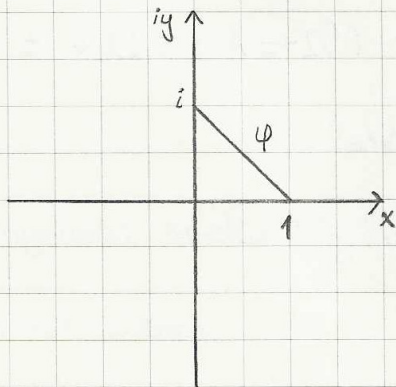
$$Z = t + i(1-t), \quad 0 \leq t \leq 1 \quad \text{eğrisi verilsin.}$$

$$\begin{aligned} Z = x + iy &\implies f(Z) = \bar{z} \\ &= \overline{i(t + i(1-t))} \\ &= \overline{it - 1 + t} \\ &= -(1-t) - it \end{aligned}$$

Şimdi, $u = -(1-t)$

$$v = -t$$

diyelim.

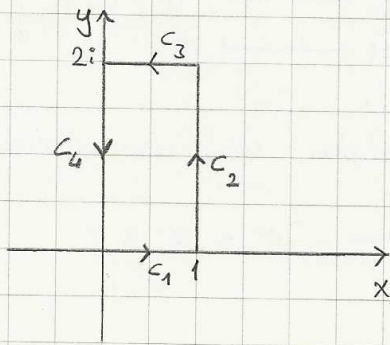


Örnek

$(0,0), (1,0), (1,2i), (0,2i)$ noktalarının köşegen kabul edildiği dikdörtgenin $f(z) = (2+2i)z + (1-i)$ fonksiyonu altındaki görüntüsünü bulunuz.

Çözüm

Kompleks düzlemdeki bir eğrinin bir fonksiyon altındaki görüntüsünü eğrinin parametrik denkleminde yararlanarak bulabiliriz.



$$z_1(t) = t + i0, \quad 0 \leq t \leq 1$$

$$z_2(t) = 1 + it, \quad 0 \leq t \leq 2$$

$$z_3(t) = (1-t) + i2, \quad 0 \leq t \leq 1$$

$$z_4(t) = 0 + i(2-t), \quad 0 \leq t \leq 2$$

şeklinde eğrinin parametrisasyonunu yazabiliriz.

Şimdi, bu eğrilerin f fonksiyonu altındaki görüntülerini inceleyelim.

$$f(z_1(z)) = (2+2i)z + (1-i)$$

$$= (2z+1) + i(2z-1)$$

olmak üzere,

$$\left. \begin{array}{l} u := 2z+1 \\ v := 2z-1 \end{array} \right\} \implies u-v = 2 \quad \text{öyle ki} \quad \begin{array}{l} 1 \leq u \leq 3 \\ -1 \leq v \leq 1 \end{array}$$

$$f(z_2(z)) = (2+2i)(1+iz) + (1-i)$$

$$= 2+2iz+2i-2z + (1-i)$$

$$= (3-2z) + i(2z+1)$$

olmak üzere,

$$\left. \begin{array}{l} u := 3-2z \\ v := 2z+1 \end{array} \right\} \implies u+v = 4 \quad \text{öyle ki} \quad \begin{array}{l} -1 \leq u \leq 3 \\ 1 \leq v \leq 5 \end{array}$$

$$f(z_3(z)) = (2+2i)((1-z)+2i) + (1-i)$$

$$= 2-2z+4i+2i-2iz-4 + (1-i)$$

$$= (-1-2z) + i(5-2z)$$

olmak üzere,

$$\left. \begin{array}{l} u := -1-2z \\ v := 5-2z \end{array} \right\} \implies u-v = -6 \quad \text{öyle ki} \quad \begin{array}{l} -3 \leq u \leq -1 \\ 3 \leq v \leq 5 \end{array}$$

$$\begin{aligned}
 f(z_4(z)) &= (2+2i)(i(2-z)) + (1-i) \\
 &= 4i - 2iz - 4 + 2z + 1 - i \\
 &= (-3 + 2z) + i(3 - 2z)
 \end{aligned}$$

olmak üzere,

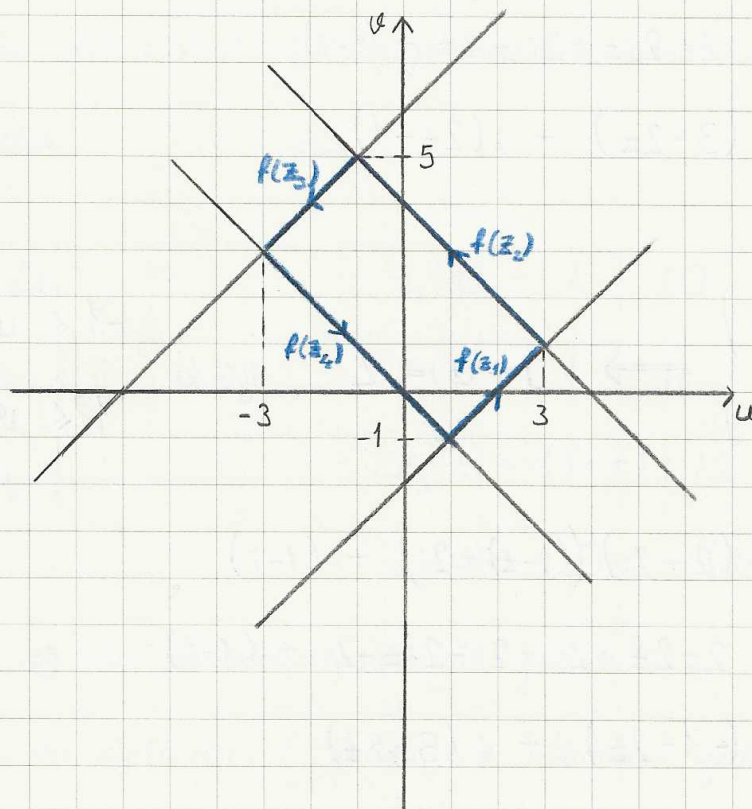
$$u := -3 + 2z$$

$$v := 3 - 2z$$

$$\implies u + v = 0 \quad \text{öyle ki}$$

$$-3 \leq u \leq -1$$

$$-1 \leq v \leq 3$$



Doğrusal Tasvirler

$$\text{Öteleme: } z \mapsto z + b, \quad (b \in \mathbb{C})$$

$$\text{Döndürme: } z \mapsto az, \quad (a \in \mathbb{C})$$

$$\star \operatorname{Arg}(az) = \operatorname{Arg}(a) + \operatorname{Arg}(z)$$

$$\star \|a\| > 1 \text{ ise genişleme, } \|a\| < 1 \text{ ise daralma olur.}$$

$$\text{Doğrusal Tasvir: } z \mapsto az + b$$

Üstel Fonksiyon

$$e^z = e^{x+iy}$$

$$= e^x e^{iy}$$

$$= e^x (\cos y + i \sin y)$$

$$= e^x \cos y + i e^x \sin y$$

şeklinde tanımlanan fonksiyona üstel fonksiyon denir.

$$e: \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}$$

$$z \mapsto e^z$$

fonksiyonu periyodiktir ve periyodu $2\pi i$

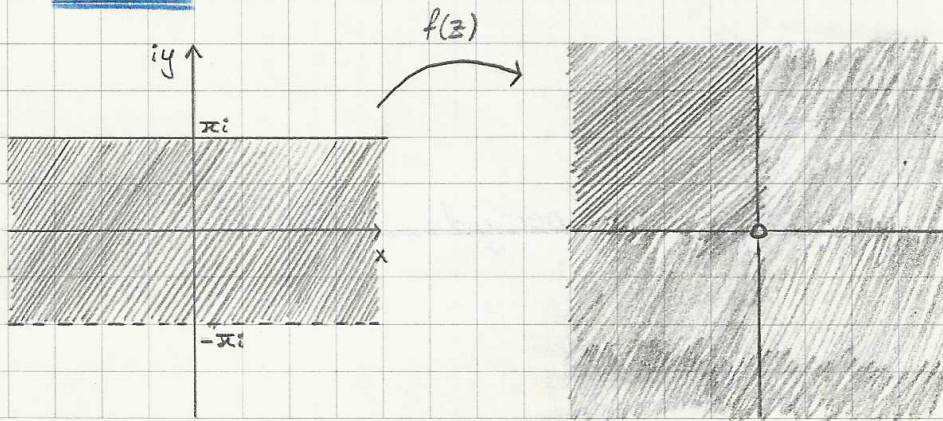
$$\begin{aligned}
 f(z) &= e^z \\
 &= e^x e^{iy} \\
 &= e^x (\cos y + i \sin y) \\
 &= e^x (\cos(y+2\pi) + i \sin(y+2\pi)) \\
 &= e^x e^{i(y+2\pi)} \\
 &= e^{x+iy+2\pi i} \\
 &= e^{z+2\pi i} \\
 &= f(z+2\pi i)
 \end{aligned}$$

Örnek

$$z = x+iy : -\infty < \operatorname{Re}(z) < \infty, -\pi < \operatorname{Im}(z) \leq \pi$$

karmaşık sayısının $f(z) = e^z$ fonksiyonu altındaki görüntüsünü bulunuz.

Cözüm



Örnek

$$z = 1 + iy ; -\pi < \operatorname{Im}(z) \leq \pi$$

karmaşık sayısının $f(z) = e^z$ fonksiyonu altındaki görüntüsünü bulunuz.

Çözüm

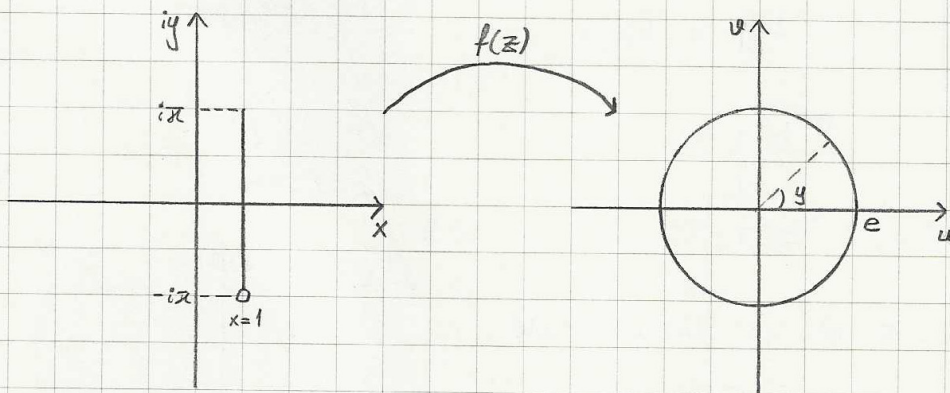
$$\begin{aligned} f(z) &= e^z \\ &= e^1(\cos y + i \sin y) \\ &= e \cos y + i e \sin y \end{aligned}$$

olmak üzere,

$$u := e \cos y$$

$$v := e \sin y$$

$$\implies u^2 + v^2 = e^2$$



Örnek

$$z = x + i, \quad x \in \mathbb{R}$$

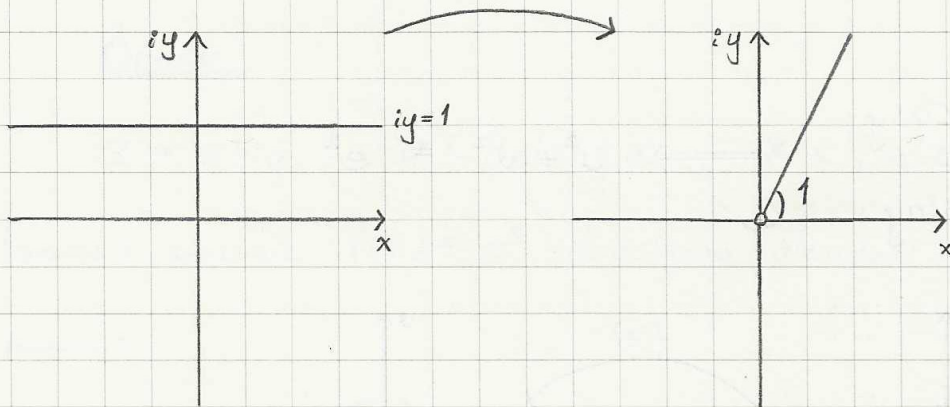
karmaşık sayısının $f(z) = e^x$ fonksiyonu altındaki görüntüsünü bulunuz.

Cözüm

$$f(z) = e^z$$

$$= e^{x+i}$$

$$= e^x (\cos 1 + i \sin 1)$$



Özel Kuvvet Fonksiyonları

$$f(z) = z^n, \quad n \in \mathbb{N}$$

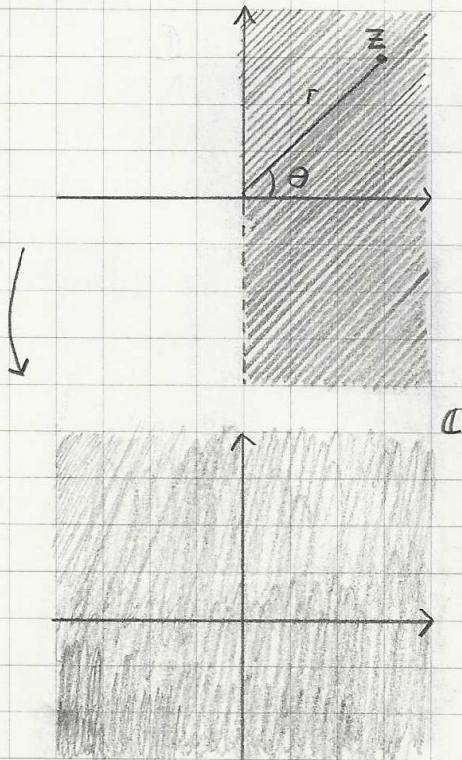
şeklinde tanımlanan fonksiyona özel kuvvet fonksiyonu denir.

$$\begin{aligned} f: \mathbb{C} &\longrightarrow \mathbb{C} \\ z &\longmapsto z^n \end{aligned}$$

$$f(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0, \quad a_i \in \mathbb{C}, \quad i=0,1,\dots,n$$

fonksiyonuna polinom fonksiyon denir.

Örnek



$$z = r e^{i\theta}, \quad -\frac{\pi}{2} < \theta \leq \frac{\pi}{2}, \quad r \in \mathbb{R}$$

olmak üzere,

$$f(z) = z^2$$

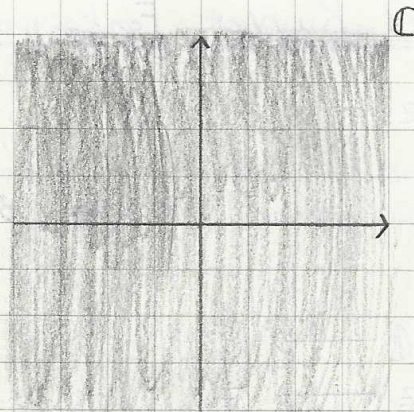
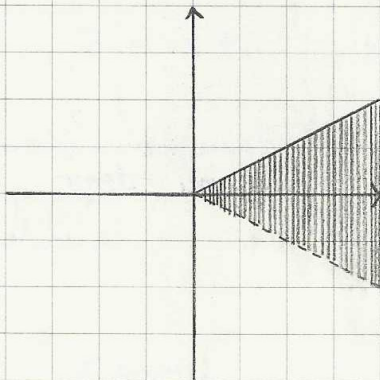
$$= r^2 e^{i2\theta}$$

$$= r^2 e^{i\alpha}, \quad -\pi < \alpha \leq \pi$$

olur öyleki bu da α açısının tüm $\mathbb{C}$ düzlemini taradığı sonucunu verir.

$f(z) = z^2$ fonksiyonu 1-1 değildir.

Örnek



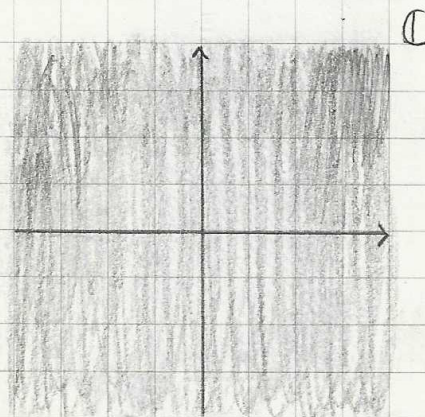
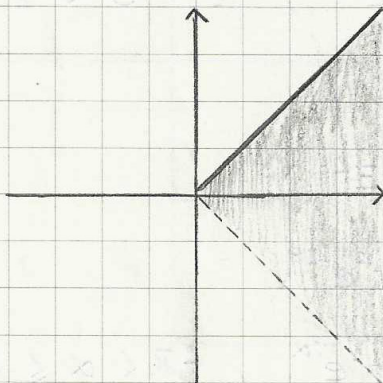
$$z = r e^{i\theta}, \quad -\frac{\pi}{3} < \theta \leq \frac{\pi}{3}, \quad r \in \mathbb{R}$$

olmak üzere,

$$f(z) = z^3$$

$$= r^3 e^{i3\theta}, \quad -\pi < \alpha \leq \pi, \quad 3\theta = \alpha$$

Örnek



$$z = r e^{i\theta}, \quad -\frac{\pi}{n} < \theta \leq \frac{\pi}{n}, \quad r \in \mathbb{R}$$

olmak üzere,

$$f(z) = z^n$$

$$= r^n e^{in\theta}, \quad -\pi < n\theta \leq \pi$$

Özel Kök Fonksiyonu

$$f: \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C} \\ z \longmapsto \sqrt[n]{z}, \quad n \in \mathbb{R}$$

şeklinde tanımlanan fonksiyona özel kök fonksiyonu denir.

$$f(z) = \sqrt[n]{z} \\ = w$$

olsun.

$$w^n = z \\ = \|z\| e^{i \operatorname{Arg} z} \\ = \|w\|^n e^{i n \operatorname{Arg} w}$$

Buradan,

$$n \operatorname{Arg} w = \operatorname{Arg} z + 2k\pi, \quad k = 0, 1, 2, \dots, n-1$$

elde ederiz.

Ayrıca, w^n özel kuvvet fonksiyonu olmak üzere,

$$f: \mathbb{C} \longrightarrow \left\{ w \in \mathbb{C} : -\frac{\pi}{n} < \operatorname{Arg} w \leq \frac{\pi}{n}, \quad \|w\| \geq 0 \right\}$$

$$w = \|z\|^{\frac{1}{n}} \left(\cos \frac{\operatorname{Arg} z}{n} + i \sin \frac{\operatorname{Arg} z}{n} \right)$$

Örnek

$(1+i)$ sayısının küp köklerini bulunuz.

Çözüm

$$\begin{aligned} w^3 &= 1+i \\ &= \|w\|^3 e^{i3\text{Arg } w} \\ &= \sqrt{2} e^{i\frac{\pi}{4}} \end{aligned}$$

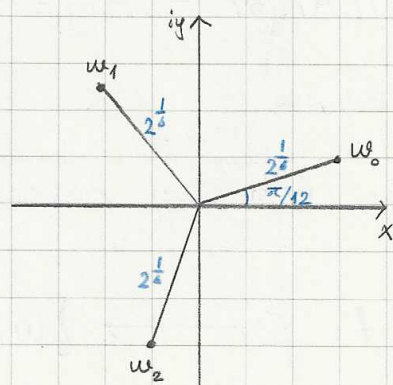
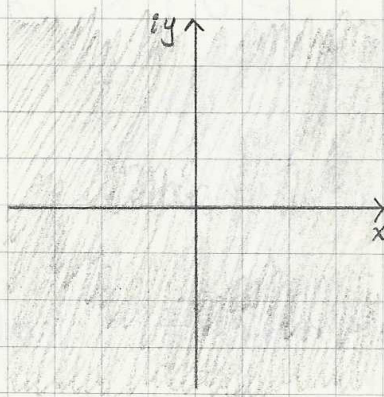
$$\Rightarrow w = 2^{\frac{1}{6}} e^{i(\frac{\pi}{12} + \frac{2k\pi}{3})}, \quad (k=0,1,2)$$

$$w_0 = 2^{\frac{1}{6}} e^{i\frac{\pi}{12}}$$

$$w_1 = 2^{\frac{1}{6}} e^{i\frac{3\pi}{4}}$$

$$w_2 = 2^{\frac{1}{6}} e^{i\frac{17\pi}{12}}$$

$$\begin{aligned} f: \mathbb{C} &\rightarrow \mathbb{C} \\ z &\mapsto f(z) = \sqrt[3]{z} \end{aligned}$$



Ters Fonksiyon

$$f: \mathbb{C} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}$$
$$z \longmapsto \frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{\|z\|^2}$$

şeklinde tanımlanan fonksiyona **ters fonksiyon** denir.

Örnek

$\|z\| = 1$ denklemini sağlayan karmaşık sayıların

$f(z) = \frac{1}{z}$ fonksiyonu altındaki görüntüsünü bulunuz.

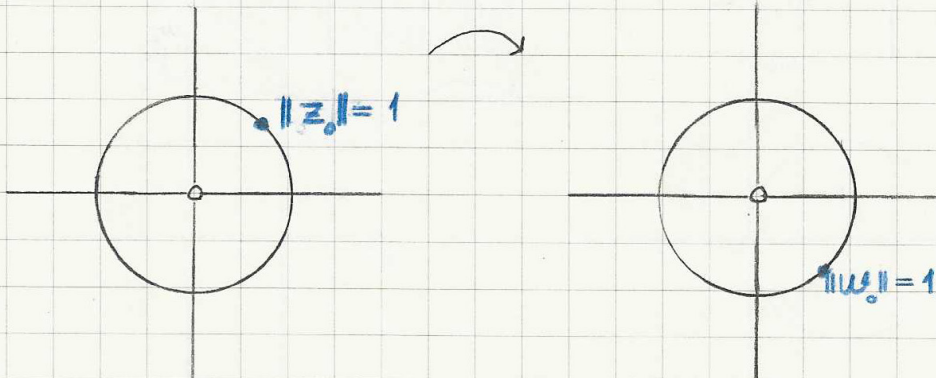
Cözüm

$$f(z) = \frac{1}{z} \text{ olmak üzere,}$$

$$w := \frac{1}{z}$$

tanımlayalım.

$$w = \frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{\|z\|^2} \implies w = \bar{z}$$



Örnek

$0 < \|z\| < 1$ eşitsizliğini sağlayan karmaşık sayıların $f(z) = \frac{1}{z}$ fonksiyonu altındaki görüntüsünü bulunuz.

Çözüm

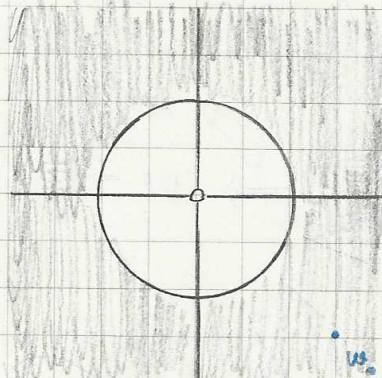
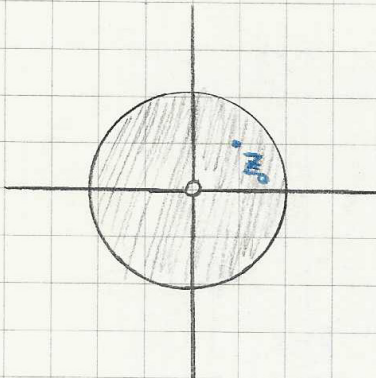
$$f(z) = \frac{1}{z} \text{ olmak üzere,}$$

$$w := \frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{\|z\|^2}$$

tanımlayalım.

$$0 < \|z\| < 1 \implies 1 < \frac{1}{\|z\|} < \infty, \left(\|w\| = \frac{\|\bar{z}\|}{\|z\|^2} = \frac{1}{\|z\|} \right)$$

$$\implies 1 < \|w\| < \infty$$



Örnek

$x = 1$ doğrusunun $f(z) = \frac{1}{z}$ fonksiyonu altındaki görüntüsünü bulunuz.

Çözüm

$$f(z) = \frac{1}{z} \text{ olmak üzere,}$$

$$f(z) = \frac{1}{1+iy}$$

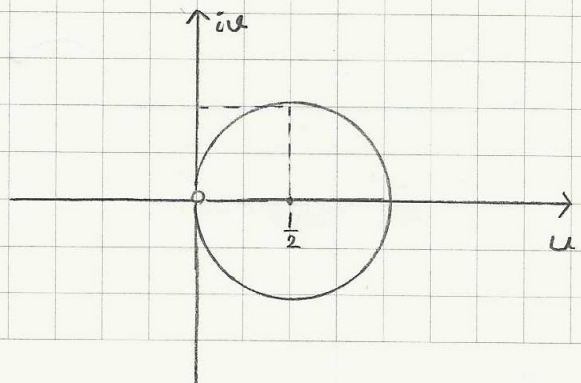
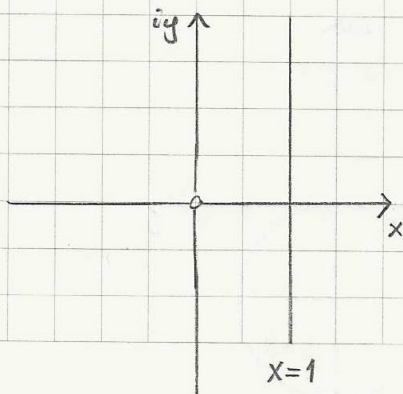
$$= \frac{1-iy}{1+y^2}$$

$$= \frac{1}{1+y^2} + i\left(-\frac{y}{1+y^2}\right)$$

$$\Rightarrow u := \frac{1}{1+y^2} \text{ ve } v := -\frac{y}{1+y^2} \text{ dersek, } y = -\frac{v}{u}, u \neq 0 \text{ için}$$

$$u = u^2 + v^2 \Rightarrow (u^2 - u) + v^2 = 0$$

$$\Rightarrow \left(u - \frac{1}{2}\right)^2 + v^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 \text{ çemberi elde edilir.}$$



Örnek

$iy = i$ doğrusunun $f(z) = \frac{1}{z}$ fonksiyonu altındaki görüntüsünü bulunuz.

Cözüm

$$f(z) = \frac{1}{z} \text{ olmak üzere,}$$

$$f(z) = \frac{1}{x+iy}$$

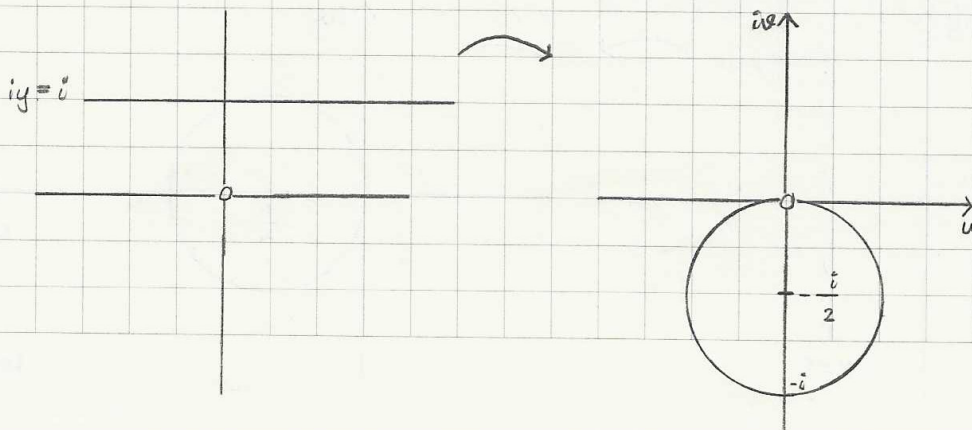
$$= \frac{x-iy}{x^2+y^2}$$

$$= \frac{x}{x^2+y^2} + i \left(\frac{-y}{x^2+y^2} \right)$$

$$\Rightarrow u := \frac{x}{x^2+y^2} \text{ ve } v := \frac{-y}{x^2+y^2} \text{ tanımlanabilir. yaparsak } x = -\frac{u}{v}, v \neq 0 \text{ için,}$$

$$u = u^2 + v^2 \Rightarrow (u^2 - u) + v^2 = 0$$

$$\Rightarrow \left(u - \frac{1}{2}\right)^2 + v^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2$$



Örnek

$$f: \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$$
$$z \longmapsto \frac{1}{z}$$

şeklinde tanımlanan f fonksiyonu $\mathbb{C}_\infty$ genişlemesi üzerinde nasıl tanımlanır?

Cözüm

f fonksiyonunun,

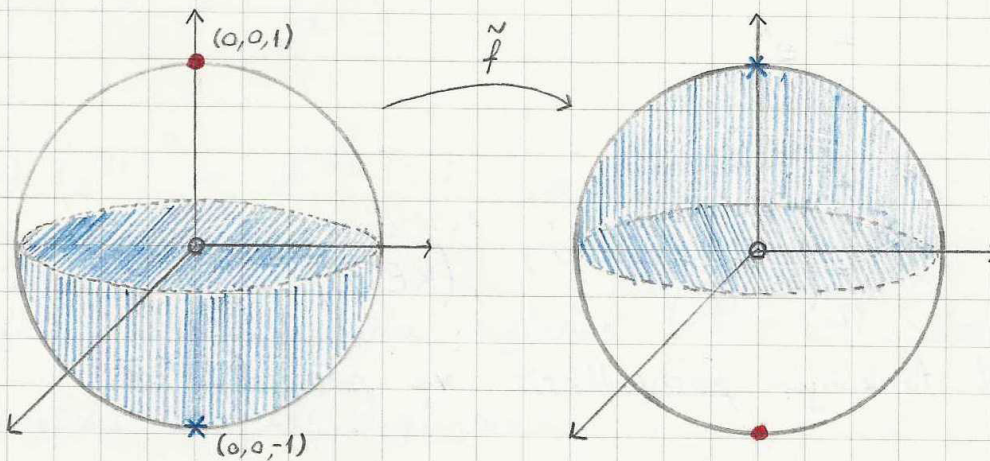
$$\tilde{f}: \mathbb{C}_\infty \longrightarrow \mathbb{C}_\infty; \quad \tilde{f}(z) = \begin{cases} \frac{1}{z} & , z \in \mathbb{C} \setminus \{0\} \\ \infty & , z = 0 \\ 0 & , z = \infty \end{cases}$$

şeklinde $\mathbb{C}_\infty$ genişlemesi vardır

Ayrıca, $\mathbb{C}_\infty$ ile S_3 arasında bire-bir eşleme olduğundan,

$$\tilde{f}: S_3 \longrightarrow S_3$$

şeklinde tanımlanabilir.



Elementer Fonksiyonlar

A) Üstel Fonksiyonlar

$$e: \begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \setminus \{0\} \\ z & \longmapsto & e^z \end{array}$$

şeklinde tanımlanan fonksiyona üstel fonksiyon denir.

$$\begin{aligned} e^z &= e^{x+iy} \\ &= e^x e^{iy} \\ &= e^x (\cos y + i \sin y) \\ &= e^x \cos y + i e^x \sin y \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \|e^z\| &= \sqrt{(e^x)^2 \cos^2 y + (e^x)^2 \sin^2 y} \\ &= \sqrt{(e^x)^2} \\ &= |e^x| \\ &= e^x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} e^z &= e^{x+iy} \\ &= e^{x+i(y+2k\pi)} \quad , (k \in \mathbb{Z}) \end{aligned}$$

Üstel fonksiyon periyodiktir ve periyodu $2\pi i$

Özellikler :

$$\begin{aligned} \text{i)} \quad e^0 &= e^0 e^{i0} \\ &= 1(\cos 0 + i \sin 0) \\ &= 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{ii)} \quad e^{\bar{z}_1 + \bar{z}_2} &= e^{(x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)} \\ &= e^{(x_1 + x_2)} (\cos(y_1 + y_2) + i \sin(y_1 + y_2)) \\ &= e^{x_1} e^{x_2} (\cos y_1 + i \sin y_1) (\cos y_2 + i \sin y_2) \\ &= e^{\bar{z}_1} e^{\bar{z}_2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{iii)} \quad e^{-\bar{z}} &= e^{-x - iy} \\ &= e^{-x} (\cos(-y) + i \sin(-y)) \\ &= \frac{1}{e^x} \frac{(\cos(y) + i \sin(y)) (\cos(y) + i \sin(y))}{(\cos(y) + i \sin(y))} \\ &= \frac{1}{e^{\bar{z}}} \end{aligned}$$

$$\text{iv)} \quad (e^{\bar{z}_1})^n = e^{n\bar{z}_1}, \quad n \in \mathbb{Z}$$

Uyarı : Reel uzayda sağlanan $(e^x)^y = (e^y)^x$ özelliği

Kompleks uzayda sağlanmaz.

B) Logaritmik Fonksiyonlar

$$\log : \mathbb{C} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{C}$$
$$z \longmapsto \log z = \ln \|z\| + i(\operatorname{Arg} z + 2k\pi)$$

şeklinde tanımlanan fonksiyona logaritmik fonksiyon denir.

$$z = \|z\| (\cos \theta + i \sin \theta)$$
$$= \|z\| e^{i\theta}, \quad -\pi < \theta \leq \pi$$

$-\pi < \theta \leq \pi$ kısıtlamasında fonksiyon 1-1 ve örten,
dolayısıyla tersinir olacaktır.

$w = u + iv$ şeklinde bir karmaşık sayı olmak üzere,

$$w = \log z \iff z = e^w$$
$$= e^{u+iv}$$
$$= e^u e^{iv}$$
$$= e^u (\cos v + i \sin v)$$
$$= \|z\| (\cos(\operatorname{Arg} z + 2k\pi) + i \sin(\operatorname{Arg} z + 2k\pi))$$

$$\implies u = \ln \|z\|$$

$$\implies w = \log z$$

$$= u + iv$$

$$= \ln \|z\| + i(\operatorname{Arg} z + 2k\pi)$$

Örnek

$$\begin{aligned}\log(1+i) &= \ln \|1+i\| + i(\operatorname{Arg} z + 2k\pi) \\ &= \ln \sqrt{2} + i(\pi/4 + 2k\pi)\end{aligned}$$

Özellikler:

$$\begin{aligned}\text{i)} \quad \log 1 &= \ln \|1\| + i \operatorname{Arg}(1) \\ &= 0 + i0 \\ &= 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{ii)} \quad \log(z_1 z_2) &= \ln \|z_1 z_2\| + i \operatorname{Arg}(z_1 z_2) \\ &= \ln(\|z_1\| \|z_2\|) + i(\operatorname{Arg} z_1 + \operatorname{Arg} z_2) \\ &= \ln \|z_1\| + \ln \|z_2\| + i \operatorname{Arg} z_1 + i \operatorname{Arg} z_2 \\ &= \log z_1 + \log z_2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{iii)} \quad \log\left(\frac{1}{z}\right) &= \ln \left\| \frac{1}{z} \right\| + i \operatorname{Arg}\left(\frac{1}{z}\right) \\ &= \ln 1 - \ln \|z\| + i(\operatorname{Arg} 1 - \operatorname{Arg} z) \\ &= -\ln \|z\| - i \operatorname{Arg} z \\ &= -\log z\end{aligned}$$

$$\text{iv)} \quad \log z^n = n \log z, \quad n \in \mathbb{Z}$$

C) Kompleks Kuvvetler

$$f: \mathbb{C} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{C}$$
$$z \longmapsto z^\alpha = e^{\alpha \log z}, \quad \alpha \in \mathbb{C}$$

fonksiyonunu düşünelim.

$$f(z) = z^\alpha$$
$$= e^{\log z^\alpha}$$
$$= e^{\alpha \log z}$$

Örnek

$\alpha = 1-i$ ve $z = 1+i$ olmak üzere,

$$f(z) = (1+i)^{(1-i)}$$
$$= e^{\log(1+i)^{(1-i)}}$$
$$= e^{(1-i) \log(1+i)}$$
$$= e^{(1-i) (\ln \|1+i\| + i \operatorname{Arg}(1+i))}$$
$$= e^{(1-i) (\ln \sqrt{2} + i \frac{\pi}{4})}$$
$$= e^{(\ln \sqrt{2} + \frac{\pi}{4}) + i(\frac{\pi}{4} - \ln \sqrt{2})}$$
$$= e^{(\ln \sqrt{2} + \frac{\pi}{4})} \left(\cos\left(\frac{\pi}{4} - \ln \sqrt{2}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{4} - \ln \sqrt{2}\right) \right)$$

D) Üs Fonksiyonu

$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z & \longmapsto & \alpha^z = e^{z \log \alpha} \end{array}, \quad 0 \neq \alpha \in \mathbb{C}$$

şeklinde tanımlanan fonksiyona üs fonksiyonu denir.

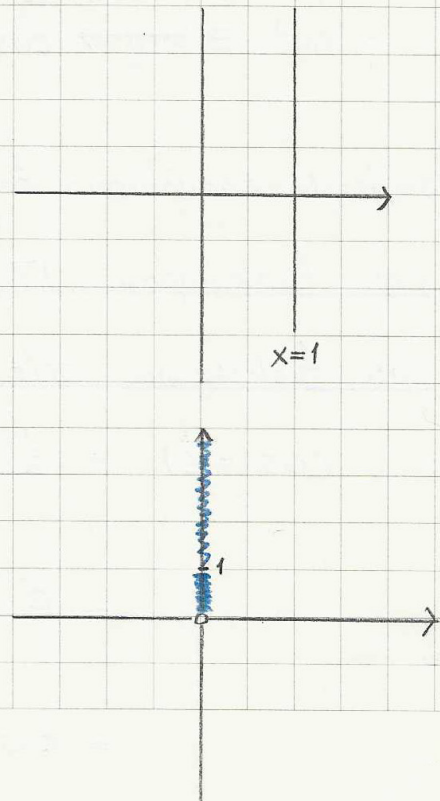
$$\begin{aligned} f(z) &= \alpha^z \\ &= e^{\log \alpha^z} \\ &= e^{z \log \alpha} \end{aligned}$$

Örnek

$x = 1$ doğrusunun i^z fonksiyonu altındaki görünüşünü bulunuz.

Cözüm

$$\begin{aligned} f(z) &= i^z \\ &= e^{z \log(i)} \\ &= e^{(1+iy)(\ln|i| + i \operatorname{Arg}(i))} \\ &= e^{(1+iy)(0 + i \frac{\pi}{2})} \\ &= e^{-\frac{\pi}{2}y + i \frac{\pi}{2}} \\ &= i e^{-\frac{\pi}{2}y} \end{aligned}$$



Trigonometrik Fonksiyonlar

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$$

$$e^{-i\theta} = \cos \theta - i \sin \theta$$

şeklindeki Euler formülü göz önünde bulundursun.

Buradan,

$$\cos \theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$$

$$\sin \theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} \quad \text{eşitlikleri elde edilebilir.}$$

cos Fonksiyonu

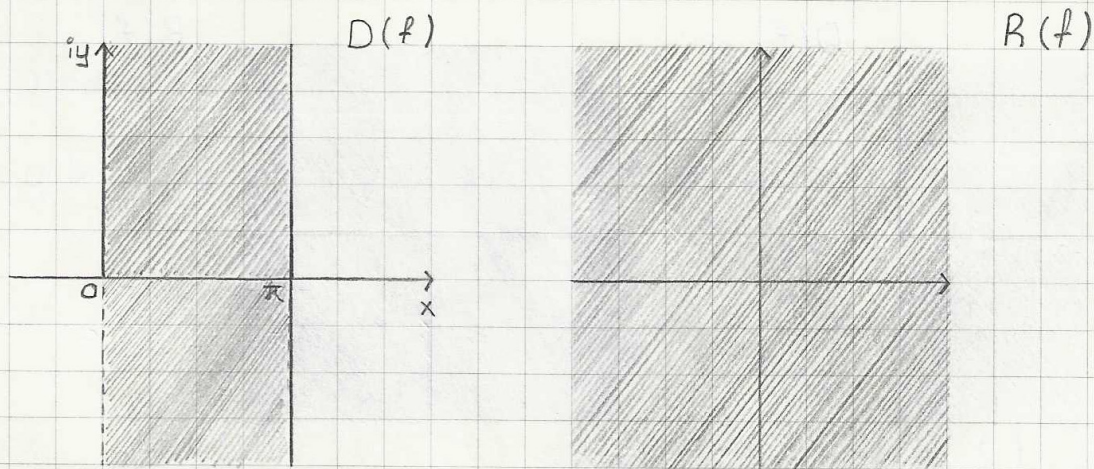
$$\begin{array}{lcl} f: \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z & \longmapsto & \cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \end{array}$$

şeklinde tanımlanan fonksiyona cos fonksiyonu denir.

cos fonksiyonu 2π periyodiktir

cos fonksiyonu çift fonksiyondur:

$$\begin{aligned} \cos(-z) &= \frac{e^{i(-z)} + e^{-i(-z)}}{2} \\ &= \frac{e^{-iz} + e^{iz}}{2} \\ &= \cos z \end{aligned}$$



$f: \{z \in \mathbb{C} \mid z = x + iy, 0 < x \leq \pi, y \in \mathbb{R}\} \cup \{iy \in \mathbb{C} : y \in \mathbb{R}^+\} \rightarrow \mathbb{C}$
 kısıtlaması altında $\cos$ fonksiyonu 1-1 ve örten olmaktadır.

sin Fonksiyonu

$$f: \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$$

$$z \longmapsto \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$$

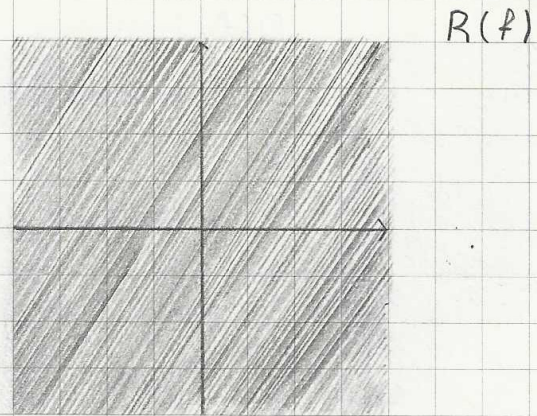
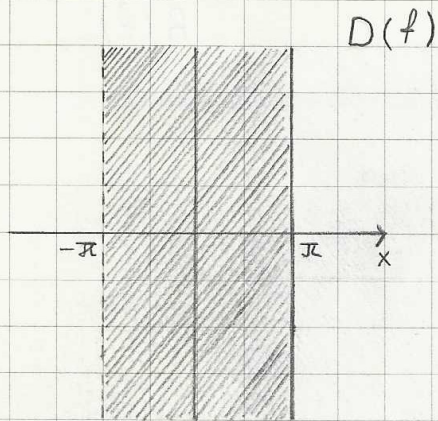
şeklinde tanımlanan fonksiyona sin fonksiyonu denir.

sin fonksiyonu 2π periyodiktir.

sin fonksiyonu tek fonksiyondur:

$$\begin{aligned} \sin(-z) &= \frac{e^{i(-z)} - e^{-i(-z)}}{2i} \\ &= \frac{e^{-iz} - e^{iz}}{2i} \\ &= -\frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} \end{aligned}$$

$$= -\sin z$$



$f: \{z \in \mathbb{C} \mid z = x + iy, -\pi < x \leq \pi, y \in \mathbb{R}\} \longrightarrow \mathbb{C}$
 kısıtlaması altında sin fonksiyonu 1-1 ve örzen olmaktadır.

Örnek

$x = 0$ doğrusunun $\sin(z)$ fonksiyonu altındaki görüntüsünü bulunuz.

Cözüm

$x = 0$ için inceleyelim:

$$\sin z = \sin(0 + iy)$$

$$= \frac{e^{i(iy)} - e^{-i(iy)}}{2i}$$

$$= \frac{e^{-y} - e^y}{2i}$$

$$= -i \left(\frac{e^{-y} - e^y}{2} \right)$$

$$= i \left(\frac{e^y - e^{-y}}{2} \right)$$

Şimdi,

$y \geq 1$ iken:

$$y \geq 1 \implies e^y \geq e$$

$$\implies e^{-y} \leq \frac{1}{e}$$

$$\implies -e^{-y} \geq -\frac{1}{e}$$

$$\implies \frac{e^y - e^{-y}}{2} \geq \frac{1}{2} \left(e - \frac{1}{e} \right)$$

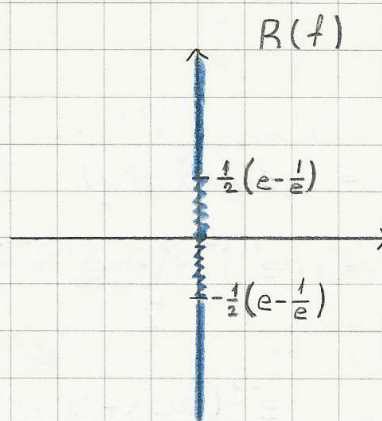
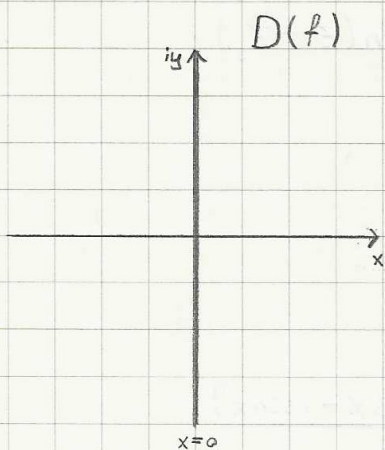
$0 \leq y \leq 1$ iken:

$$0 \leq y \leq 1 \implies 1 \leq e^y \leq e$$

$$\implies \frac{1}{e} \leq e^{-y} \leq 1$$

$$\implies -1 \leq -e^{-y} \leq -\frac{1}{e}$$

$$\implies 0 \leq \frac{e^y - e^{-y}}{2} \leq \frac{1}{2} \left(e - \frac{1}{e} \right)$$



Özellikler

$$\begin{aligned} \text{i)} \quad \sin^2 z + \cos^2 z &= \left(\frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} \right)^2 + \left(\frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \right)^2 \\ &= -\frac{e^{i2z} - 2e^{iz}e^{-iz} + e^{-i2z}}{4} + \frac{e^{i2z} + 2e^{iz}e^{-iz} + e^{-i2z}}{4} \\ &= 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{ii)} \quad \sin z_1 \cos z_2 + \cos z_1 \sin z_2 &= \frac{e^{iz_1} - e^{-iz_1}}{2i} \cdot \frac{e^{iz_2} + e^{-iz_2}}{2} + \frac{e^{iz_1} + e^{-iz_1}}{2} \cdot \frac{e^{iz_2} - e^{-iz_2}}{2i} \\ &= \frac{e^{i(z_1+z_2)} - e^{-i(z_1+z_2)}}{4i} + \frac{e^{i(z_1+z_2)} - e^{-i(z_1+z_2)}}{4i} \\ &= \frac{e^{i(z_1+z_2)} - e^{-i(z_1+z_2)}}{2i} \\ &= \sin(z_1 + z_2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{iii)} \quad \sin z &= \sin(x+iy) \\ &= \frac{e^{i(x+iy)} - e^{-i(x+iy)}}{2i} \\ &= \frac{e^{-y}(\cos x + i \sin x) - e^y(\cos x - i \sin x)}{2i} \\ &= \sin x \left(\frac{e^y + e^{-y}}{2} \right) + i \cos x \left(\frac{e^y - e^{-y}}{2} \right) \\ &= \sin x \cosh y + i \cos x \sinh y \end{aligned}$$

Benzer şekilde,

$$\cos z = \cos x \cosh y - i \sin x \sinh y$$

Tanım

$$\tan z := \frac{\sin z}{\cos z}$$

$$\sec z := \frac{1}{\cos z}$$

$$\cot z := \frac{\cos z}{\sin z}$$

$$\operatorname{cosec} z := \frac{1}{\sin z}$$

olarak tanımlanır.

$$D(\tan) = \mathbb{C} \setminus \{z \in \mathbb{C} \mid \cos z = 0\}$$

$$\text{öyle ki } \cos z = 0 \implies \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = 0$$

$$\implies e^{iz} + \frac{1}{e^{iz}} = 0$$

$$\implies \frac{(e^{iz})^2 + 1}{(e^{iz})} = 0$$

$$\implies (e^{iz})^2 + 1 = 0$$

$$\implies e^{iz} = -i \quad \vee \quad e^{iz} = i$$

$$\implies iz = \log(-i) \quad \vee \quad iz = \log i$$

$$\implies iz = (n\| -i\| + i\operatorname{Arg}(-i)) \quad \vee \quad iz = (n\| i\| + i\operatorname{Arg}(i))$$

$$\implies z = \left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right) \quad \vee \quad z = \left(-\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right)$$

$$\implies z = \frac{\pi}{2} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

Hiperbolik Fonksiyonlar

cosh Fonksiyonu

$$f: \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$$
$$z \longmapsto \cosh z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}$$

şeklinde tanımlanan fonksiyona cosh fonksiyonu denir.

cosh fonksiyonu $2\pi i$ periyodiktir

cosh fonksiyonu çift fonksiyondur :

$$\cosh(-z) = \frac{e^{-z} + e^{-(-z)}}{2}$$
$$= \cosh z$$

sinh Fonksiyonu

$$f: \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$$
$$z \longmapsto \sinh z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}$$

şeklinde tanımlanan fonksiyona sinh fonksiyonu denir.

sinh fonksiyonu $2\pi i$ periyodiktir

sinh fonksiyonu tek fonksiyondur :

$$\sinh(-z) = \frac{e^{-z} - e^{-(-z)}}{2}$$
$$= -\frac{e^z - e^{-z}}{2}$$
$$= -\sinh z$$

Özellikler:

$$\begin{aligned} \text{i)} \quad \cos(iz) &= \frac{e^{i(iz)} + e^{-i(iz)}}{2} \\ &= \frac{e^{-z} + e^z}{2} \\ &= \cosh(z) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{ii)} \quad \sin(iz) &= \frac{e^{i(iz)} - e^{-i(iz)}}{2i} \\ &= \frac{e^{-z} - e^z}{2i} \\ &= i \frac{e^z - e^{-z}}{2} \\ &= i \sinh z \end{aligned}$$

$$\text{iii)} \quad \cosh(iz) = \cos z$$

$$\text{iv)} \quad \sinh(iz) = i \sin z$$

$$\text{v)} \quad \cosh^2 z - \sinh^2 z = 1$$

$$\text{vi)} \quad \sinh(z_1 + z_2) = \sinh z_1 \cosh z_2 + \cosh z_1 \sinh z_2$$

$$\text{vii)} \quad \cosh(z_1 + z_2) = \cosh z_1 \cosh z_2 + \sinh z_1 \sinh z_2$$

Ters Trigonometrik Fonksiyonlar

arccos Fonksiyonu

$$\begin{aligned} f: \mathbb{C} &\longrightarrow \mathbb{C} \\ z &\longmapsto \arccos z \end{aligned}$$

fonksiyonu aşağıdaki

$$z = \cos w = \frac{e^{iw} + e^{-iw}}{2}$$

denkleminin çözümü şeklinde tanımlanmaktadır.

Öyleyse,

$$v := e^{iw}$$

gibi tanımlarsak,

$$2z = v + \frac{1}{v}$$

ve burada, eşitliğin her iki tarafını v ile çarparsak,

$$v^2 - 2vz + 1 = 0$$

kuadratik denklemini elde ederiz. Bu kuadratik denklemi çözersek,

$$v_1 = z + \sqrt{z^2 - 1} \quad \text{ve} \quad v_2 = z - \sqrt{z^2 - 1}$$

eşitliklerini elde ederiz. Burada, z kompleks değerli olduğundan

$\sqrt{z^2 - 1}$ iki olası değere sahip çok değerli kök fonksiyonudur.

Böylece,

$$\arccos z = w = \frac{1}{i} \log v = \frac{1}{i} \log (z \mp \sqrt{z^2 - 1})$$

$$= -i \log (z + \sqrt{z^2 - 1} \cdot e^{\frac{i}{2} \arg(z^2 - 1)})$$

arcsin Fonksiyonu

$$\begin{aligned} f: \mathbb{C} &\longrightarrow \mathbb{C} \\ z &\longmapsto \arcsin z \end{aligned}$$

fonksiyonu aşağıdaki

$$z = \sin w = \frac{e^{iw} - e^{-iw}}{2i}$$

denkleminin çözümü şeklinde tanımlanmaktadır.

Öyleyse,

$$v := e^{iw}$$

gibi tanımlarsak,

$$2iz = v - \frac{1}{v}$$

ve burada eşitliğin her iki tarafını v ile çarparsak,

$$v^2 - 2izv - 1 = 0$$

kuadratik denklemini elde ederiz. Bu kuadratik denklemi çözersek,

$$v_1 = iz + \sqrt{1-z^2} \quad \text{ve} \quad v_2 = iz - \sqrt{1-z^2}$$

eşitliklerini elde ederiz. Burada, z kompleks değerli olduğundan

$\sqrt{1-z^2}$ iki olası değere sahip çok değerli kök fonksiyonudur.

Böylece,

$$\begin{aligned} \arcsin z = w &= \frac{1}{i} \log v = \frac{1}{i} \log (iz \mp \sqrt{1-z^2}) \\ &= -i \log \left(iz + \sqrt{1-z^2} e^{\frac{i}{2} \arg(1-z^2)} \right) \end{aligned}$$

arctan Fonksiyonu

$$f: \mathbb{C} \setminus \{-i, i\} \longrightarrow \mathbb{C}$$
$$z \longmapsto \arctan z$$

fonksiyonu aşağıdaki

$$z = \tan w = \frac{\sin w}{\cos w} = \frac{1}{i} \left(\frac{e^{iw} - e^{-iw}}{e^{iw} + e^{-iw}} \right) = \frac{1}{i} \left(\frac{e^{2iw} - 1}{e^{2iw} + 1} \right)$$

denkleminin çözümü şeklinde tanımlanmaktadır.

Şimdi, bu denklemi e^{2iw} için çözersek,

$$iz = \frac{e^{2iw} - 1}{e^{2iw} + 1} \implies e^{2iw} = \frac{iz + 1}{1 - iz} = \frac{i - z}{i + z}$$

$$\implies w = \frac{1}{2i} \log \left(\frac{i - z}{i + z} \right) = \arctan z$$

esitliğini elde ederiz.

Örnek

$$\begin{aligned} \arcsin(1+i) &= \frac{1}{i} \log \left(i(1+i) + \sqrt{1-(1+i)^2} \right) \\ &= -i \log \left(i-1 + \sqrt{1-2i} \right) \end{aligned}$$

olmak üzere, logaritmik fonksiyon $\sqrt{1-2i}$ ifadesini içerdüğinden standart formda bir çözüm elde edebilmek için

$$\alpha := \sqrt{1-2i}$$

tanımlamasını yapalım.

$$\begin{aligned}\alpha &:= \sqrt{1-2i} \implies \alpha^2 = 1-2i \\ &= \sqrt{5} e^{i \tan^{-1}(-2)} \\ &= \|\alpha\|^2 e^{i 2\theta}, \quad (\text{De Moivre})\end{aligned}$$

$$\implies \|\alpha\| = \sqrt[4]{5} \quad \text{ve} \quad 2\theta = \tan^{-1}(-2) + 2k\pi, \quad k = 0, 1 \quad \text{için}$$

$$\theta_1 = \frac{\tan^{-1}(-2)}{2} \quad \text{ve} \quad \theta_2 = \frac{\tan^{-1}(-2)}{2} + \pi$$

olarak bulunur.

Dolayısıyla,

$$\arcsin(1+i) = -i \log(1-i + \sqrt[4]{5} e^{i \tan^{-1}(-2)})$$

İstenen çözümüdür.

Örnek

$$\begin{aligned}\operatorname{arctan}(1+i) &= \frac{1}{2i} \log \left(\frac{i-(1+i)}{i+(1+i)} \right) \\ &= \frac{1}{2i} \log \left(\frac{2i-1}{5} \right) \\ &= \frac{1}{2i} \log \left(-\frac{1}{5} + i\frac{2}{5} \right) \\ &= \frac{1}{2i} \left[\ln \frac{1}{\sqrt{5}} + i \operatorname{arctan}(-2) \right] \\ &= \frac{1}{2} \cdot \left[i \ln \sqrt{5} + \operatorname{arctan}(-2) \right]\end{aligned}$$

olarak bulunur.

Limit

$f: \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ bir fonksiyon olmak üzere,

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = L < \infty$$

$\Rightarrow f$ fonksiyonunun z_0 noktasında limiti vardır denir.

ϵ - δ Tanımı

Her $\epsilon > 0$ için $\exists \delta = \delta(\epsilon, z_0) > 0$ öyle ki

$$\|z - z_0\| < \delta \implies \|f(z) - L\| < \epsilon$$

Örnek

$f(z) = \bar{z}$ fonksiyonunun $z_0 = 1+i$ noktasındaki

limitinin $1-i$ olduğunu gösteriniz.

Çözüm

Her $\epsilon > 0$ için $\exists \delta = \delta(\epsilon, 1+i) > 0$ öyle ki

$$\|z - z_0\| < \delta \implies \|f(z) - L\| < \epsilon$$

$$\begin{aligned} \|a+ib - (1+i)\| < \delta &\implies \|a-ib - (1-i)\| = \|a-1 + i(-b+1)\| \\ &= \sqrt{(a-1)^2 + (b-1)^2} < \epsilon = \delta \end{aligned}$$

Örnek

$$f(z) = z + 1$$

fonksiyonunun herhangi bir $z_0 \in \mathbb{C}$ noktasında limiti vardır ve $z_0 + 1$ noktasına eşittir. Gösteriniz.

Çözüm

Her $\varepsilon > 0$ için $\exists \delta > 0$ öyle ki

$$\begin{aligned} \|z - z_0\| < \delta &\implies \|f(z) - L\| = \|(z+1) - (z_0+1)\| \\ &= \|z - z_0\| < \varepsilon = \delta \end{aligned}$$

$\implies f(z)$ fonksiyonunun her noktada limiti vardır.

NOT : $f(z)$ bir polinom ise her noktada limiti vardır

$$f(z) = a_0 + a_1 z + \dots + a_n z^n, \quad n \in \mathbb{N}, \quad a_k \in \mathbb{C}, \quad k = 1, 2, \dots, n$$

Soru

$f(z) = z^2$ fonksiyonunun herhangi bir $z_0 \in \mathbb{C}$ noktasında limiti vardır. Gösteriniz.

Çözüm

Her $\varepsilon > 0$ için $\exists \delta > 0$ öyle ki

$$\begin{aligned} \|z - z_0\| < \delta &\implies \|f(z) - L\| = \|z^2 - z_0^2\| \\ &= \|z - z_0\| \|z + z_0\| \end{aligned}$$

olmak üzere,

$$\begin{aligned} \|z + z_0\| &= \|z + z_0 + z_0 - z_0\| \\ &\leq \|z - z_0\| + 2\|z_0\| \end{aligned}$$

olduğundan,

$$\begin{aligned} \|z - z_0\| \|z + z_0\| &\leq \|z - z_0\| (\|z - z_0\| + 2\|z_0\|) \\ &< \delta (\delta + 2\|z_0\|) = \varepsilon \end{aligned}$$

Teorem

$f(z)$ ve $g(z)$ iki fonksiyon olmak üzere
 $z_0 \in \mathbb{C}$ noktasında limitleri olsun.

$$a) \lim_{z \rightarrow z_0} f(z) \mp g(z) = \lim_{z \rightarrow z_0} f(z) \mp \lim_{z \rightarrow z_0} g(z)$$

$$b) \lim_{z \rightarrow z_0} f(z) g(z) = \lim_{z \rightarrow z_0} f(z) \lim_{z \rightarrow z_0} g(z)$$

$$c) \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = \frac{\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)}{\lim_{z \rightarrow z_0} g(z)}, \quad g \neq 0, \quad z \in B(z_0, \delta)$$

Örnek

$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{z}{\bar{z}}$ limiti yoktur. Gösteriniz.

Cözüm

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{z}{\bar{z}} = \frac{z_0}{\bar{z}_0} \quad \text{limiti var ise teoremden,}$$

$$\lim_{z \rightarrow z_0} z = z_0 \quad \wedge \quad \lim_{z \rightarrow z_0} \bar{z} = \bar{z}_0 \quad \text{öyle ki } z \in B(z_0, \delta) \text{ için } \bar{z} \neq 0$$

Fakat, $\lim_{z \rightarrow 0} \bar{z} = 0$ olduğundan teorem $z_0 = 0$ noktası için uygulanamaz.

Teorem

$f(z) = u(x, y) + i v(x, y)$ fonksiyon olmak üzere

$z_0 = x_0 + i y_0 \in \mathbb{C}$ olsun.

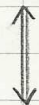
$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = (L_1 + i L_2)$$



$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} u(x, y) = L_1 \quad \wedge \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} v(x, y) = L_2$$

İspat

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = (L_1 + i L_2)$$



Her $\varepsilon > 0$ için $\exists \delta > 0$ öyle ki

$$\|z - z_0\| = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \delta \implies \|f(z) - (L_1 + i L_2)\| < \varepsilon$$

$$\implies \|(u(x, y) - L_1) + i(v(x, y) - L_2)\| < \varepsilon$$

$$\frac{|u(x, y) - L_1|}{|v(x, y) - L_2|} \leq \sqrt{(u(x, y) - L_1)^2 + (v(x, y) - L_2)^2} < \varepsilon$$



$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} u(x, y) = L_1 \quad \wedge \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} v(x, y) = L_2$$

ÖRNEK

$$\lim_{z \rightarrow 0} f(z) = \frac{z}{\bar{z}} \quad \text{limesi yoktur. Gösteriniz.}$$

Cözüm

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{z}{\bar{z}} = \frac{z}{z} \\ &= \frac{(x+iy)^2}{x^2+y^2} \\ &= \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} + i \left(\frac{2xy}{x^2+y^2} \right) \\ &\quad \underbrace{\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}}_{u(x,y)} + i \underbrace{\left(\frac{2xy}{x^2+y^2} \right)}_{v(x,y)} \end{aligned}$$

almak üzere, $y = mx$ doğrusu ile yaklaşırsak

$$\begin{aligned} \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} v(x,y) &= \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{2xy}{x^2+y^2} \\ &= \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y=mx}} \frac{2mx^2}{x^2+m^2x^2} \\ &= \frac{2m}{1+m^2} \end{aligned}$$

$$\implies \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} v(x,y) \quad \text{yoktur.}$$

$$\implies \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{z}{\bar{z}} \quad \text{yoktur.}$$

Lemma

$f(z)$ fonksiyonunun z_0 noktasında limiti olmak üzere,
 $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = L$ alsun.

$g(z)$ fonksiyonunun L noktasında limiti var ise
 $(f \circ g)(z)$ fonksiyonunun z_0 noktasında limiti vardır.

Örnek

$h(z) = \sqrt{z^3}$ fonksiyonunun $z_0 = 1$ noktasında limiti vardır.

Gösteriniz.

Çözüm

$$f(z) := z^3$$

$$g(z) := \sqrt{z}$$

gibi tanımlarsak

$$h(z) = (g \circ f)(z) = g(f(z))$$

olduğu görülmektedir.

Şimdi,

$$\begin{aligned} f: \mathbb{C} &\longrightarrow \mathbb{C} \\ z &\longmapsto z^3 \end{aligned}$$

bir polinom fonksiyon olduğundan her noktada limiti vardır.

Böylece,

$$\lim_{z \rightarrow 1} z^3 = 1 = L$$

Diğer taraftan,

$$\begin{aligned} g: \mathbb{C} &\longrightarrow \mathbb{C} \\ z &\longmapsto \sqrt{z} \end{aligned}$$

olmak üzere,

$$\lim_{z \rightarrow 1} \sqrt{z} = \lim_{z \rightarrow 1} \|z\|^{\frac{1}{2}} e^{i \frac{\text{Arg } z}{2}}$$

$$= \lim_{(r, \theta) \rightarrow (1, 0)} \sqrt{r} \left(\cos \frac{\theta}{2} + i \sin \frac{\theta}{2} \right) \quad \text{öyle ki } z = re^{i\theta} \Rightarrow 1 = 1e^{i0}$$

$$= \lim_{(r, \theta) \rightarrow (1, 0)} \left(\underbrace{\sqrt{r} \cos \frac{\theta}{2}}_{u(r, \theta)} + i \underbrace{\sqrt{r} \sin \frac{\theta}{2}}_{v(r, \theta)} \right)$$

$$= 1 + i0$$

$$= 1$$

olarak bulunur.

Dolayısıyla,

$$\lim_{z \rightarrow 1} \sqrt{z^3} = 1$$

Örnek

$\lim_{z \rightarrow -1} \sqrt{z}$ limiti yoktur.

Gösteriniz.

Cözüm

$$\lim_{z \rightarrow -1} \sqrt{z} = \lim_{z \rightarrow -1} \|z\|^{\frac{1}{2}} e^{i \frac{\text{Arg} z}{2}}$$

$$= \lim_{(r, \theta) \rightarrow (1, -\pi)} \sqrt{r} e^{i \frac{\theta}{2}}$$

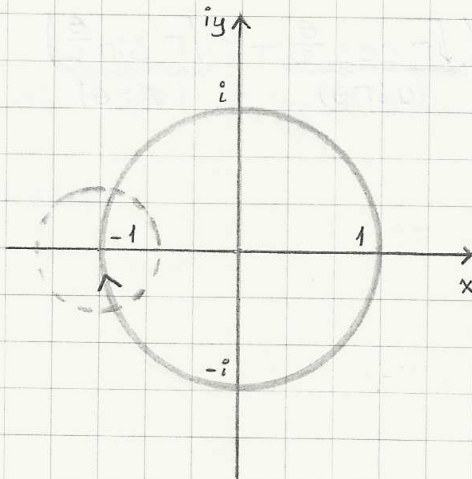
$$\text{öyle ki } z = \|z\| e^{i\theta} \Rightarrow -1 = \| -1 \| e^{i(-\pi)}$$

$$= \lim_{(r, \theta) \rightarrow (1, -\pi)} \sqrt{r} \cos \frac{\theta}{2} + i \sqrt{r} \sin \frac{\theta}{2}$$

$$= 0 + i(-1)$$

$$= -i$$

$$= L_1$$



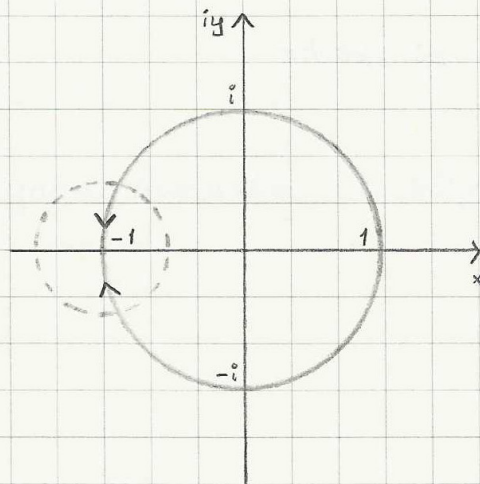
Diğer taraftan,

$$\begin{aligned}\lim_{z \rightarrow -1} \sqrt{z} &= \lim_{z \rightarrow -1} \|z\|^{\frac{1}{2}} e^{i \frac{\text{Arg } z}{2}} \\&= \lim_{(r, \theta) \rightarrow (1, \pi)} \sqrt{r} e^{i \frac{\theta}{2}} \quad \text{öyle ki: } z = \|z\| e^{i\theta} \Rightarrow -1 = \| -1 \| e^{i\pi} \\&= \lim_{(r, \theta) \rightarrow (1, \pi)} \sqrt{r} \cos \frac{\theta}{2} + i \sqrt{r} \sin \frac{\theta}{2} \\&= 0 + i \\&= i \\&= L_2\end{aligned}$$

Delayısıyla,

$$L_1 \neq L_2$$

olduğundan $\sqrt{z}$ fonksiyonunun $z_0 = -1$ noktasında limiti yoktur.



Tanım

$z_0 \in D(f)$ olmak üzere,

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = f(z_0)$$

ise f fonksiyonuna z_0 noktasında **sürekli** denir.

Eğer f fonksiyonu D bölgesindeki her noktada sürekli ise f fonksiyonuna **sürekli fonksiyon** denir.

Özellikler

i) Polinom fonksiyonlar tüm kompleks düzlemde ($\mathbb{C}$) **sürekli**dir.

ii) $p(z)$ ve $q(z)$ polinom fonksiyonlar olmak üzere

$$R(z) = \frac{p(z)}{q(z)} \text{ rasyonel fonksiyonu } D(R) = \mathbb{C} \setminus \{z \in \mathbb{C} : q(z) = 0\}$$

bölgesi üzerinde **sürekli**dir.

iii) $f(z) = \sqrt{z}$ fonksiyonu birim çember üzerinde

$z_0 = -1$ noktası hariç **sürekli**dir.

Teorem

$f(z)$ ve $g(z)$, D bölgesi üzerinde iki sürekli fonksiyon olsun.

i) $f \mp g$ fonksiyonu D bölgesi üzerinde süreklidir.

ii) $f \cdot g$ fonksiyonu D bölgesi üzerinde süreklidir.

iii) $\frac{f}{g}$ fonksiyonu $D \setminus \{z \in D : g(z) = 0\}$ bölgesi üzerinde süreklidir.

Teorem

$f(z)$ fonksiyonunun D bölgesi üzerinde sürekli olması için gerek ve yeter koşul $f(z) = u(x, y) + i v(x, y)$ olmak üzere, $u(x, y)$ ve $v(x, y)$ fonksiyonlarının D bölgesi üzerinde sürekli olmasıdır.

Lemma

f fonksiyonu kompakt D bölgesi üzerinde sürekli ise sınırlıdır.

Kompleks Düzlemde Diferansiyellenebilme

Tanım

$$f: D \subseteq \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$$

şeklinde tanımlansın öyle ki D açık bir bölge.

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

var ise f fonksiyonu $z_0 \in D$ noktasında diferansiyellenebilir denir.

Tanım

$$f: D \subseteq \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$$

şeklinde tanımlansın öyle ki D açık bir bölge.

$z_0 \in D$ olmak üzere z_0 noktasının en az bir komşuluğundaki her noktada f diferansiyellenebilir ise

f fonksiyonuna analitik (holomorf) fonksiyon adı verilir.

Örnek

$a \in \mathbb{C}$ olmak üzere,

$f(z) = a$ sabit fonksiyon olsun.

$$\begin{aligned}\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} &= \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{a - a}{z - z_0} \\ &= 0\end{aligned}$$

Örnek

$n \in \mathbb{N}$ olmak üzere,

$f(z) = z^n$ olsun.

$$\begin{aligned}\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} &= \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{z^n - z_0^n}{z - z_0} \\ &= \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{(z - z_0)(z^{n-1} + z^{n-2}z_0 + \dots + z_0^{n-1})}{z - z_0} \\ &= z_0^{n-1} + z_0^{n-2}z_0 + \dots + z_0^{n-1} \\ &= n \cdot z_0^{n-1}\end{aligned}$$

Teorem

f fonksiyonu z_0 noktasında differansiyellenebilir
ise f , z_0 noktasında sürekli.

İspat

f fonksiyonu $z_0 \in D \subseteq \mathbb{C}$ noktasında sürekli



$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = f(z_0)$$



$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) - f(z_0) = 0$$

$$\begin{aligned} \implies \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0) \cdot (z - z_0)}{z - z_0} &= f'(z_0) (z_0 - z_0) \\ &= f'(z_0) \cdot 0 \\ &= 0 \end{aligned}$$

$\implies f$ sürekli.

Örnek

$f(z) = \frac{1}{z}$ fonksiyonu verilsin.

f fonksiyonu $z_0 = 0$ noktasında sürekli olmadığından

z_0 noktasında diferansiyellenebilir değildir.

$z_0 = 0$ noktası singular (tekil) noktadır.

Örnek

$f(z) = \frac{1}{z^n}$ fonksiyonunun $z_0 \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ noktasındaki türevini bulunuz

Çözüm

$$\begin{aligned} \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} &= \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{\frac{1}{z^n} - \frac{1}{z_0^n}}{z - z_0} \\ &= \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{1}{z - z_0} \left(\frac{z_0^n - z^n}{z^n z_0^n} \right) \\ &= - \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{1}{z - z_0} \left(\frac{z^n - z_0^n}{z^n z_0^n} \right) \\ &= - \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{(z - z_0)}{z - z_0} \cdot \frac{(z^{n-1} + z^{n-2}z_0 + \dots + z_0^{n-1})}{z^n z_0^n} \\ &= - \frac{n z_0^{n-1}}{z_0^n z_0^n} \\ &= - n \frac{1}{z_0^{n+1}} \end{aligned}$$

Cauchy - Riemann Teoremi

$$f: D \subseteq \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$$

şeklinde tanımlansın öyle ki D açık bir bölge.

$$f(z) = u(x, y) + i v(x, y) \quad \text{fonksiyonunun}$$

bir $z_0 \in D$ noktasında diferansiyellenebilmesi için

gerek ve yeter koşul u ve v fonksiyonlarının

z_0 noktasında kısmi türevlerinin var ve sürekli olması

ve bu kısmi türevlerin

$$u_x = v_y$$

$$u_y = -v_x$$

esitliklerini sağlamasıdır. (Bu esitliklere Cauchy-Riemann Esitlikleri denir.)

İspat

$z_0 \in D$ olmak üzere f fonksiyonu z_0 noktasında diferansiyellenebilir olsun.

$z = x + iy_0$ durumunda:

$$\begin{aligned} \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} &= \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{u(x, y_0) + i v(x, y_0) - u(x_0, y_0) - i v(x_0, y_0)}{x - x_0} \\ &= \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{u(x, y_0) - u(x_0, y_0)}{x - x_0} + i \frac{v(x, y_0) - v(x_0, y_0)}{x - x_0} \\ &= u_x + i v_x \end{aligned}$$

$z = x_0 + iy$ durumunda:

$$\begin{aligned}\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} &= \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{u(x_0, y) + i v(x_0, y) - u(x_0, y_0) - i v(x_0, y_0)}{i(y - y_0)} \\&= \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{u(x_0, y) - u(x_0, y_0)}{i(y - y_0)} + i \frac{v(x_0, y) - v(x_0, y_0)}{i(y - y_0)} \\&= -i u_y + v_y \\&= v_y + (-i) u_y\end{aligned}$$

Bu iki eşitliği kullanarak,

$$f'(z) = u_x + i v_x = v_y - i u_y$$

$$\implies u_x = v_y \quad \text{ve} \quad v_x = -u_y$$

eşitliklerini (Cauchy-Riemann eşitliklerini) elde ederiz.

Örnek

$$\begin{aligned} f: \mathbb{C} &\longrightarrow \mathbb{C} \\ z &\longmapsto \cos z \end{aligned}$$

fonksiyonu $z_0 \in \mathbb{C}$ noktasında diferansiyellenebilir mi?

Diferansiyellenebilir ise z_0 noktasındaki diferansiyelini hesaplayınız.

Cözüm

$$\begin{aligned} \cos z &= \cos(x+iy) \\ &= \cos x \cosh y - i \sin x \sinh y \end{aligned}$$

olmak üzere; $u(x,y) = \cos x \cosh y$, $v(x,y) = -\sin x \sinh y$

$$\begin{aligned} f'(z_0) &= u_{x_0} + i v_{x_0} \\ &= -\sin x_0 \cosh y_0 - i \cos x_0 \sinh y_0 \\ &= -(\sin x_0 \cosh y_0 + i \cos x_0 \sinh y_0) \\ &= -\sin z_0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f'(z_0) &= v_{y_0} - i u_{y_0} \\ &= -\sin x_0 \cosh y_0 - i(\cos x_0 \sinh y_0) \\ &= -(\sin x_0 \cosh y_0 + i \cos x_0 \sinh y_0) \\ &= -\sin z_0 \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ CRD sağlanır, u_x, u_y, v_x, v_y süreklidir. $\therefore f$ diferansiyellenebilirdir.
 $f'(z_0) = -\sin z_0$

Örnek

$$\begin{aligned} f: \mathbb{C} &\longrightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\} \\ z &\longmapsto e^z \end{aligned}$$

fonksiyonu $z_0 \in \mathbb{C}$ noktasında diferansiyellenebilir mi?

Diferansiyellenebilir ise z_0 noktasındaki diferansiyelini bulunuz.

Çözüm

$$\begin{aligned} e^z &= e^{x+iy} \\ &= e^x (\cos y + i \sin y) \\ &= e^x \cos y + i e^x \sin y \end{aligned}$$

olmak üzere; $u(x,y) = e^x \cos y$, $v(x,y) = e^x \sin y$

$$\begin{aligned} f'(z_0) &= u_{x_0} + i v_{x_0} \\ &= e^{x_0} \cos y_0 + i e^{x_0} \sin y_0 \\ &= e^{z_0} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f'(z_0) &= v_{y_0} - i u_{y_0} \\ &= e^{x_0} \cos y_0 - i (-e^{x_0} \sin y_0) \\ &= e^{z_0} \end{aligned}$$

⇒ CRD sağlanır, u_x, u_y, v_x, v_y süreklidir

⇒ f fonksiyonu z_0 noktasında diferansiyellenebilirdir: $f'(z_0) = e^{z_0}$

Örnek

$$f: \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$$
$$z \longmapsto f(z) = x + i4y$$

fonksiyonunun diferansiyellenebilir olduğu noktaları bulunuz.

Çözüm

$$u(x, y) = x, \quad v(x, y) = 4y$$

$$f'(z) = u_x + i v_x$$
$$= 1$$

$$f'(z) = v_y - i u_y$$
$$= 4$$

$$\Rightarrow \text{CRD sağlanmaz: } u_x = 1 \neq 4 = v_y$$

$\Rightarrow f$ fonksiyonu hiçbir noktada diferansiyellenebilir değildir.

Önerme

f ve g fonksiyonları açık $D \subseteq \mathbb{C}$ bölgesi üzerinde analitik ise $f+g$, fg ve $\frac{f}{g}$, ($g(z) \neq 0$) fonksiyonları da D üzerinde analiktir

$$i) (f+g)'(z) = f'(z) + g'(z)$$

$$ii) (fg)'(z) = f'(z)g(z) + f(z)g'(z)$$

$$iii) \left(\frac{f}{g}\right)'(z) = \frac{f'(z)g(z) - f(z)g'(z)}{[g(z)]^2}$$

Teorem

A ve B , $\mathbb{C}$ de açık bölgeler olmak üzere,

$$f: A \longrightarrow \mathbb{C}$$

$$g: B \longrightarrow \mathbb{C}$$

fonksiyonları analitik ve $f(A) \subseteq B$ olsun.

$g \circ f: A \longrightarrow \mathbb{C}$ fonksiyonu analiktir.

$$(g \circ f)'(z) = g'(f(z)) \cdot f'(z)$$

İspat

$w_0 = f(z_0)$ olsun. Her $w \in B$ için

$$h(w) := \frac{g(w) - g(w_0)}{w - w_0} - g'(w_0), \quad w \neq w_0$$

fonksiyonunu tanımlayalım. $g'(w_0)$ var, h süreklidir.

Süreklili fonksiyonların bileşkeleri de sürekli olduğundan

$$\lim_{z \rightarrow z_0} h(f(z)) = h(w_0) = 0$$

Öyleyse, h fonksiyonunun tanımından,

$$\begin{aligned} \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{(g \circ f)(z) - g(w_0)}{z - z_0} &= \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{(h(f(z)) + g'(w_0))(f(z) - w_0)}{z - z_0} \\ &= \lim_{z \rightarrow z_0} \left(h(f(z)) + g'(w_0) \right) \frac{(f(z) - w_0)}{z - z_0} \\ &= (0 + g'(w_0)) (f'(z_0)) \end{aligned}$$

L'Hôpital Kuralı

A ve B , $\mathbb{C}$ de açık bölgeler olmak üzere,

$$f: A \longrightarrow \mathbb{C}$$

$$g: B \longrightarrow \mathbb{C}$$

fonksiyonları z_0 noktasında analitik ve

$$f(z_0) = g(z_0) = 0, \quad g'(z_0) \neq 0 \quad \text{olsun.}$$

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = \frac{f'(z_0)}{g'(z_0)}$$

İspat

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{g(z) - g(z_0)}$$

$$= \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}}{\frac{g(z) - g(z_0)}{z - z_0}}$$

$$= \frac{\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}}{\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{g(z) - g(z_0)}{z - z_0}}$$

$$= \frac{f'(z_0)}{g'(z_0)}$$

Örnek

$$\lim_{z \rightarrow 1+\sqrt{3}i} \frac{z^2 - 2z + 4}{z - 1 - \sqrt{3}i}$$

limitini hesaplayınız.

Cözüm

I. Yol:

$$z^2 - 2z + 4 = (z - (1 + \sqrt{3}i))(z - (1 - \sqrt{3}i)) \quad \text{olmak üzere,}$$

$$\lim_{z \rightarrow 1+\sqrt{3}i} \frac{(z - (1 + \sqrt{3}i))(z - (1 - \sqrt{3}i))}{z - (1 + \sqrt{3}i)} = \lim_{z \rightarrow 1+\sqrt{3}i} z - (1 - \sqrt{3}i)$$

$$= 1 + \sqrt{3}i - 1 + \sqrt{3}i$$

$$= 2\sqrt{3}i$$

II. Yol (L'Hôpital Kuralı ile):

$$\lim_{z \rightarrow 1+\sqrt{3}i} \frac{z^2 - 2z + 4}{z - 1 - \sqrt{3}i} \rightarrow \frac{0}{0} \quad \text{belirsizliği söz konusudur.}$$

$$\lim_{z \rightarrow 1+\sqrt{3}i} \frac{f(z)}{g(z)} = \lim_{z \rightarrow 1+\sqrt{3}i} \frac{f'(z)}{g'(z)}$$

$$= \lim_{z \rightarrow 1+\sqrt{3}i} \frac{2z - 2}{1}$$

$$= 2\sqrt{3}i$$

Soru

$$f(z) = 2x^2 + y + i(y^2 - x)$$

fonksiyonunun analitik olduğu bölgeyi bulunuz.

Çözüm

$$u(x, y) = 2x^2 + y, \quad v(x, y) = y^2 - x$$

$$f'(x) = u_x + i v_x$$

$$= 4x - i$$

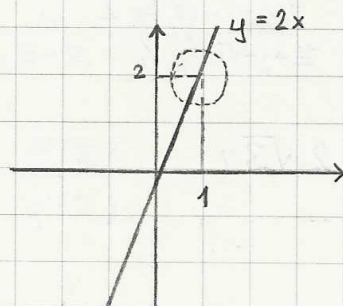
$$f'(x) = v_y - i u_y$$

$$= 2y - i$$

$\Rightarrow$ CRD sağlar: $u_x = 4x = 2y = v_y$ ve $v_x = -1 = -u_y$

$\Rightarrow$ f , $y = 2x$ koşulunu sağlayan $z_0 = x_0 + iy_0$ noktalarında diferansiyellenebilirler.

Fakat, f fonksiyonu hiçbir noktada analitik değildir:



Önerme

f , açık $D \subseteq \mathbb{C}$ bölgesinde analitik olsun.

Eğer,

i) $f'(z) = 0$

ii) $\operatorname{Re} f(z) = \text{sabit}$

iii) $\operatorname{Im} f(z) = \text{sabit}$

iv) $\|f\| = \text{sabit}$

v) $\bar{f}$ analitik

vi) $\arg f = \text{sabit}$

vii) f reel değerli

viii) f imajiner değerli

koşullarından biri sağlanıyorsa f fonksiyonu sabit fonksiyondur.

(İspat: Kompleks Fonksiyonlar Teorisi, s.104, Önerme: 3.6.10, Turgut Başkan)

Ters Fonksiyon Teoremi

$f: D \subseteq \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ analitik ve $f'(z_0) \neq 0$ olsun.

$$f: U \longrightarrow V$$

funksiyonu 1-1 ve örten olacak şekilde

z_0 noktasının bir U komsuluğu ve $f(z_0)$ noktasının bir V komsuluğu vardır öyle ki f fonksiyonunun ters fonksiyonu f^{-1} analitiktir.

$$\frac{d}{dw} f^{-1}(w) = \frac{1}{f'(z)}, \quad w = f(z)$$

İspat

$$Df = \begin{pmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_x & -v_x \\ v_x & u_x \end{pmatrix}$$

olmak üzere,

$$f'(z) = u_x + i v_x \implies \|f'(z)\| = (u_x)^2 + (v_x)^2$$

$$\implies \det(Df) = \|f'(z)\|^2$$

eşitliğinin sağlandığı görülebilir.

Df matrisinin tersi

$$(Df)^{-1} = \frac{1}{\det(Df)} \cdot \text{Adj}(Df)$$

$$\frac{1}{\det(Df)} \cdot \begin{pmatrix} u_y & -u_x \\ -v_x & v_y \end{pmatrix}$$

olmak üzere,

$f^{-1}(z) := t(x, y) + i s(x, y)$ olsun.

$$D(f^{-1}) = \begin{pmatrix} t_x & t_y \\ s_x & s_y \end{pmatrix}$$

$$\implies t_x = \frac{1}{\det(Df)} u_y = \frac{1}{\det(Df)} u_x \quad \text{ve} \quad s_x = \frac{1}{\det(Df)} (-v_x) = \frac{1}{\det(Df)} u_y$$

elde edilir.

Dolayısıyla, Cauchy-Riemann eşitliklerinden,

$$(f^{-1})' = t_x + i s_x$$

$$= \frac{1}{\det(Df)} u_x + i \frac{1}{\det(Df)} (-v_x)$$

$$= \frac{1}{\det(Df)} (u_x - i v_x)$$

$$= \frac{\overline{f'(z_0)}}{\|f'(z_0)\|^2}$$

$$= \frac{1}{f'(z_0)}$$

Kutupsal Koordinatlarda Cauchy-Riemann Eşitlikleri

$$\begin{aligned} f: D \subseteq \mathbb{C} &\longrightarrow \mathbb{C} \\ z &\longmapsto f(z) = u + iv \end{aligned}$$

fonksiyonu analitik olsun.

$$\begin{aligned} z &= x + iy \\ &= r(\cos \theta + i \sin \theta) \\ &= r e^{i\theta} \end{aligned}$$

olmak üzere,

$$f(z) = u + iv \implies f(re^{i\theta}) = u + iv$$

Her iki tarafın r ye göre kısmi türevi:

$$f'(re^{i\theta}) e^{i\theta} = u_r + i v_r$$

Her iki tarafın θ ye göre kısmi türevi:

$$f'(re^{i\theta}) i r e^{i\theta} = u_\theta + i v_\theta$$

$$\begin{aligned} \implies u_\theta + i v_\theta &= i r (u_r + i v_r) \\ &= -r v_r + i r u_r \end{aligned}$$

$$\implies u_\theta = -r v_r \quad \text{ve} \quad v_\theta = r u_r$$

$$\implies v_r = -\frac{1}{r} u_\theta \quad \text{ve} \quad u_r = \frac{1}{r} v_\theta$$

olacak şekilde kutupsal koordinatlarda Cauchy-Riemann eşitlikleri bulunmuş olur.

Tanım

A açık bir bölge olmak üzere,

$U: A \longrightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu ikinci merzeden

sürekli diferansiyellenebilir bir fonksiyon olsun.

Eğer, U fonksiyonu Laplace denklemini sağlar ise

U fonksiyonuna **harmonik fonksiyon** denir ve ΔU veya $\nabla^2 U$ ile gösterilir.

$$\nabla^2 U = U_{xx} + U_{yy} = 0$$

Önerme

$f(z) = U + iV$ fonksiyonu açık bir D bölgesinde analitik bir fonksiyon olsun.

U ve V fonksiyonları D bölgesi üzerinde harmoniktir.

İspat

f analitik ise Cauchy-Riemann Eşitliklerinden

$$U_x = V_y, \quad V_x = -U_y$$

$$\implies U_{xy} = V_{yy}, \quad V_{xx} = -U_{yx}$$

$$\begin{aligned} \implies V_{xx} + V_{yy} &= U_{xy} - U_{yx} \\ &= U_{xy} - U_{xy} \\ &= 0 \end{aligned}$$

Tanım

U ve v reel değerli fonksiyonları
açık D bölgesi üzerinde tanımlı olmak üzere,
 $f = U + i v$ fonksiyonu analitik ise
 D bölgesi üzerinde U ve v ye birbirlerinin
harmonik eşleniği denir.

Örnek

$$\begin{aligned} f: \mathbb{C} &\longrightarrow \mathbb{C} \\ z &\longmapsto f(z) = z^2 \end{aligned}$$

fonksiyonu göz önünde bulundurulsun.

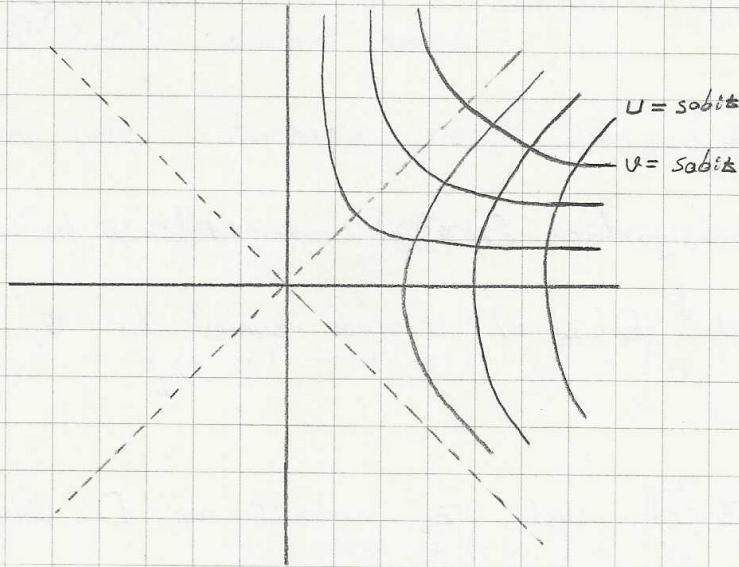
$$\begin{aligned} f(z) &= z^2 \\ &= (x+iy)^2 \\ &= x^2 - y^2 + i(2xy) \end{aligned}$$

olmak üzere; $U(x,y) = x^2 - y^2$, $v(x,y) = 2xy$

fonksiyonları birbirlerinin harmonik eşlenikleridir.

Teorem

U ve V , açık D bölgesinde harmonik eslenikler olmak üzere U ve V yumuşak eğriler ise bu eğriler birbirlerine diktir.



Bir önceki örnek için sıfır noktası olmayan herhangi bir noktadan geçen $U = x^2 - y^2$ ve $V = 2xy$ fonksiyonlarının seviye eğrileri şekilde gösterilen şekilde dik açıyla kesişir.

Önerme

u fonksiyonu açık D bölgesi üzerinde harmonik olsun.

Her $z_0 \in D$ için u fonksiyonunun, reel parçası olduğu analitik fonksiyon üzerinde z_0 in bazı komşulukları vardır.

Diğer bir deyişle,

u ve v fonksiyonları $D(z_0, r)$ açık diskinde harmonik eşlenikler olacak şekilde $D(z_0, r)$ diskinde tanımlı bir v fonksiyonu ve $r > 0$ vardır.

Aslında, $D(z_0, r)$ diski z_0 merkezli ve D bölgesince kapsanan en büyük disk olarak seçilebilir.

Cauchy - Riemann denklemlerinin sağlanması için,

v is uniquely determined up to the addition of a constant.

Bu eşitlikler u verildiğinde v yi bulmada bir metot olarak kullanılabilir.

Sonuç

Eğer u fonksiyonu açık D bölgesinde harmonik ise harmonik eşleniği vardır:

$D = D(0, r)$ olarak seçilsin.

v , u fonksiyonunun harmonik eşleniği olan fonksiyon olsun.

Tanımdan, Cauchy-Riemann Eşitlikleri sağlanır: $u_x = v_y$, $u_y = -v_x$

$$u_x(x_0, y_0) = v_y(x_0, y_0) \implies v(x_0, y_0) = \int_0^{y_0} u_x(x_0, y) dy + h(x_0)$$

$$\implies v_x(x_0, y_0) = \int_0^{y_0} u_{xx}(x_0, y) dy + h'(x_0)$$

$$= - \int_0^{y_0} u_{yy}(x_0, y) dy + h'(x_0)$$

$$= -u_y(x_0, y) \Big|_0^{y_0} + h'(x_0)$$

$$= -u_y(x_0, y_0) + u_y(x_0, 0) + h'(x_0)$$

$$\stackrel{CRD}{=} -u_y(x_0, y_0)$$

$$\implies h'(x_0) = -u_y(x_0, 0)$$

$$\implies h(x_0) = -\int_0^{x_0} u_y(x, 0) dx + C$$

$$\implies v(x, y) = \int_0^y u_x(x_0, y) dy - \int_0^{x_0} u_y(x, 0) dx + C$$

Örnek

$U(x, y) = x^3 - 3xy^2$ fonksiyonu harmonik midir?

Harmonik ise harmonik eşleniğini ve analitik f fonksiyonunu bulunuz.

Ayrıca, $f(0) = 0$ koşulunu sağlayan özel analitik f fonksiyonunu bulunuz.

Cözüm

$$U_x = 3x^2 - 3y^2$$

$$U_y = -6xy$$

$$U_{xx} = 6x$$

$$U_{yy} = -6x$$

olmak üzere,

$$\begin{aligned}\nabla^2 U &= U_{xx} + U_{yy} \\ &= 6x + (-6x) \\ &= 0\end{aligned}$$

olduğundan U fonksiyonu harmoniktir.

v , U harmonik fonksiyonunun harmonik eşleniği olsun:

$f(z) = U + iv$ fonksiyonu analitik olduğundan Cauchy-Riemann Eşitlikleri

sağlanır:

$$\begin{aligned}v_x &= -U_y \\ &= 6xy\end{aligned}$$

$$\Rightarrow u(x, y) = 3x^2y + h(y)$$

$$\Rightarrow v_y(x, y) = 3x^2 + h'(y)$$

$$u_x = v_y \quad 3x^2 - 3y^2$$

$$\Rightarrow h'(y) = -3y^2$$

$$\Rightarrow h(y) = -y^3 + C$$

$$\Rightarrow u(x, y) = 3x^2y - y^3 + C$$

olmak üzere,

$$f(z) = u + iv$$

$$= x^3 - 3xy^2 + i(3x^2y - y^3 + C)$$

$$= x^3 + 3x^2(iy) + 3x(iy)^2 + (iy)^3 + iC$$

$$= (x + iy)^3 + iC$$

$$= z^3 + iC$$

olarak bulunur.

$f(0) = 0$ koşulunu sağlayan özel analitik f fonksiyonu:

$$f(0) = 0^3 + iC = 0 \Rightarrow iC = 0$$

$$\Rightarrow f(z) = z^3$$

olarak bulunur.

Soru

$(\ln \|z\|)$ fonksiyonunun harmonik olduğunu gösteriniz.

Çözüm

$$\begin{aligned} u(x, y) &:= (\ln \|z\|) \\ &= (\ln \sqrt{x^2 + y^2}) \quad , \mathbb{R}^2 \setminus \{0, 0\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u_x(x, y) &= \frac{\frac{2x}{2\sqrt{x^2+y^2}}}{\sqrt{x^2+y^2}} & u_y(x, y) &= \frac{\frac{2y}{2\sqrt{x^2+y^2}}}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ &= \frac{x}{x^2+y^2} & &= \frac{y}{x^2+y^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u_{xx}(x, y) &= \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} & u_{yy}(x, y) &= \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} \end{aligned}$$

olmak üzere,

$$\begin{aligned} \nabla^2 u &= u_{xx} + u_{yy} \\ &= \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} + \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} \\ &= 0 \end{aligned}$$

$\implies u$ fonksiyonu $\mathbb{R}^2 \setminus \{0, 0\}$ bölgesinde harmoniktir.

Önerme

$D = \mathbb{C} \setminus \{x+iy \mid x \leq 0 \wedge y=0\}$ olsun.

$-\pi < \arg z < \pi$ kısıtlaması altında

$$\log z = \ln \|z\| + i \arg z$$

fonksiyonu açık D bölgesi üzerinde analittir.

$$\frac{d}{dz} \log z = \frac{1}{z}$$

İspat I : (Ters Fonksiyon Teoremini Kullanarak) (Ödev)

İspat II: (Cauchy-Riemann Eşitliklerini Polar Formda Kullanarak)

(Ödev)

(Ödev-Devamı)

Karmaşık Düzlemde Bir Eğri Boyunca İntegral

Tanım

Cauchy Teoremini ifade edebilmek için ilk olarak karmaşık düzlemde bir eğri boyunca integralleri tanımlamalı ve onların temel özelliklerini bilmeliyiz.

$$h: [a, b] \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$$

şeklinde tanımlı reel tek değişkenli kompleks değerli bir fonksiyon olsun.

$h(z) = u(z) + i v(z)$ olmak üzere u ve v sürekli olsun.

$$\int_a^b h(z) dz = \int_a^b u(z) dz + i \int_a^b v(z) dz$$

Biz bu tanımı $\mathbb{C}$ deki bir eğri boyunca fonksiyonların integrallerine genişletmek istiyoruz.

Bunu başarmak için bir kaç tanıma ihtiyacımız duyacağız.

Tanım

$f: D \subseteq \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ sürekli bir fonksiyon,

$\gamma: [a, b] \longrightarrow D \subseteq \mathbb{C}$ sonlu nokta haricinde diferansiyellenebilir sürekli bir eğri olsun.

$$\int_{\gamma} f = \int_{\gamma} f(z) dz = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{a_i}^{a_{i+1}} f(\gamma(t)) \gamma'(t) dt$$

İntegraline γ eğrisi boyunca f fonksiyonunun integrali denir.

Önerme

$f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ olsun.

$$\int_{\gamma} f = \int_{\gamma} [u(x, y) dx - v(x, y) dy] + i \int_{\gamma} [u(x, y) dy + v(x, y) dx]$$

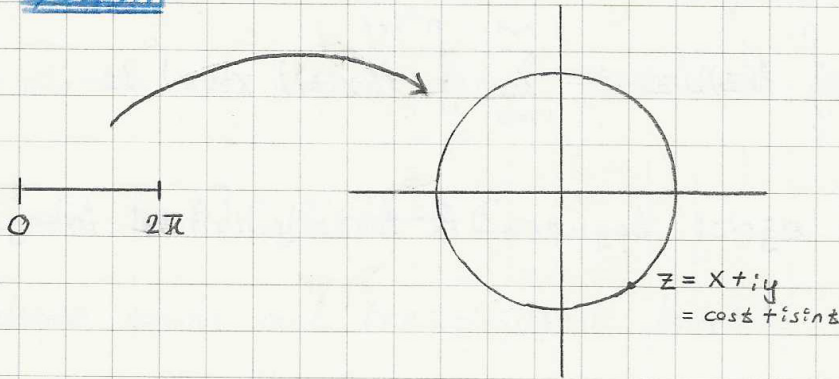
İspat

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} f(z) ds &= \int_a^b f(z(t)) z'(t) dt, \quad ds = \frac{x'(t) dt + iy'(t) dt}{z'(t) dt} \\ &= \int_a^b (u(x(t), y(t)) + iv(x(t), y(t))) (x'(t) dt + iy'(t) dt) \\ &= \int_{\gamma} u(x, y) dx - v(x, y) dy + i \int_{\gamma} u(x, y) dy + v(x, y) dx \end{aligned}$$

Örnek

$\|z\| = 1$ çemberi üzerinde $f(z) = \frac{1}{z}$ fonksiyonunun integralini hesaplayınız.

Çözüm



$$\begin{aligned} \int_{\gamma} \frac{1}{z} ds &= \int_0^{2\pi} \frac{1}{z(t)} z'(t) dt \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{1}{\cos t + i \sin t} (-\sin t + i \cos t) dt \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{(\cos t - i \sin t)(-\sin t + i \cos t)}{\cos^2 t + \sin^2 t} dt \\ &= \int_0^{2\pi} (-\cos t \sin t + \cos t \sin t) dt + i(\sin^2 t + \cos^2 t) dt \\ &= i \int_0^{2\pi} dt \\ &= 2\pi i \end{aligned}$$

Teorem

γ düzgün bir eğri olmak üzere

f ve g fonksiyonları γ üzerinde sürekli olsun.

$$i) \int_{\gamma} (\lambda_1 f + \lambda_2 g)(z) dz = \lambda_1 \int_{\gamma} f(z) dz + \lambda_2 \int_{\gamma} g(z) dz, \quad \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$$

$$ii) \int_{\gamma} f(z) dz = - \int_{-\gamma} f(z) dz$$

$$iii) \gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \dots \cup \gamma_n \quad \text{ise}$$

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \sum_{i=1}^n \int_{\gamma_i} f(z) dz$$

$\tilde{\gamma}$, γ eğrisinin bir yeniden parametrelendirilişi olsun.

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \int_{\tilde{\gamma}} f(z) dz$$

Önerme

$h: [a, b] \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ fonksiyonu integrallenebilir ise

$$\operatorname{Re} \left(\int_a^b g(z) dz \right) = \int_a^b \operatorname{Re}(g(z)) dz$$

İspat

$g(z) = u(z) + i v(z)$ olsun.

$$\begin{aligned} \int_a^b g(z) dz &= \int_a^b (u(z) + i v(z)) dz \\ &= \int_a^b u(z) dz + i \int_a^b v(z) dz \end{aligned}$$

olduğundan,

$$\operatorname{Re} \left(\int_a^b g(z) dz \right) = \int_a^b u(z) dz = \int_a^b \operatorname{Re}(g(z)) dz$$

Sonuç

$$\left\| \int_a^b g(z) dz \right\| \leq \int_a^b \|g(z)\| dz$$

Teorem (Kalkülüsün Temel Teoremi - Contour İntegral)

$f: D \subseteq \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ bir fonksiyon olmak üzere,

$\gamma: [a, b] \longrightarrow D \subseteq \mathbb{C}$ eğrisi $z_1, z_2 \in D$ noktalarını birleştiren ve tamamen D içinde kalan bir eğri olsun.

Eğer, bir zane analitik

$F: D \subseteq \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ var ve $F' = f$

ise

$$\int_{\gamma} f = F(z_2) - F(z_1)$$

Sonuç: γ eğrisi basit eğrisi ise $\int_{\gamma} f = 0$

İspat

$$\int_{\gamma} f = \int_{\gamma} f(z) dz$$

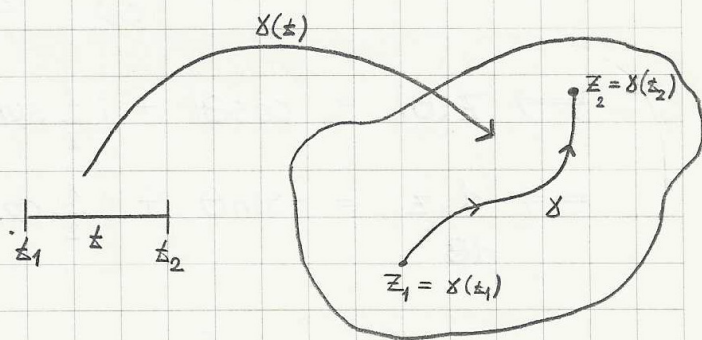
$$= \int_{t_1}^{t_2} f(\gamma(t)) \gamma'(t) dt$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} F'(\gamma(t)) \gamma'(t) dt$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} d(F(\gamma(t)))$$

$$= F(\gamma(t_1)) - F(\gamma(t_2))$$

$$= F(z_2) - F(z_1)$$



Örnek

γ , $x^2 + 4y^2 = 1$ eğrisi üzerinde

$z_1 = 1$ den $z_2 = \frac{i}{2}$ noktasına giden yay olsun.

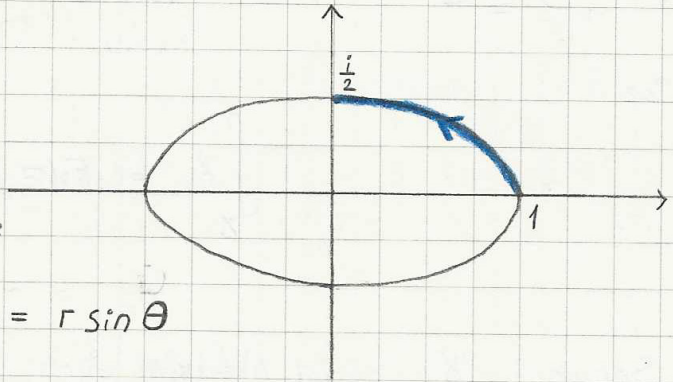
$f(z) = z^4$ fonksiyonunun γ yayı üzerindeki integralini bulunuz.

Çözüm

$$0 \quad \theta \quad \frac{\pi}{2}$$

$z = x + iy$ olmak üzere

$$\begin{aligned} x &= r \cos \theta & y &= r \sin \theta \\ &= \cos \theta & &= \frac{1}{2} \sin \theta \end{aligned}$$



$$\Rightarrow z(\theta) = \cos \theta + i \frac{1}{2} \sin \theta$$

$$\Rightarrow \frac{dz}{d\theta} = -\sin \theta + i \frac{1}{2} \cos \theta$$

$$\Rightarrow \int_{\gamma} f = \int_{\gamma} f(z) dz$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(z(\theta)) z'(\theta) d\theta$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos \theta + i \frac{1}{2} \sin \theta)^4 (-\sin \theta + i \frac{1}{2} \cos \theta) d\theta$$

Bir eğri üzerindeki integrali hesaplamak, tıpkı son eşitlikteki gibi kimi zaman kolaylıkla elde edilemiyor olabiliyor.

Kalkülüsün temel teoremini göz önünde bulunduralım:

$$f(z) = z^4 \quad \text{polinomu } \mathbb{C} \text{ de sürekli}$$

$$F(z) = \frac{z^5}{5} \quad \text{polinomu } \mathbb{C} \text{ de analitik}$$

$$F' = f$$

$$\begin{aligned} \implies \int_{\gamma} f(z) dz &= F\left(\frac{i}{2}\right) - F(1) \\ &= \frac{\left(\frac{i}{2}\right)^5}{5} - \frac{1}{5} \\ &= -\frac{1}{5} + i \frac{1}{160} \end{aligned}$$

Örnek (Oldukça Önemli)

γ eğrisi a merkezli, r yarıçaplı bir çember olmak üzere,

$$f(z) = (z-a)^n$$

olsun.

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \int_{\gamma} (z-a)^n dz = \begin{cases} 0 & , n \in \mathbb{Z} \setminus \{-1\} \\ 2\pi i & , n = -1 \end{cases}$$

olduğunu gösteriniz.

Cözüm

$n \neq -1$ ise

Kalkülüsün Temel Teoreminden :

$f(z) = (z-a)^n$ polinomu $\mathbb{C}$ de sürekli

$F(z) = \frac{(z-a)^{n+1}}{n+1}$ polinomu $\mathbb{C}$ de analitik

$$F' = f$$

$$\begin{aligned} \implies \int_{\gamma} f(z) dz &= F(\text{bitiş}) - F(\text{başlangıç}) \\ &= 0 \end{aligned}$$

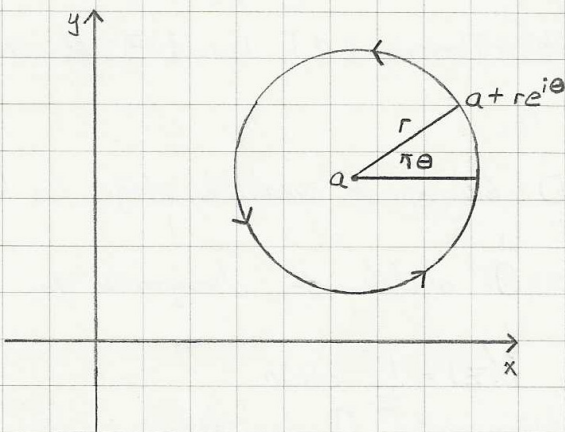
$$\underline{n = -1 \text{ ise}}$$

$$f(z) = \frac{1}{(z-a)}$$

olmak üzere,

$$\gamma \text{ eğrisini } \gamma(\theta) = re^{i\theta} + a, \quad \theta \in [0, 2\pi]$$

şeklinde parametrelendirelim:



$$\int_{\gamma} f(z) dz = \int_0^{2\pi} f(\gamma(\theta)) \gamma'(\theta) d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{1}{(a + re^{i\theta}) - a} i r e^{i\theta} d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} i d\theta$$

$$= 2\pi i$$

Cauchy - Goursat Teoremi

D basit bağlantılı kompleks bir bölge,
 γ , D içinde kapalı bir eğri ve
 f fonksiyonu D üzerinde analitik olsun.

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 0$$

(İspat: Basic Complex Analysis, s113, Theorem 2.2.1, Jerrold E. Marsden)

Eğer f fonksiyonu tüm D bölgesinde analitik değil ise kapalı
 γ eğrisi üzerindeki integral değeri 0 olabilir de, olmayabilir de.

Örneğin, γ eğrisi birim çember ve $f(z) = \frac{1}{z}$ olsun.

0 halde f fonksiyonu $z=0$ noktası hariç tüm noktalarda analiktir
ve integral değeri

$$\int_{\gamma} \frac{1}{z} dz = 2\pi i$$

Diğer taraftan,

γ eğrisi gene birim çember ve $f(z) = \frac{1}{z^2}$ olsun.

0 halde f fonksiyonu gene $z=0$ noktası hariç tüm noktalarda
analiktir ve integral değeri,

$$\int_{\gamma} \frac{1}{z^2} dz = 0$$

Örnek

$$\int \frac{5z+7}{z^2+2z-3} dz \quad \text{integralini hesaplayınız.}$$

$$\|z-2\|=2$$

Cözüm

$$\int \frac{5z+7}{z^2+2z-3} dz = \int \left(\frac{2}{z+3} + \frac{3}{z-1} \right) dz$$

$$\|z-2\|=2$$

$$\|z-2\|=2$$

$$= \int \frac{2}{z+3} dz + \int \frac{3}{z-1} dz$$

$$\|z-2\|=2$$

$$\|z-2\|=2$$

$\frac{2}{z+3}$ fonksiyonu D bölgesindeki kapalı $\|z-2\|=2$ eğrisi içinde

analitik bir fonksiyon olduğundan eğri üzerindeki integrali 0 dir.

$$= \int \frac{3}{z-1} dz$$

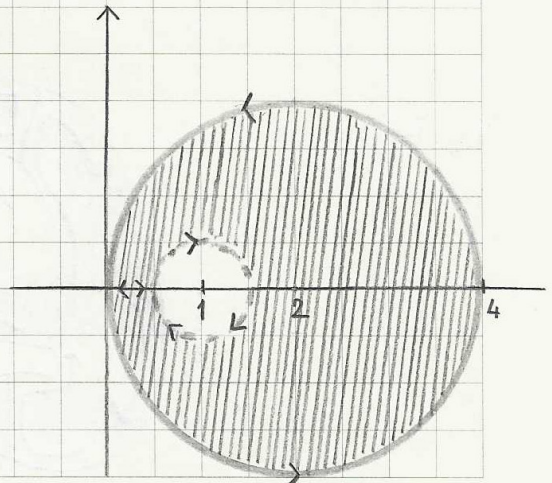
$$\|z-2\|=2$$

$$= \int \frac{3}{z-1} dz$$

$$\|z-1\|=\varepsilon$$

$$= -3(2\pi i)$$

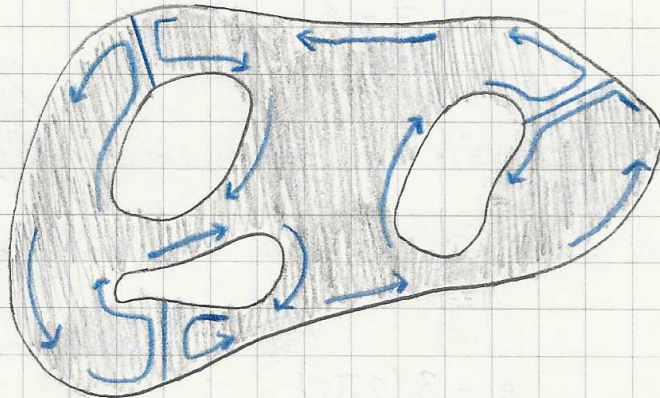
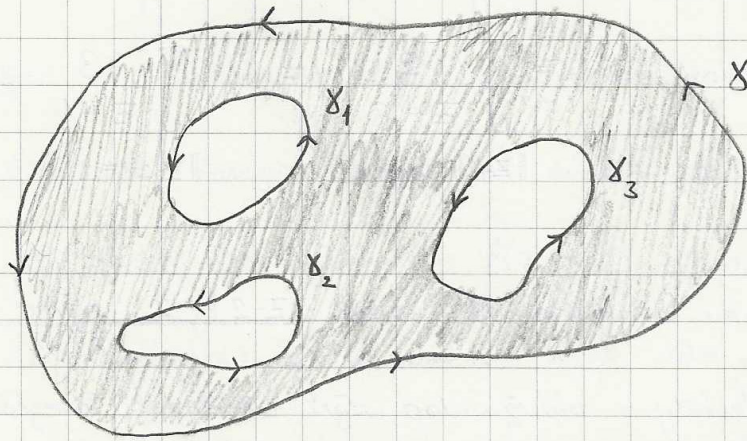
$$= -6\pi i$$



Genelleştirilmiş Deformasyon Teoremi

$\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$ üst üste gelmeyen (örtüşmeyen)
basit kapalı eğriler olmak üzere,
 γ kapalı bir eğri olsun öyle ki f fonksiyonu
 γ ile $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$ arasındaki bölgede analitik olsun.

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \sum_{k=1}^n \int_{\gamma_k} f(z) dz$$

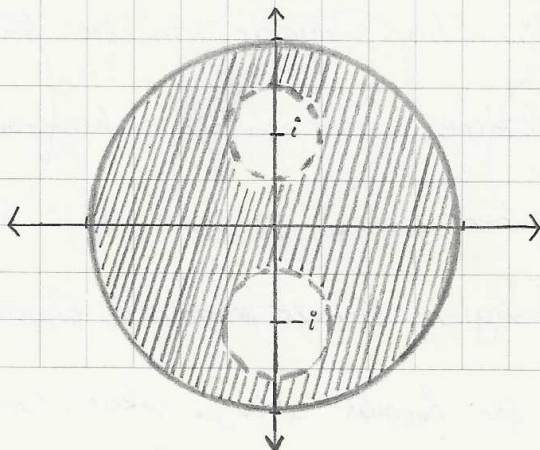


Örnek

$$\int_{\|z\|=4} \frac{1}{1+z^2} dz \quad \text{integralini hesaplayınız.}$$

Çözüm

$$\begin{aligned} \int_{\|z\|=4} \frac{1}{1+z^2} dz &= \int_{\|z\|=4} \left(\frac{\frac{1}{2i}}{z+i} - \frac{\frac{1}{2i}}{z-i} \right) dz \\ &= \int_{\|z-i\|=\frac{1}{2}} \left(\frac{\frac{1}{2i}}{z+i} - \frac{\frac{1}{2i}}{z-i} \right) dz + \int_{\|z+i\|=\frac{1}{2}} \left(\frac{\frac{1}{2i}}{z+i} - \frac{\frac{1}{2i}}{z-i} \right) dz \\ &= -\frac{1}{2i} \int_{\|z-i\|=\frac{1}{2}} \frac{1}{z-i} dz + \frac{1}{2i} \int_{\|z+i\|=\frac{1}{2}} \frac{1}{z+i} dz \\ &= -\frac{1}{2i} (2\pi i) + \frac{1}{2i} (2\pi i) \\ &= 0 \end{aligned}$$



Cauchy İntegral Formülü

Tek değişkenli karmaşık fonksiyonlar teorisinin ilgi çekici yerlerinden biri, Tıpkı Cauchy-Goursat Teoremi gibi teorik olarak ilgi çekici sonuçlardan birçok güçlü sonucun elde edilebilecek olmasıdır.

Şimdi, bu önemli sonuçlardan bazılarını ifade edebilecek durumdayız.

Bu birçok sonuç arasında, diferansiyellenebilir bir fonksiyonun sonsuz kez diferansiyellenebilirliği ve aslında Taylor serilerinin bazı disklerde fonksiyona yaklaşması durumunda analitik olması ile her polinomun bir kompleks kökünün olması (Cebirin Temel Teoremi) yer almaktadır.

Cauchy - Goursat Teoreminden elde edilen

Cauchy İntegral Formülü, bu sonuçlar için bir basamak taşıdır.

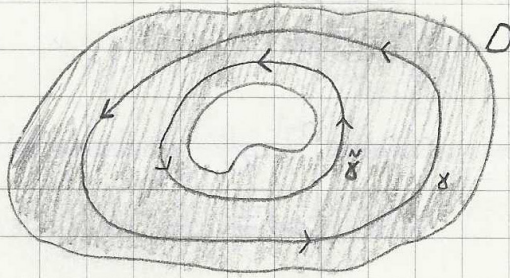
Cauchy - Goursat Teoremi bizlere, bir analitik fonksiyonun değerlerinin, kapalı bir eğrinin içindeki her yerde, tamamen eğri boyunca değerleriyle belirlendiğini söyler. Bunun sonucu olarak,

bu değerler için asikâr bir formül ortaya çıkar: Cauchy İntegral Formülü.

Tanım ve Teorem

f fonksiyonu kompleks bir D bölgesinde analitik,
 γ eğrisi D bölgesi içinde basit kapalı bir eğri olsun.
Eğer D bölgesinin dışına taşmayan ve γ eğrisince kapsanan
bir basit kapalı $\tilde{\gamma}$ eğrisi varsa,

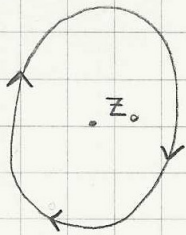
γ eğrisi $\tilde{\gamma}$ eğrisine **homotopik** tir denir ve $\int_{\gamma} f = \int_{\tilde{\gamma}} f$



(İspat: Basic Complex Analysis, s115, Theorem 2.2.2, Jerrold E. Marsden)

Tanım

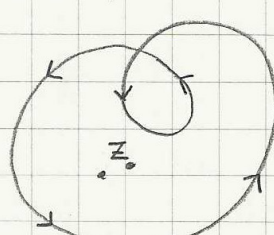
Bir γ eğrisinin verilen z_0 noktasının etrafındaki pozitif yönlü
dolanma sayısına γ eğrisinin z_0 noktasınca belirlenmiş **indeksi** denir.



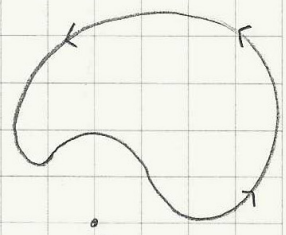
İndeks = -1



İndeks = 2



İndeks = 1



İndeks = 0

Örneğin,

γ eğrisi $\gamma(\theta) = e^{i\theta}$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$ şeklinde bir
birim çember ise

$$\int_{\gamma} \frac{1}{z} dz = 2\pi i$$

olduğunu biliyoruz.

Eğer, $\gamma(\theta) = e^{in\theta}$, $0 \leq \theta \leq 2\pi n$ ise

γ eğrisi $z_0 = 0$ noktasını n kez çevreler ve benzer şekilde

$$n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{1}{z} dz$$

buluruz.

Genel olarak, her $z_0 \in \mathbb{C}$ için γ eğrisinin z_0 noktasına
bekirlenmiş indeksinin

$$n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{1}{z - z_0} dz$$

olduğu görülür.

Tanım

γ eğrisi $\mathbb{C}$ de kapalı bir eğri ve $z_0 \in \mathbb{C}$ olsun
öyle ki z_0 noktası γ eğrisinin üzerinde bulunmasın.

γ eğrisinin z_0 noktasınca belirlenmiş dolanma sayısı

$I(\gamma; z_0)$ ile gösterilir öyle ki

$$I(\gamma; z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{1}{z - z_0} dz$$

Teorem (Cauchy Integral Formülü)

f fonksiyonu kompleks bir D bölgesinde analitik,
 γ eğrisi D bölgesi içinde kapalı bir eğri olsun.

γ eğrisi üstünde olmayan bir $z_0 \in D$ noktası için

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{z - z_0} dz$$

(İspat: Basic Complex Analysis, s147, Theorem 2.4.4, Jerrold E. Marsden)

Örnek

$$\int_{\|z\|=1} \frac{e^z}{z} dz \text{ integralini hesaplayınız.}$$

Cözüm

Cauchy İntegral Formülünden,

$$f(z) = e^z, \quad z_0 = 0 \text{ için}$$

$$\begin{aligned} \int_{\|z\|=1} \frac{e^z}{z} dz &= 2\pi i f(0) \\ &= 2\pi i e^0 \\ &= 2\pi i \end{aligned}$$

Örnek

$$\int_{\|z\|=4} \frac{1}{1+z^2} dz \text{ integralini hesaplayınız.}$$

Cözüm

$$\begin{aligned} \int_{\|z\|=4} \frac{1}{1+z^2} dz &= \int_{\|z\|=4} \left(\frac{\frac{1}{2i}}{z+i} - \frac{\frac{1}{2i}}{z-i} \right) dz \\ &= \int_{\|z\|=4} \frac{\frac{1}{2i}}{z+i} - \int_{\|z\|=4} \frac{\frac{1}{2i}}{z-i} \\ &= 2\pi i \cdot \frac{1}{2i} \cdot 1 + 2\pi i \cdot \left(-\frac{1}{2i} \right) \cdot 1 \\ &= 0 \end{aligned}$$

Örnek

$$\int_{||z||=2\pi} \frac{\sin z}{z-\pi} dz \text{ integralini hesaplayınız.}$$

Cözüm

Cauchy İntegral Formülünden,

$$f(z) = \sin z, \quad z_0 = \pi \text{ için}$$

$$\begin{aligned} \int_{||z||=2\pi} \frac{\sin z}{z-\pi} &= 2\pi i \cdot f(\pi) \\ &= 2\pi i \sin \pi \\ &= 0 \end{aligned}$$

Örnek

$$\int_{\|z\|=1} \left(\frac{z^2+1}{z} + \bar{z} \right) dz \quad \text{integralini hesaplayınız.}$$

Cözüm

$$\int_{\|z\|=1} \left(\frac{z^2+1}{z} + \bar{z} \right) dz = \int_{\|z\|=1} \frac{z^2+1}{z} dz + \int_{\|z\|=1} \bar{z} dz$$

Cauchy İntegral Formülünden

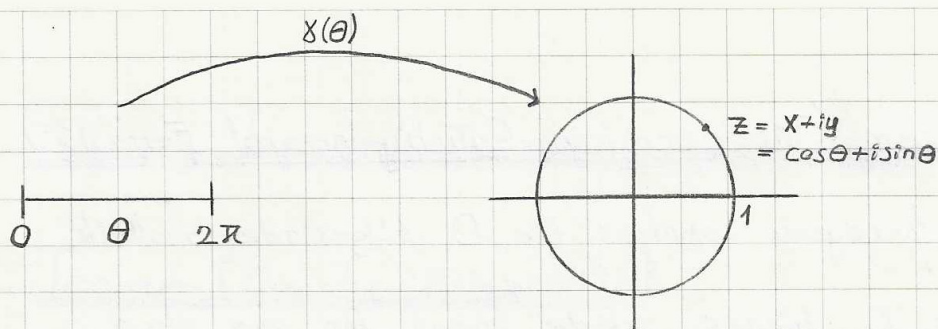
$$f(z) = z^2+1, \quad z_0 = 0 \quad \text{icin}$$

$$\begin{aligned} \int_{\|z\|=1} \frac{z^2+1}{z} dz &= 2\pi i \cdot f(0) \\ &= 2\pi i \end{aligned}$$

Diğer taraftan, $\bar{z}$ fonksiyonu hiçbir bölgede analitik değildir.

Bu sebeple $\|z\|=1$ eğrisi üzerindeki integralini hesaplayabilmek

icin bir parametrisasyon tanımlamalıyız:



$$\int_{\gamma} \bar{z} \, ds = \int_0^{2\pi} \bar{z}(\theta) z'(\theta) \, d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} (\cos \theta - i \sin \theta) (-\sin \theta + i \cos \theta) \, d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} (-\cos \theta \sin \theta + i \cos^2 \theta + i \sin^2 \theta + \cos \theta \sin \theta) \, d\theta$$

$$= 2\pi i$$

$$\int_{\|z\|=1} \left(\frac{z^2+1}{z} + \bar{z} \right) dz = \int_{\|z\|=1} \frac{z^2+1}{z} dz + \int_{\|z\|=1} \bar{z}$$

$$= 2\pi i + 2\pi i$$

$$= 4\pi i$$

Teorem (Türevler için Cauchy İntegral Formülü)

f fonksiyonu kompleks bir D bölgesinde analitik,
 γ eğrisi D bölgesi içinde kapalı bir eğri olsun.
 γ eğrisi üzerinde olmayan bir $z_0 \in D$ noktası için

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} dz, \quad n \in \mathbb{N}$$

(İspat: Basic Complex Analysis, s153, Technical Proof of Theorem 2.4.5, J.E.Marsden)

Böylece, eğer bir fonksiyon bir D bölgesi üzerinde analitik ise
 D bölgesi üzerinde tüm mertebeden türevleri vardır, deriz.

Örnek

$$\int \frac{\cos z}{(z-\pi)^2} dz \quad \text{integralini hesaplayınız.}$$

$$\|z-\pi\|=\pi$$

Cözüm

Türevler için Cauchy İntegral Formülünden

$$f(z) = \cos z, \quad z_0 = \pi \quad \text{ için }$$

$$\int \frac{\cos z}{(z-\pi)^2} dz = f'(z_0) \cdot \frac{2\pi i}{1!}$$

$$\|z-\pi\|=\pi$$

$$= -\sin(\pi) \cdot 2\pi i$$

$$= 0$$

Cauchy İntegral Teoreminin Sonuçları

Teorem (Cauchy Eşitsizliği)

f fonksiyonu kompleks bir D bölgesinde analitik,
 γ eğrisi D bölgesi içinde z_0 merkezi R yarıçaplı bir çember olsun.
Ayrıca, bir $B(z_0, R)$ diskinin D bölgesinde olduğunu varsayalım.
 γ eğrisi üzerindeki her z için $\|f(z)\| < M$ olsun.

$$\|f^{(n)}(z_0)\| \leq \frac{n!}{R^n} \cdot M$$

İspat

Türevler için Cauchy İntegral Formülü:

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} dz, \quad n \in \mathbb{N}$$

Buradan,

$$\|f^{(n)}(z_0)\| = \frac{n!}{2\pi} \left\| \int_{\gamma} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} dz \right\| \leq \frac{n!}{2\pi} \int_{\gamma} \left\| \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} \right\| |dz|$$

Şimdi,

$$\left\| \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} \right\| \leq \frac{M}{R^{n+1}}$$

olduğundan,

$$\|f^{(n)}(z_0)\| \leq \frac{n!}{2\pi} \cdot \frac{M}{R^{n+1}} \int_{\gamma} \|dz\|$$

$\implies$

$$\|f^{(n)}(z_0)\| \leq \frac{n!}{R^n} M$$

Liouville Teoremi

Eğer f fonksiyonu bir tam fonksiyon
ve her $z \in \mathbb{C}$ için $\|f(z)\| < M$ olacak şekilde bir M sabiti var
ise f fonksiyonu sabit fonksiyondur.

İspat

Cauchy Eşitsizliğinde $n=1$ için

$$\|f'(z_0)\| \leq \frac{M}{R}$$

elde edilir.

z_0 noktasını sabit tutarak, $R \rightarrow \infty$ durumunda

$$\|f'(z_0)\| = 0 \text{ elde ederiz.}$$

Böylece,

$$f'(z_0) = 0$$

olup, her $z_0 \in \mathbb{C}$ için f fonksiyonu sabittir.

Cebirin Temel Teoremi

$p(z) = a_0 + a_1 z + \dots + a_n z^n$, $a_k \in \mathbb{C}$ öyle ki $k = 1, 2, \dots, n$, $a_n \neq 0$ olsun.

$p(z_0) = 0$ olacak şekilde bir $z_0 \in \mathbb{C}$ noktası vardır.

Diğer bir deyişle, kompleks sayılar cebirsel kaptır.

İspat

Aksini iddia edelim.

Her $z_0 \in \mathbb{C}$ için $p(z_0) \neq 0$ olsun.

Böylece,

$$f(z) = \frac{1}{p(z)}$$

fonksiyonu analittir.

Şimdi, $a_n \neq 0$ olduğundan $p(z)$ fonksiyonu sabit değildir.

Böylece, $f(z)$ fonksiyonu da sabit değildir.

Öyleyse, teoremi ispatlamak için Liouville teoreminden

$f(z)$ nin sabit olduğunu göstermek yeterli olacaktır.

Bunu gösterebilmek için ilk olarak,

$z \rightarrow \infty$ iken $p(z) \rightarrow \infty$ olduğunu veya buna denk olarak

$z \rightarrow \infty$ iken $f(z) \rightarrow 0$ olduğunu göstereceğiz.

Bir başka deyişle,

Her $M > 0$ için $\exists K > 0$ öyle ki

$$\|z\| > K \implies \|p(z)\| > M$$

olduğunu göstereceğiz.

$$p(z) = a_0 + a_1 z + \dots + a_n z^n$$

olmak üzere,

$$\|p(z)\| \geq \|a_n\| \|z\|^n - (\|a_0\| + \|a_1\| \|z\| + \dots + \|a_{n-1}\| \|z\|^{n-1})$$

Şimdi

$$a := \|a_0\| + \|a_1\| + \dots + \|a_{n-1}\|$$

olsun.

Eğer $\|z\| > 1$ ise

$$\begin{aligned} \|p(z)\| &\geq \|z\|^{n-1} \left(\|a_n\| \|z\| - \left(\frac{\|a_0\|}{\|z\|^{n-1}} + \frac{\|a_1\|}{\|z\|^{n-2}} + \dots + \frac{\|a_{n-1}\|}{1} \right) \right) \\ &\geq \|z\|^{n-1} (\|a_n\| \|z\| - a) \end{aligned}$$

O halde,

$$K = \max \left\{ 1, \frac{M+a}{\|a_n\|} \right\} \text{ seçilirse } \|p(z)\| \geq M \text{ olur.}$$

Böylece,

Eğer, $\|z\| > K$ ise $\frac{1}{\|p(z)\|} < \frac{1}{M}$ olur.

Eğer, $\|z\| < K$ ise $\frac{1}{p(z)}$ fonksiyonu sürekli olduğundan

$\left\| \frac{1}{p(z)} \right\| < L$ olacak şekilde bir $L > 0$ vardır.

O halde,

$$\frac{1}{\|p(z)\|} < \max \left\{ \frac{1}{M}, L \right\}$$

$\Rightarrow \|f(z)\|$ sınırlıdır.

$\Rightarrow$ Liouville Teoreminden $f(z)$ sabittir. $\downarrow$

Morera Teoremi

$$f: D \subseteq \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$$

fonksiyonu basit bağlantılı açık D bölgesinde sürekli olsun.

Eğer D bölgesi içindeki her kapalı γ eğrisi için

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 0 \quad \text{ise } f \text{ fonksiyonu analitiktir.}$$

İspat

z_0 , D bölgesinde belli bir nokta,

z , D bölgesinde herhangi bir nokta olsun.

$$F(z) := \int_{z_0}^z f(s) ds$$

fonksiyonunu tanımlayalım.

$F(z)$, z_0 noktasını z noktasına birleştiren yoldan bağımsızdır.

Çünkü, basit kapalı çevre boyunca integral 0 olarak verilmiştir.

Böylece $\|\Delta z\|$ gerektiği kadar küçük olmak üzere,

$$\left\| \frac{F(z+\Delta z) - F(z)}{\Delta z} - f(z) \right\| = \left\| \frac{1}{\Delta z} \int_z^{z+\Delta z} [f(s) - f(z)] ds \right\|$$

yazılabilir.

Süreklilik varsayımı gereği,

her $\varepsilon > 0$ için $\exists \delta > 0$ öyle ki

$$\|s - z\| < \delta \text{ iken } \|f(s) - f(z)\| < \varepsilon$$

olacağından,

$$\left\| \frac{F(z + \Delta z) - F(z)}{\Delta z} - f(z) \right\| = \left\| \frac{1}{\Delta z} \int_z^{z + \Delta z} [f(s) - f(z)] ds \right\| < \frac{1}{\Delta z} \varepsilon \|\Delta z\| = \varepsilon$$

olur.

Buradan,

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{F(z + \Delta z) - F(z)}{\Delta z} = f(z)$$

olur ki bu da $F(z)$ nin analitik olduğu ve $F'(z) = f(z)$ olduğu anlamına gelir.

Bir analitik fonksiyonun türevi de bir analitik fonksiyon olduğundan f fonksiyonu D bölgesinde analiktir.

NOT: Morera Teoremi, Cauchy İntegral Teoreminin
karsıtı olarak kabul edilir.

Cauchy İntegral Formülünün en güçlü sonuçlarından birisi de Maksimum Modülüs Teoremi ya da diğer adıyla Maksimum Modülüs Prensibidir.

Bu teorem bizlere eğer, f fonksiyonu D bölgesinde sabit olmayan analitik bir fonksiyon ise

$\|f\|$ in D bölgesinin içindeki hiç bir noktada yerel maksimuma sahip olamayacağını, maksimum değerini sadece D bölgesinin sınırında alabileceğini söyler.

Ortalama Değer Teoremi

f , $B(z_0, r)$ yuvarının içinde ve sınırında analitik ise

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{i\theta}) d\theta$$

İspat

$$\gamma(\theta) = z_0 + re^{i\theta}, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi$$

olmak üzere, Cauchy İntegral Formülünden

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{z - z_0} dz = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{f(z_0 + re^{i\theta})}{re^{i\theta}} \cdot re^{i\theta} d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{i\theta}) d\theta$$

Teorem (Maksimum Modülüs Prensipli - Yerel Versiyon)

f fonksiyonu kompleks bir D bölgesinde analitik olsun.

Eğer $\|f\|$, $z_0 \in D$ noktasında maksimum değere sahip ise

f fonksiyonu z_0 noktasının bazı komşuluklarında sabittir.

(İspat: Basic Complex Analysis, s164, Proof of Theorem 2.5.1, Jerrold E. Marsden)

Maksimum Modülüs Prensipli

D açık, bağlantılı ve sınırlı bir kompleks bölge olsun.

Eğer, $f: \bar{D} \rightarrow \mathbb{C}$ fonksiyonu D bölgesinde analitik

ve $\bar{D}$ bölgesinde sürekli ise

$\|f\|$, ∂D deki bir noktada sonlu bir maksimum değere sahiptir.

(İspat: Basic Complex Analysis, s168, Proof of the Maximum Modulus Principle, J.E.M.)

Minimum Modülüs Prensipli

D açık, bağlantılı ve sınırlı bir kompleks bölge olsun.

Eğer, $f: \bar{D} \rightarrow \mathbb{C}$ fonksiyonu D bölgesinde analitik,

$\bar{D}$ bölgesinde sürekli ve her $z \in D$ için $f(z) \neq 0$ ise

$\|f\|$, ∂D deki bir noktada sonlu bir minimum değere sahiptir.

İspat: $h := \frac{1}{f}$ fonksiyonunu tanımlarsak Maksimum Modülüs Prensiplerinden ispat edilir.

Soru (Ödev)

$\|\cos z\|$ fonksiyonunun $[0, 2\pi] \times [0, 2\pi]$ bölgesi üzerindeki maksimum değerini bulunuz.

Soru (Ödev)

$\|e^z\|$ fonksiyonunun $\|z\| \leq 1$ bölgesi üzerindeki maksimum değerini bulunuz.

Analitik Fonksiyonların Seri Açılımı

Daha önceki bölümlerde kompleks değerli bir fonksiyonun analitik olmasını, fonksiyonun, tanım kümesindeki herhangi bir noktanın en az bir komsuluğundaki her noktada diferansiyellenebilmesi olarak tanımlamıştık.

Bu bölümde bir fonksiyonun analitik olmasını Taylor serisi ile tanımlayabileceğiz.

Öyle ki bir f fonksiyonunun analitik olması,

fonksiyonun her basamaktan diferansiyellenebilir olması ve Taylor serisinin bu fonksiyona yakınsaması ile tanımlanacaktır.

Tanım

$n=1, 2, 3, \dots$ olmak üzere $(z_n) \subset \mathbb{C}$ dizisine

kompleks sayı dizisi denir.

Tanım

$n = 1, 2, 3, \dots$ olmak üzere (z_n) bir kompleks sayı dizisi olsun.

Eğer, her $\varepsilon > 0$ için $\exists N \in \mathbb{N}$ öyle ki

her $n > N$ iken $\|z_n - L\| < \varepsilon$

ise (z_n) dizisi kompleks L noktasına **yakınsar** denir: $z_n \rightarrow L$

Lemma

$n = 1, 2, 3, \dots$ olmak üzere (z_n) bir kompleks sayı dizisi olsun.

$$z_n = x_n + iy_n \rightarrow L = L_1 + iL_2 \iff x_n \rightarrow L_1 \text{ ve } y_n \rightarrow L_2$$

Örnek

$(z_n) = (-1)^n + i$ dizisi yakınsak mıdır? Gösteriniz.

Cözüm

$$(z_n) = \{-1+i, 1+i, -1+i, 1+i, \dots\}$$

$$z_n = x_n + iy_n$$

$$= (-1)^n + i$$

$$\implies x_n = (-1)^n \text{ ve } y_n = 1 \text{ olmak üzere,}$$

$$\left. \begin{array}{l} x_{2n} = 1 \rightarrow 1 \\ x_{2n-1} = -1 \rightarrow -1 \end{array} \right\} \implies (x_n) \text{ ıraksak} \implies (z_n) \text{ ıraksak}$$

Teorem

(z_n) ve (w_n) birer kompleks sayı dizisi olmak üzere,
 $\lim z_n = L$ ve $\lim w_n = M$ olsun.

i) $\lim (z_n \mp w_n) = \lim z_n \mp \lim w_n$

ii) $\lim (c z_n) = cL$, $(c \in \mathbb{C})$

iii) $\lim \left(\frac{z_n}{w_n} \right) = \frac{\lim z_n}{\lim w_n} = \frac{L}{M}$, $(w_n \neq 0, M \neq 0)$

iv) $\lim (z_n w_n) = LM$

Lemma

(z_n) bir kompleks sayı dizisi olsun.

$$\lim z_n = L \implies \lim \|z_n\| = \|L\|$$

Uyarı: Önermenin tersi her zaman doğru değildir.

Örneğin $(z_n) = i^n$ için $\lim \|z_n\| = \|i^n\|$ iken

$$\left. \begin{array}{l} z_{4n} = 1 \longrightarrow 1 \\ z_{4n+1} = i \longrightarrow i \\ z_{4n+2} = -1 \longrightarrow -1 \\ z_{4n+3} = -i \longrightarrow -i \end{array} \right\} \implies (z_n) \text{ dizisi iraksaktır.}$$

Uyarı: $L = 0$ için önermenin tersi doğrudur.

Tanım (Cauchy Dizisi)

(z_n) herhangi bir kompleks sayı dizisi olsun.

Her $\varepsilon > 0$ için $\exists N \in \mathbb{N}$ öyle ki

her $n, m \geq N$ iken $\|z_n - z_m\| < \varepsilon$

koşulu sağlanıyor ise (z_n) dizisine **Cauchy dizisi** denir.

Teorem

(z_n) herhangi bir kompleks sayı dizisi olsun.

(z_n) dizisi Cauchy dizisidir $\iff (z_n)$ dizisi yakınsaktır.

Tanım

(z_n) herhangi bir kompleks sayı dizisi olmak üzere,
 $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ serisine **kompleks sayı serisi** denir.

Tanım

(z_n) herhangi bir kompleks sayı dizisi olmak üzere,
 $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ serisinde,

$$S_n = z_1 + z_2 + \dots + z_n$$

şeklinde tanımlanan (S_n) dizisine $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ serisinin

kısmi toplamlar dizisi denir.

$$(S_n) = \sum_{k=1}^n z_k$$

Tanım

(z_n) herhangi bir kompleks sayı dizisi olmak üzere,
 $(S_n) = \sum_{k=1}^n z_k \longrightarrow L$ ise $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ kompleks sayı serisi
kompleks L noktasına **yakınsar** denir ve $\sum_{n=1}^{\infty} z_n = L$ şeklinde
yazılır.

Tanım

(S_n) dizisi herhangi bir $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ serisinin kısmi toplamlar dizisi olmak üzere
 $\lim S_n$ için limit varsa **seri yakınsak**, aksi durumda **seri ıraksak** seridir denir.

Örnek

$\sum_{n=1}^{\infty} i^n$ serisi yakınsak mıdır? Gösteriniz.

Çözüm

$$S_1 = z_1 = i$$

$$S_2 = z_1 + z_2 = i - 1$$

$$S_3 = z_1 + z_2 + z_3 = i - 1 - i = -1$$

$$S_4 = z_1 + z_2 + z_3 + z_4 = i - 1 - i + 1 = 0$$

$$S_n = \begin{cases} i, & n \equiv 1 \pmod{4} \\ i-1, & n \equiv 2 \pmod{4} \\ -1, & n \equiv 3 \pmod{4} \\ 0, & n \equiv 0 \pmod{4} \end{cases}$$

$$\Rightarrow (S_n) = \sum_{k=1}^n i^k \text{ dizisi ıraksaktır.}$$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} i^n \text{ ıraksaktır.}$$

Teorem (Seriler için Cauchy Kriteri)

$\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ serisinin yakınsaklığı için gerek ve yeter şart

Her $\varepsilon > 0$ için $\exists N \in \mathbb{N}$ öyle ki,

her $n \geq N$ ve $p = 0, 1, 2, \dots$ için $\|z_n + z_{n+1} + \dots + z_{n+p}\| < \varepsilon$

koşulunun sağlanmasıdır.

Özel olarak,

$\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ yakınsak ise $p=0$ için $\lim z_n = 0$

Ancak tersi her zaman doğru değildir.

Örneğin, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ harmonik serisini göz önünde bulunduralım.

$(z_n) = \frac{1}{n} \longrightarrow 0$ ancak $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ serisi ıraksaktır.

Tanım

$\sum_{n=1}^{\infty} \|z_n\|$ yakınsak ise $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ serisine **mutlak yakınsak**

adı verilir.

Önerme

$\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ serisi mutlak yakınsak ise yakınsaktır.

Ancak önermenin tersi her zaman doğru değildir.

Örneğin, $(z_n) = \frac{i^n}{n}$ için $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^n}{n}$ serisini göz önünde bulunduralım.

$$\begin{aligned} S_n &= i - \frac{1}{2} - \frac{i}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{i}{4n-3} - \frac{1}{4n-2} - \frac{i}{4n-1} + \frac{1}{4n} \\ &= \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \dots - \frac{1}{4n-2} + \frac{1}{4n} \right) + i \left(1 - \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{4n-3} - \frac{1}{4n-1} \right) \\ &= \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^k}{2k} + i \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k+1}}{2k-1} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \lim S_n = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k} + i \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{2k-1}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k} \cdot (-1)^k \text{ serisi bir alterne seridir.}$$

$(a_k) = \frac{1}{2k}$ dizisi monoton azalan bir dizi olup 0 değerine yakınsadığından alterne seri testinden $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k}$ serisi yakınsaktır.

Benzer şekilde

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{2k-1} \text{ alterne serisi, alterne seri testinden yakınsaktır.}$$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^n}{n} \text{ serisi yakınsaktır.}$$

Ancak,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left\| \frac{i^n}{n} \right\| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \text{ harmonik serisi ıraksaktır.}$$

NOT: Harmonik seriler ıraksaktır.

Hatırlatma

- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a}{bn+c}$ serisine **harmonik seri** denir. ($a, b, c \in \mathbb{I}$)

- $\sum_{n=0}^{\infty} ar^n = a + ar + ar^2 + \dots + ar^{n-1}$

serisine **geometrik seri** denir. ($a \in \mathbb{I}$)

- $\sum_{n=1}^{\infty} a_n (-1)^n$ biçimindeki, (a_n) dizisinin bütün terimlerinin pozitif veya sıfır olduğu bir seriye **alterne seri** denir.

- (a_n) bir aritmetik dizi ise $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ serisine **aritmetik seri** denir.

- $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ serisinde genel terim a_n , iki basit kesrin

toplamı şeklinde yazılabiliyor ise bu seriye **teleskopik seri** denir.

- p sabit bir reel sayı olmak üzere,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} \text{ serisine } \mathbf{p\text{-serisi}} \text{ denir.}$$

San önerme bizlere bir kompleks sayı serisinin yakınsaklığını test edebilme imkanı veriyor.

Öyle ki kompleks sayılar üzerinde bir sıralama bağıntısı olmadığından kalkülüs derslerinden öğrendiğimiz yakınsaklık testleri geçersiz olmaktadır.

Fakat, bir kompleks sayı serisi mutlak yakınsak ise yakınsak olduğundan yakınsaklık testlerini yeniden kullanabilir olduğuna sonucu ortaya çıkıyor.

Pozitif Terimli Seriler için Yakınsaklık Testleri

i) Geometrik Seriler

$\|r\| < 1$ iken $\sum_{n=0}^{\infty} r^n$ serisi $\frac{1}{1-r}$ noktasına yakınsar.

$\|r\| \geq 1$ iken söz konusu seri ıraksaktır.

ii) Karşılaştırma Testi

$0 \leq a_n \leq b_n$ ise

$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ serisinin yakınsaklığı $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ serisinin yakınsaklığını,
 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ serisinin ıraksaklığı $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ serisinin ıraksaklığını doğurur.

iii) p-serileri Testi

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ serisi $p \leq 1$ iken ıraksak, $p > 1$ iken yakınsaktır.

iv) Oran Testi

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\|a_{n+1}\|}{\|a_n\|} = r$ olmak üzere $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ serisi

$r < 1$ ise mutlak yakınsaktır.

$r > 1$ ise ıraksaktır.

$r = 1$ durumunda test çalışmaz.

v) Kök Testi

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\|a_n\|} = r \text{ olmak üzere } \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ serisi}$$

$r < 1$ ise mutlak yakınsaktır.

$r > 1$ ise ıraksaktır.

$r = 1$ ise test çalışmaz.

vi) Limit Karşılaştırma Testi

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = c, \quad 0 < c < \infty \text{ ve } a_n > 0, b_n > 0 \text{ olmak üzere}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ serisi yakınsaktır} \iff \sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{ serisi yakınsaktır.}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ serisi ıraksaktır} \iff \sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{ serisi ıraksaktır.}$$

vii) Alterne Seri Testi

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n (-1)^n, \quad a_n > 0 \text{ şeklinde tanımlı alterne seri}$$

a_n monoton azalan ve $\lim a_n = 0$ ise yakınsaktır.

Örnek

$\sum_{n=1}^{\infty} i^n$ serisinin yakınsaklığını - ıraksaklığını inceleyiniz.

Cözüm

Seriler için Cauchy Kriterinde

$\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ yakınsak ise $\lim z_n = 0$ önermesinin doğru olduğunu görmüştük.

Bu önerme şu şekilde de ifade edilebilir:

$\lim z_n \neq 0$ ise $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ ıraksaktır.

O halde,

$\lim i^n$ limiti olmadığından $\sum_{n=1}^{\infty} i^n$ serisi ıraksaktır.

Örnek

$\sum_{n=1}^{\infty} 1 + \frac{i^n}{n}$ serisinin yakınsaklığını - ıraksaklığını inceleyiniz.

Cözüm

$\lim 1 + \frac{i^n}{n} = \lim 1 + \lim \frac{i^n}{n}$ olmak üzere

$\lim z_n = L$ ise $\lim \|z_n\| = \|L\|$ önermesinin tersinin yalnızca

$L = 0$ için sağlandığı göz önünde bulundurulsun.

$\lim \left\| \frac{i^n}{n} \right\| = \lim \frac{1}{n} = 0$ olduğundan $\lim \frac{i^n}{n} = 0$ olarak bulunur.

Öyleyse,

$\lim 1 + \frac{i^n}{n} = \lim 1 + \lim \frac{i^n}{n} = 1$ ise $\sum_{n=1}^{\infty} 1 + \frac{i^n}{n}$ serisi ıraksaktır.

Örnek

$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1+2i)^n}{5^n}$ serisinin yakınsak olduğunu gösterip yakınsadığı noktayı bulunuz.

Çözüm

$$z_n = \frac{(1+2i)^n}{5^n} \implies \|z_n\| = \left\| \frac{1+2i}{5} \right\|^n = \left(\frac{1}{\sqrt{5}} \right)^n \quad \text{icin}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \|z_n\| = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{5}} \right)^n \quad \text{serisi bir geometrik seri olup}$$

$\frac{1}{\sqrt{5}} < 1$ olduğundan $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1+2i)^n}{5^n}$ serisi mutlak yakınsaktır.

O halde seri yakınsaktır.

$$z = \frac{1+2i}{5} \quad \text{icin} \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1+2i)^n}{5^n} = \frac{1}{1 - \frac{1+2i}{5}} \quad \text{olarak bulunur}$$

Örnek

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + i}$ serisinin yakınsaklığını inceleyiniz.

Çözüm

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left\| \frac{1}{n^2 + i} \right\| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4 + 1} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}$$

olmak üzere, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}$ serisi p -testten yakınsak olduğundan

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + i}$ serisi mutlak yakınsaktır.

Tanım

$$f_n : D \subseteq \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C} \quad , (\forall n \in \mathbb{N})$$

şeklinde tanımlı bir fonksiyon olsun.

(f_n) dizisine **fonksiyon dizisi** adı verilir.

Tanım

$$f_n : D \subseteq \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C} \quad , (\forall n \in \mathbb{N})$$

$$f : D \subseteq \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$$

şeklinde tanımlansın.

Her $\varepsilon > 0$ için $\exists N = N(z, \varepsilon) \in \mathbb{N}$ öyle ki

$$\text{her } n \gg N \text{ iken } \|f_n(z) - f(z)\| < \varepsilon \quad , (\forall z \in D)$$

koşulu sağlanıyor ise $(f_n(z))$ fonksiyon dizisi D bölgesinde

$f(z)$ fonksiyonuna **noktasal yakınsar** denir

ve $f_n(z) \xrightarrow{n} f(z)$ şeklinde gösterilir.

Her $\varepsilon > 0$ için $\exists N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ öyle ki

$$\text{her } n \gg N \text{ iken } \|f_n(z) - f(z)\| < \varepsilon \quad , (\forall z \in D)$$

koşulu sağlanıyor ise $(f_n(z))$ fonksiyon dizisi D bölgesinde

$f(z)$ fonksiyonuna **düzgün yakınsar** denir

ve $f_n(z) \xrightarrow{d} f(z)$ şeklinde gösterilir.

Önerme

(f_n) dizisi f fonksiyonuna düzgün yakınsar ise

(f_n) dizisi f fonksiyonuna noktasal yakınsar.

Önerme

(f_n) dizisinin elemanları sürekli ve $f_n \xrightarrow{d} f$ ise f fonksiyonu sürekli dir.

Teorem

$$f_n : D \subseteq \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}, (\forall n \in \mathbb{N})$$

$$f : D \subseteq \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$$

şeklinde tanımlansın.

(f_n) sürekli fonksiyonlar dizisi olsun.

$$f_n \xrightarrow{d} f \iff \lim_{\substack{\sup \\ z \in D}} \|f_n(z) - f(z)\| = 0$$

Tanım

(f_n) herhangi bir kompleks fonksiyonlar dizisi olmak üzere $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ serisine **kompleks fonksiyon serisi** denir.

Tanım

(f_n) herhangi bir kompleks fonksiyonlar dizisi olmak üzere,
 $(s_n) = \sum_{k=1}^n f_k \longrightarrow f$ ise $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ serisine **yakınsak seri**,
 $(s_n) = \sum_{k=1}^n f_k \xrightarrow{n} f$ ise $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ serisine **noktasal yakınsak seri**,
 $(s_n) = \sum_{k=1}^n f_k \xrightarrow{d} f$ ise $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ serisine **düzgün yakınsak seri** denir.

NOT

Noktasal ve düzgün yakınsaklık arasındaki fark şu şekildedir:

Noktasal yakınsaklıkta, verilen $\varepsilon > 0$ için gerekli olan

$N \in \mathbb{N}$ değerlerinin noktadan noktaya değişmesine izin verilir.

Buna karşılık düzgün yakınsaklıkta, her z noktası için

geçerli yalnızca bir $N \in \mathbb{N}$ değeri bulabilmeliyiz.

Teorem (Cauchy Kriteri)

i) $f_n : D \subseteq \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C} \quad , \quad (\forall n \in \mathbb{N})$

şeklinde tanımlansın.

$(f_n(z))$ dizisinin düzgün yakınsaklığı için gerek ve yeter koşul

her $\varepsilon > 0$ için $\exists N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ öyle ki,

her $n \gg N$ ve $p = 1, 2, 3, \dots$ için $\|f_n(z) - f_{n+p}(z)\| < \varepsilon$

koşulunun sağlanmasıdır.

ii) $f_n : D \subseteq \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C} \quad , \quad (\forall n \in \mathbb{N})$

şeklinde tanımlansın.

$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ fonksiyon serisinin düzgün yakınsaklığı için gerek ve yeter koşul

her $\varepsilon > 0$ için $\exists N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ öyle ki,

her $n \gg N$ ve $p = 1, 2, 3, \dots$ için $\|f_{n+1}(z) + f_{n+2}(z) + \dots + f_{n+p}(z)\| < \varepsilon$

koşulunun sağlanmasıdır.

Önerme

(f_n) dizisinin elemanları sürekli ve $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z) = f(z)$ (düzgün)

ise f fonksiyonu sürekli'dir.

Weierstrass M Test

$$f_n : D \subseteq \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C} \quad , \quad (\forall n \in \mathbb{N})$$

şeklinde tanımlansın.

(f_n) kompleks fonksiyon dizisi olmak üzere, her $z \in D$ için

$$i) \|f_n(z)\| \leq M_n$$

$$ii) \sum_{n=1}^{\infty} M_n \text{ yakınsak}$$

kosullarını sağlayacak şekilde bir $M_n \geq 0$ reel sayı dizisi var ise

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|f_n(z)\| \text{ serisi yakınsaktır.}$$

Böylece, $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ serisi düzgün ve mutlak yakınsaktır.

Örnek

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^2} \text{ serisinin } \|z\| \leq 1 \text{ bölgesinde düzgün yakınsak}$$

olduğunu gösteriniz.

Çözüm

$$f_n(z) = \frac{z^n}{n^2} \implies \|f_n(z)\| = \left\| \frac{z^n}{n^2} \right\| = \frac{\|z\|^n}{n^2} \leq \frac{1}{n^2} = M_n$$

seçilirse $M_n \geq 0$ ve $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ serisi p -testten yakınsak

olduğundan $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^2}$ serisi düzgün yakınsaktır.

Örnek

$\sum_{n=1}^{\infty} z^n$ serisinin $r < 1$ olmak üzere her $\|z\| \leq r$ bölgesinde düzgün yakınsak olduğunu gösteriniz. Yakınsadığı fonksiyonu bulunuz.

Cözüm

$$f_n = z^n \implies \|f_n\| = \|z^n\| = \|z\|^n \leq r^n = M_n$$

seçilirse $M_n \geq 0$ ve $\sum_{n=1}^{\infty} r^n$ serisi geometrik seri olup

$r < 1$ olduğundan yakınsaktır.

$\implies$ Weierstrass M Testten $\sum_{n=1}^{\infty} z^n$ serisi düzgün yakınsaktır.

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} z^n &= z + z^2 + z^3 \dots \\ &= z(1 + z^2 + z^3 + \dots) \\ &= z \cdot \frac{1}{1-z} \\ &= \frac{z}{1-z} \end{aligned}$$

$$\implies \sum_{n=1}^{\infty} z^n \xrightarrow{d} f(z) = \frac{z}{1-z}$$

* Teorem (Analitik Yakınsaklık Teoremi)

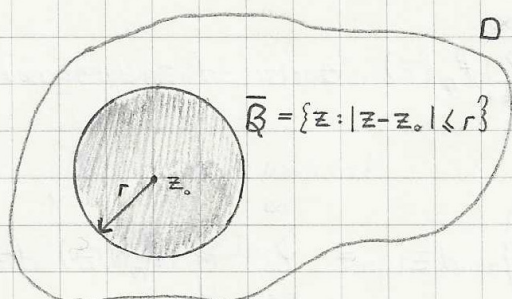
i) (f_n) fonksiyon dizisi açık bir D bölgesinde tanımlı analitik fonksiyonlar dizisi olsun.

Eğer, D bölgesince kapsanan her kapalı diskte $f_n \xrightarrow{d} f$ ise f analitiktir.

Dahası,

D bölgesinde $f'_n \xrightarrow{n} f'$,

D bölgesindeki her kapalı diskte $f'_n \xrightarrow{d} f'$.



ii) (f_n) fonksiyon dizisi açık bir D bölgesinde tanımlı analitik fonksiyonlar dizisi olsun.

Eğer, D bölgesince kapsanan her kapalı diskte $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z) = f(z)$ (düzgün) ise f analitiktir.

Dahası,

D bölgesinde $\sum_{n=1}^{\infty} f'_n(z) = f'(z)$ (noktasal),

D bölgesindeki her kapalı diskte $\sum_{n=1}^{\infty} f'_n(z) = f'(z)$ (düzgün).

Önerme

i) $\gamma: [a, b] \longrightarrow D \subseteq \mathbb{C}$ şeklinde tanımlı bir eğri,
(f_n) fonksiyon dizisi $\gamma([a, b])$ bölgesinde tanımlı
sürekli fonksiyonlar dizisi olsun.

$$\gamma([a, b]) \text{ bölgesinde } f_n \xrightarrow{d} f \text{ ise } \int_{\gamma} f_n \longrightarrow \int_{\gamma} f$$

ii) $\gamma: [a, b] \longrightarrow D \subseteq \mathbb{C}$ şeklinde tanımlı bir eğri,
(f_n) fonksiyon dizisi $\gamma([a, b])$ bölgesinde tanımlı
sürekli fonksiyonlar dizisi olsun.

γ eğrisi üzerinde $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ serisi düzgün yakınsak ise

$$\int_{\gamma} \left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z) \right) dz = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\gamma} f_n(z) dz$$

$R=0$ ise seri sadece z_0 noktasında yakınsaktır.

$R=\infty$ ise seri tüm $\mathbb{C}$ de yakınsaktır.

Kuvvet Serisi ve Taylor Teoremi

Tanım

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n, \quad (a_n \in \mathbb{C})$$

formundaki seriye **kuvvet serisi** denir.

Tanım ve Teorem

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$ serisi bir kuvvet serisi olsun.

Öyleyse,

$\|z - z_0\| < R$ iken seri mutlak yakınsak,

$\|z - z_0\| > R$ iken seri ıraksak

olacak şekilde bir $0 \leq R \leq +\infty$ sayısı vardır.

Bu sayıya **yakınsaklık yarıçapı** denir.

Dahası,

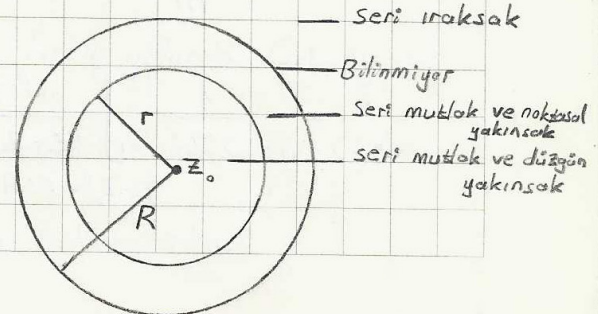
$0 \leq r < R$ için $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$ kuvvet serisi

her kapalı $\bar{B} = \{z \in \mathbb{C} : \|z - z_0\| \leq r\}$ diskinde

düzgün ve mutlak yakınsaktır.

$\|z - z_0\| = R$ iken söz konusu serinin

yakınsaklığı - ıraksaklığı hakkında bir genelleme söz konusu değildir.



Tanım

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$ serisi herhangi bir kuvvet serisi olmak üzere,
 $\|z - z_0\| = R$ çemberine yakınsaklık çemberi denir.

Teorem (Kuvvet Serisinin Analitikliği)

Herhangi bir $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$ kuvvet serisi
yakınsaklık çemberinin içinde analitik bir fonksiyondur.

Teorem (Kuvvet Serisinin Diferansiyeli)

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$$

fonksiyonu verilen kuvvet serisinin yakınsak çemberinin içinde tanımlı
olan analitik fonksiyon olsun.

$$f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (z-z_0)^{n-1}$$

Bu iki serinin yakınsaklık çemberi aynıdır.

Dahası,

$$a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_{\|z-z_0\|=r < R} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} dz$$

Yakınsaklık Yarıçapını Bulma Yöntemleri

Önerme

Herhangi bir $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$ kuvvet serisi göz önünde bulundursun.

i) Oran Testi (Yakınsak Yarıçapı İçin)

Eğer,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\|a_n\|}{\|a_{n+1}\|}$$

limiti var veya limiti var ve sonsuz ise

bu limit yakınsaklık yarıçapı olan R ye eşittir.

ii) Kök Testi

Eğer,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\|a_n\|}$$

limiti var veya limiti var ve sonsuz ise $R = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\|a_n\|}}$

Not: Bir dizinin limiti her zaman olmasa da limsup değerinin her zaman var olduğu hatırlansın. Böylece farklı yıllarda Cauchy ve Hadamard'ın öne sürdüğü Cauchy-Hadamard Teoremi olarak bilinen, kök testinin daha iyileştirilmiş bir versiyonunu kullanabiliriz:

$$R = \frac{1}{\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\|a_n\|}}$$

Nereye yakınsar? Eksik kaldı.

Örnek

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^2}$ serisinin yakınsak olduğu bölgeyi bulunuz.

Cözüm

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} (z-0)^n \quad \text{olmak üzere,}$$

Yakınsaklık yarıçapı için Oran Testinden

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\|a_n\|}{\|a_{n+1}\|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\| \frac{\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{(n+1)^2}} \right\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^2}{n^2} = 1 \quad \text{olarak bulunur.}$$

0 halde, seri $\|z\| < 1$ bölgesinde mutlak yakınsaktır.

$\|z\| = 1$ ise $\sum_{n=1}^{\infty} \left\| \frac{z^n}{n^2} \right\| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ serisi p-serileri Testinden yakınsaktır.

0 halde, seri $\|z\| = 1$ bölgesinde de mutlak yakınsaktır.

BAŞLIK

Eksik kaldı.

Örnek

$\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ serisinin yakınsak olduğu bölgeyi bulunuz.

Cözüm

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n = \sum_{n=0}^{\infty} (z-0)^n \quad \text{olmak üzere,}$$

Yakınsaklık yarıçapı için Oran Testinden

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\|a_n\|}{\|a_{n+1}\|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\| \frac{1}{1} \right\| = 1 \quad \text{olarak bulunur.}$$

0 halde, seri $\|z\| < 1$ bölgesinde mutlak yakınsaktır.

$$\|z\| = 1 \quad \text{ise}$$

Eksik

Örnek

$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1+i}{3} \right)^n$ serisinin yakınsak olduğunu gösterip, yakınsadığı fonksiyonu bulunuz.

Cözüm

$$z = \frac{1+i}{3} \quad \text{için}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1+i}{3} \right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} z^n \quad \text{serisi bir geometrik seri olup,}$$

$\|z\| < 1$ ise seri mutlak yakınsaktır.

$$\left\| \frac{1+i}{3} \right\| = \frac{\sqrt{2}}{3} < 1$$

$\implies$ Seri mutlak yakınsaktır

$\implies$ Seri yakınsaktır.

Seri bir geometrik seri olduğundan,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1+i}{3} \right)^n = \frac{1}{1 - \frac{1+i}{3}}$$

$$= \frac{3}{2-i}$$

$$= \frac{3(2+i)}{5}$$

olarak bulunur.

Örnek

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n, \quad a_n = \begin{cases} 2^n, & n \text{ çift} \\ \frac{1}{7^n}, & n \text{ tek} \end{cases}$$

serisinin yakınsaklık yarıçapını bulunuz.

Cözüm

Kök Testinden

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\|a_n\|} = \begin{cases} 2, & n \text{ çift} \\ \frac{1}{7}, & n \text{ tek} \end{cases}$$

$\Rightarrow$ limit yoktur.

Ancak, Cauchy - Hadamard Teoreminden

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\|a_n\|} = 2 \quad \text{olduğundan} \quad R = \frac{1}{\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\|a_n\|}} \\ = \frac{1}{2} \quad \text{olarak bulunur.}$$

O halde, seri $\|z - z_0\| < \frac{1}{2}$ bölgesinde mutlak yakınsaktır.

Taylor Teoremi

f fonksiyonu açık kompleks D bölgesinde analitik bir fonksiyon olmak üzere, $z_0 \in D$ olsun.

$B(z_0, R)$ diski tamamen D bölgesinde kalmak üzere,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z-z_0)^n$$

serisinin, $B(z_0, R)$ açık diskinde yakınsak olduğu bir $R > 0$ yarıçapı vardır

öyle ki:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z-z_0)^n$$

Bu seriye f fonksiyonunun z_0 noktası etrafındaki Taylor serisi denir.

Örnek

$f(z) = \frac{1}{1+z^2}$ fonksiyonunun $z_0 = 0$ noktası etrafındaki seri açılımını bulunuz ve bu serinin yakınsaklık yarıçapını belirleyiniz.

Cözüm

$$D(f) = \mathbb{C} \setminus \{i, -i\} \text{ olmak üzere } 0 \in D(f)$$

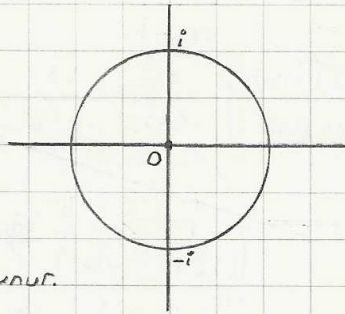
olduğundan, fonksiyonun $z_0 = 0$ noktası etrafındaki Taylor seri açılımı vardır.

Bu serinin yakınsaklık yarıçapı $z_0 = 0$ noktasına en yakın singüler noktanın $z_0 = 0$ ile farkının normu kadardır.

$$R = \|z_0 - i\|$$

$$= \|0 - i\|$$

$$= 1 \text{ olarak bulunur.}$$



Şimdi,

$$-w := z^2 \text{ tanımlamasını yapalım.}$$

$$\frac{1}{1+z^2} = \frac{1}{1-w} = \sum_{n=0}^{\infty} w^n$$

$$\Rightarrow \frac{1}{1+z^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^{2n}, \quad \|z\| < 1 \text{ olarak bulunur.}$$

Örnek

$$f(z) = \frac{1}{1+z^2} \quad \text{fonksiyonunun } z_0 = 3+2i \text{ noktası etrafındaki}$$

seri açılımını bulunuz ve bu serinin yakınsaklık yarıçapını belirleyiniz.

Cözüm

$$D(f) = \mathbb{C} \setminus \{i, -i\} \quad \text{olmak üzere } 3+2i \in D(f)$$

olduğundan, fonksiyonun $z_0 = 3+2i$ noktası etrafında Taylor seri açılımı vardır.

Bu serinin yakınsaklık yarıçapı $z_0 = 3+2i$ noktasına en yakın singüler noktanın

$z_0 = 3+2i$ ile farkının normu kadardır.

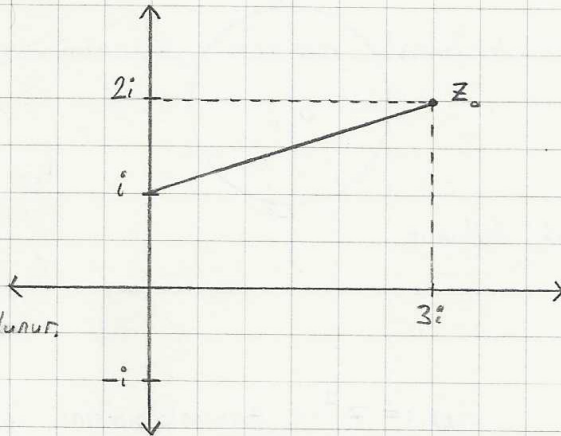
$$R = \|z_0 - i\|$$

$$= \|3+2i - i\|$$

$$= \|3+i\|$$

$$= \sqrt{10}$$

olarak bulunur.



Şimdi,

$$-w := z^2$$

tanımlamasını yapalım.

$$\frac{1}{1+z^2} = \frac{1}{1+z^2+3+2i-3-2i}$$

$$= \frac{1}{1-w+3+2i-3-2i}$$

$$= \frac{1}{-2-3i-(w-(3+2i))}$$

$$= \frac{1}{-2-3i} \left(\frac{1}{1 - \left(\frac{w-(3+2i)}{-2-3i} \right)} \right)$$

$$= \frac{1}{-2-3i} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{w-(3+2i)}{-2-3i} \right)^n$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(w-(3+2i))^n}{(-2-3i)^{n+1}}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-z^2-(3+2i))^n}{(-2-3i)^{n+1}}, \quad \|z-(3+2i)\| < \sqrt{10}$$

olarak bulunur.

Önerme

$$f: \mathbb{C} \cup \{+\infty\} \longrightarrow \mathbb{C}$$

$$g: D \subseteq \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$$

şeklinde tanımlansın.

$f(z)$ fonksiyonunun $z_0 = +\infty$ da analitik olması için

gerek ve yeter şart $f\left(\frac{1}{z}\right) = g(z)$ fonksiyonunun

$z_0 = 0$ noktasında analitik olmasıdır.

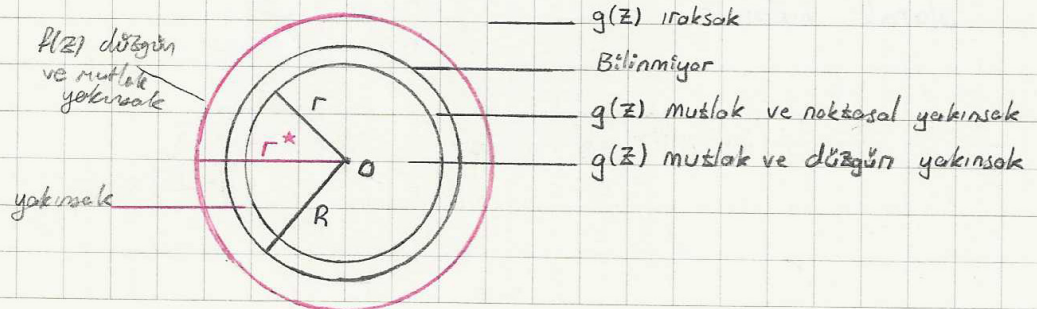
$g(z)$ fonksiyonu $z_0 = 0$ noktasında analitik ise

Taylor seri açılımı vardır:

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n, \quad \|z\| < R$$

O halde, $f(z)$ fonksiyonunun $z = +\infty$ daki seri açılımı:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{1}{z^n}, \quad \|z\| > R$$



Örnek

$f(z) = \frac{1}{1+z^2}$ fonksiyonunun $z_0 = +\infty$ daki seri açılımını bulunuz.

Çözüm

$$f(z) = \frac{1}{1+z^2} \implies g(z) := f\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{1}{1+\left(\frac{1}{z}\right)^2} = \frac{z^2}{1+z^2}$$

$D(g) = \mathbb{C} \setminus \{i, -i\}$ olmak üzere, $0 \in D(g)$ olduğundan

$g(z)$ fonksiyonu $z_0 = 0$ noktasında analitik olup Taylor seri açılımı vardır.

O halde,

$f(z)$ fonksiyonu $z_0 = +\infty$ da analitik olup Taylor seri açılımı vardır.

$$\begin{aligned} g(z) &= \frac{z^2}{1+z^2} = z^2 \left(\frac{1}{1-(-z^2)} \right) \\ &= z^2 \sum_{n=0}^{\infty} (-z^2)^n, \quad \|-z^2\| < 1 \\ &= z^2 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^{2n} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^{2n+2}, \quad \|z\| < 1 \end{aligned}$$

olarak bulunur.

Laurent Serileri ve Singularitelerin Sınıflandırılması

Taylor serisi $f(z)$, z_0 merkezli bir diske analitik olduğunda bir $f(z)$ fonksiyonunun z_0 etrafındaki yakınsak kuvvet serisi açılımını bulmamızı sağlar.

Bu sebeple, Taylor açılımı $f(z) = \frac{1}{z}$ veya $g(z) = \frac{e^z}{z^2}$ fonksiyonları için $z_0 = 0$ noktasında uygulanamazlar.

Çünkü bu fonksiyonlar $z = 0$ noktasında analitik değildirler.

Bu tür fonksiyonlar için Laurent açılımı adı verilen başka bir açılım vardır.

Bu açılım özellikle fonksiyonların singular noktalarının incelenmesinde önemlidir öyle ki kompleks fonksiyonlar teorisinin bir başka temel sonucuna yol açar: Reziđü Teoremi.



8 691498 107467

17x24 - 192 Pages - Squared



Eco Kraft Notebook

Item Nr : 2015070/2

All Rights Reserved