

MTK 311 Kompleks Fonksiyonlar Teorisi Alıştırma Seti 6.

Laurent serileri, Rezidü teoremi ve uygulamaları

1. $G, G' \subseteq \mathbb{C}$ 'de iki bölge olsunlar öyle ki $\varphi : G \rightarrow G'$ analitik ve $\varphi'(z) \neq 0$ $\forall z \in G$ sağlayan bir fonksiyon olsun. $\alpha : [t_1, t_2] \rightarrow G$ bir eğri olsun ve $\tilde{\alpha} = \varphi \circ \alpha$, α 'nın φ altında görüntüsü olsun. Eğer $f : G' \rightarrow \mathbb{C}$ sürekli ise

$$\int_{\alpha} f(\eta) d\eta = \int_{\tilde{\alpha}} f(\varphi(\mu)) \varphi'(\mu) d\mu$$

olduğunu gösteriniz. Buradan $f : G' - \{\varphi(a)\} \rightarrow \mathbb{C}$ analitik fonksiyonu için

$$\text{Res}(f; \varphi(a)) = \text{Res}((f \circ \varphi)\varphi'; a)$$

olduğunu gösteriniz.

2. $f(z) = \frac{z}{z^2 + 1}$ fonksiyonunu $A = \{z \in \mathbb{C} : 0 < |z - i| < 2\}$ bölgesinde Laurent serisine açınız. f 'nin $z = i$ 'de ne tür bir tekilliği vardır?

3.

$$f(z) = e^{\frac{-1}{z^2}}$$

fonksiyonunu $A = \{z \in \mathbb{C} : 0 < |z| < 1\}$ bölgesinde Laurent serisine açınız. f 'nin $z = 0$ 'da ne tür bir tekilliği vardır?

4. $f : \mathbb{C} - \{a\} \rightarrow \mathbb{C}$ analitik bir fonksiyon olsun. a, f 'nin birinci dereceden kutbu olsun. Eğer $g : D(a, r) \rightarrow \mathbb{C}$ analitik ise

$$\text{Res}(f.g; a) = g(a)\text{Res}(f; a)$$

olduğunu gösteriniz.

5. $a > 0$ olsun. Aşağıdaki integrali hesaplayınız:

$$\int_0^{2\pi} \frac{dx}{a + \sin^2 x}$$

6. $n \in \mathbb{N}$ ve $n > 1$ olmak üzere aşağıdaki integrali hesaplayınız:

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{x^n + 1}$$

7. $a, b > 0$ olmak üzere aşağıdaki özdeşliği gösteriniz:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2 + b^2)(x^2 + a^2)^2} = \frac{\pi(2a + b)}{2a^3b(a + b)^2}$$

8. $a > b > 0$ olmak üzere aşağıdaki özdeşliği gösteriniz:

$$\int_0^{2\pi} \frac{dx}{(a + b \cos x)^2} = \frac{2\pi a}{(a^2 - b^2)^{\frac{3}{2}}}$$

9. $r > 0$ olmak üzere $f : D(0, r) - \{0\} \rightarrow \mathbb{C}$ analitik fonksiyonu için

$$\text{Res}(f'; 0) = 0$$

olduğunu gösteriniz.

10. $z^7 - 5z^4 + iz^2 - 2 = 0$ denkleminin $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ içerisine düşen köklerinin sayısını bulunuz.