MTK 311 Kompleks Fonksiyonlar Teorisi Alıştırma Seti 1.

Karmaşık Sayılar

1. Euler formülünü ve $e^{i(\theta_1+\theta_2)} = e^{i\theta_1}e^{i\theta_2}$ özdeşliğini kullanarak Sinüs ve Kosinüs'ün aşağıdaki toplam formüllerini gösteriniz:

$$\sin(\theta_1+\theta_2) = \sin\theta_1\cos\theta_2 + \cos\theta_1\sin\theta_2$$

$$\cos(\theta_1+\theta_2) = \cos\theta_1\cos\theta_2 - \sin\theta_1\sin\theta_2$$

2. Euler formülünü aynı şekilde kullanarak aşağıdaki özdeşlikleri gösteriniz:

$$\sin(n\theta) = \binom{n}{1}\cos^{n-1}\theta\sin\theta - \binom{n}{3}\cos^{n-3}\theta\sin^3\theta + ... = \sum_{j=0}^{[\frac{n-1}{2}]}(-1)^j\binom{n}{2j+1}\cos^{n-2j-1}\theta\sin^{2j+1}\theta$$

$$\cos(n\theta) = \cos^n\theta - \binom{n}{2}\cos^{n-2}\theta\sin^2\theta + ... = \sum_{j=0}^{[\frac{n}{2}]}(-1)^j\binom{n}{2j}\cos^{n-2j}\theta\sin^{2j}\theta$$

3. Aşağıdaki geometrik seri formülünü gösteriniz:

$$1 + z + z^2 + ... + z^n = \frac{1-z^{n+1}}{1-z}$$

Bu geometrik seri formülünü kullanarak aşağıdaki özdeşliği gösteriniz:

$$1 + \cos\theta + \cos 2\theta + ... + \cos(n\theta) = \frac{1}{2} + \frac{\sin(n+\frac{1}{2})\theta}{2\sin\frac{\theta}{2}}$$

4. Üçgen eşitsizliğinin aşağıdaki şeklini gösteriniz:

$$\| z_1 \mid - \mid z_2 \| \leq \mid z_1 + z_2 \mid \quad \forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}$$

5. Sabit bir $a \in \mathbb{C}$ için eğer $1 - \overline{a}z \neq 0$ ve $\mid z \mid = 1$ ise

$$\left|\frac{z-a}{1-\overline{a}z}\right| = 1$$

olduğunu gösteriniz.

6. Aşağıdaki karmaşık sayıların kartezyen ve polar formlarini yazınız:

a. $\sqrt{i}$ b. $\sqrt[4]{i}$ c. $(1+i)^8$ d. $\sqrt{i-1}$ e. $(3-4i)^{\frac{1}{8}}$

7. Eğer $z \in \mathbb{C}$ ve $\Re(z^n) \geq 0\ \forall n \in \mathbb{N}$ ise $z \in \mathbb{R}$ ve $z \geq 0$ olduğunu gösteriniz.

8. Aşağıdaki denklemleri sağlayan $z \in \mathbb{C}$ noktalar kümelerini bulunuz:

a. $a \in \mathbb{R}$, $c > 0$, $\mid z - a \mid + \mid z + a \mid = 2c$

b. $a \in \mathbb{R}$, $c > 0$, $\mid z - a \mid - \mid z + a \mid = 2c$

c. $z_0 \in \mathbb{C}$, $R > 0$, $\mid z \mid^2 - 2\Re(z\overline{z_0}) + \mid z_0 \mid^2 = R^2$

d. $\mid z - 1 \mid = \mid z + i \mid$

e. $\arg(z) < \dfrac{\pi}{4}$

f. $\mid z \mid = \arg(z)$

9. a. Eğer $n \in \mathbb{N}$ ve $n > 1$ ise

$$\sum_{k=1}^{n} e^{\frac{2k\pi i}{n}} = 0$$

olduğunu gösteriniz.

b. Eğer $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$, $r > 0$ ve $z \in \mathbb{C}$ ise

$$\sum_{k=1}^{n} \mid z - re^{\frac{2k\pi i}{n}} \mid^2 = n(\mid z \mid^2 + r^2)$$

olduğunu gösteriniz.

c. (b)'deki sonucu sabit bir noktanın bir düzgün n-gen'in köşelerine olan uzaklıklarının toplamını düşünerek yorumlayınız.

10. Aşağıdaki eşitsizlikleri gösteriniz:

$$\mid z \mid \leq \mid \Re(z) \mid + \mid \Im(z) \mid \leq \sqrt{2} \mid z \mid$$