MTK 311 Kompleks Fonksiyonlar Teorisi Alıştırma Seti 2.

Kompleks Değerli fonksiyonlar

1. $\mathbb{C}$'nin aşağıdaki altkümelerinin açık yada kapalı ya da ne açık ne de kapalı olup olmadığını açıklayınız
a-) $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} :| z |< 1\}$
b-) $\mathbb{R} = \{z \in \mathbb{C} : \bar{z} = z\}$
c-) $\{z \in \mathbb{C} : z^n = 1 \quad \text{bir} \quad n \geq 1 \quad \text{için}\}$
d-) $\{z \in \mathbb{C} : z \in \mathbb{R} \quad \text{ve} \quad 0 \leq z < 1\}$
e-) $\{z \in \mathbb{C} : z \in \mathbb{R} \quad \text{ve} \quad 0 \leq z \leq 1\}$
2. $f(z) = | z |^2 = x^2 + y^2$ fonksiyonunun sadece 0 noktasında türevlenebilir oldugunu gösteriniz.
3. $G \subset \mathbb{C}$'de bir bölge olsun. $G^* = \{\bar{z} : z \in G\}$ olsun. Eğer $f : G \to \mathbb{C}$ fonksiyonu türevlenebilir ise $f^* : G^* \to \mathbb{C}$

$$f^*(z) = \overline{f(\overline{z})}$$

fonksiyonunun da türevlenebilir olduğunu gösteriniz.
4. G, $G' \subset \mathbb{C}$'de iki bölge olsunlar ve $f : G \to \mathbb{C}$ ve $g : G' \to \mathbb{C}$ öyle iki sürekli fonksiyonlar olsunlar ki $f(G) \subset G'$ ve

$$g(f(z)) = z \quad \forall z \in G$$

olsun. Eğer g, $b = f(a)$ $(a \in G)$ noktasında türevlenebilirse ve $g'(b) \neq 0$ ise f'in de $a \in G$ noktasında türevlenebilir oldugunu ve

$$f'(a) = \frac{1}{g'(b)}$$

oldugunu gösteriniz.
5. G ve $G' \subset \mathbb{C}$'de iki bölge ve $f : G \to \mathbb{C}$, $g : G' \to \mathbb{C}$ türevlenebilir fonksiyonlar olsunlar. $f(G) \subseteq G'$ olsun. O halde $h = g \circ f$; $h(z) = g(f(z))$ fonksiyonunun da türevlenebilir oldugunu gösteriniz.
6. $G \subset \mathbb{C}$'de bir bölge ve $f : G \to \mathbb{C}$ türevlenebilir bir fonksiyon olsunlar. Eğer $m(z) =| f(z) |$ fonksiyonu sabitse f'nin de sabit oldugunu gösteriniz.
7. $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ bir fonksiyon olsun öyle ki

$$(f(z))^2 = z \quad \forall z \in \mathbb{C}$$

denklemini saglasın. f'nin sürekli olamayacagını gösteriniz.
8.A, $B \subset \mathbb{C}$'de herhangi iki küme olsunlar.

$$d(A, B) = \inf\{| a - b |: a \in A, \quad b \in B\}$$

şeklinde tanımlanan niceliğe A ve B arasındaki uzaklık diyelim. Eğer $B = b$ tek elemanlı ise $d(A, \{b\}) = d(A, b)$ şeklinde gösterelim.
a-) Eğer $A \subset \mathbb{C}$'de kapalı ve $b \in \mathbb{C}$ herhangi bir karmaşık sayı ise bir $a \in A$ vardır ki

$$d(A, b) =| a - b |$$

oldugunu gösteriniz.
b-) Eğer $A \subset \mathbb{C}$'de kapalı ve $B \subset \mathbb{C}$'de tıkız ise öyle bir $a \in A$ ve $b \in B$ vardır ki

$$d(A,B) = \mid a - b \mid$$

oldugunu gösteriniz.
c-) Öyle $A, \quad B \subset \mathbb{C}$'de kapalı iki küme bulunuz ki $d(A,B) = \mid a - b \mid$ şartını sağlayan $a \in A$ ve $b \in B$ karmaşık sayıları bulunamasın.
9. $a \in \mathbb{C}$ öyle ki $a \neq 0$ verilmiş olsun. $\{z_n\}_{n=0}^{\infty} \subset \mathbb{C}$ dizisi aşağıdaki

$$z_{n+1} = \frac{1}{2}\left(z_n + \frac{a}{z_n}\right)$$

rekürsif denklemini sağlasın. Hangi $z_0 \in \mathbb{C}$ karmaşık sayıları için $\{z_n\}_{n=0}^{\infty} \subset \mathbb{C}$ dizisi yakınsaktır?
10.(Abel toplanabilirlik) $\{a_n\}_{n=0}^{\infty} \subset \mathbb{C}$ ve $\{b_n\}_{n=0}^{\infty} \subset \mathbb{C}$ iki karmaşık sayı dizisi olsunlar ve

$$A_n = a_0 + a_1 + ... + a_n$$

olsun. Her $m \geq 0$ ve her $n \geq m$ için

$$\sum_{k=m}^{n} a_k b_k = [\sum_{k=m}^{n} A_k(b_k - b_{k+1}] - A_{m-1}b_m + A_n b_{n+1}$$

olduğunu gösteriniz.(Burada $m = 0$ için $A_{-1} = 0$ alıyoruz.)